Επανάληψη Βασικών Στοιχείων Ψηφιακής Λογικής

Αριθμοί Διαφόρων Βάσεων

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-1
Αριθμοί σε διάφορες βάσεις

Δεκαδικό (βάση 10)	Δυαδικό (βάση 2)	Οκταδικό (βάση 8)	Δεκαεξαδικό (βάση16)
00	0000	00	0
01	0001	01	1
02	0010	02	2
03	0011	03	3
04	0100	04	4
05	0101	05	5
06	0110	06	6
07	0111	07	7
08	1000	10	8
09	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Υπολογιστική Ακρίβεια

Ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων αναπαράστασης αριθμών καθορίζει την ακρίβεια των αριθμών σε έναν Η/Υ

0 0 0 0 0 0 0 0	**0...255**	1 1 1 1 1 1 1 1

8 bit

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	**0...65535**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

16 bit

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	**0...16.777.215**	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

24 bit

Δυαδικοί Αριθμοί – Αριθμητικές Πράξεις

```
  1011110
---------
   101101
+  100111
---------
  1010100
```

```
  0001100
---------
   101101
-  100111
---------
   000110
```

```
     1011
    x 101
---------
     1011
    0000
   1011
---------
   110111
```

```
1010110 | 101
101↓↓↓↓ |------
   0110 | 10001
    101 |
   ---- |
    001 |
```

Μετατροπή Βάσης Αριθμού

1) Μετατροπή από r-αδικό σε δεκαδικό:

    Πολ/ζουμε τους συντελεστές με τις αντίστοιχες δυνάμεις της βάσης r και προσθέτουμε.

2) Μετατροπή από δεκαδικό σε r-αδικό:

    Χωρίζουμε ακέραιο και κλασματικό μέρος.

    Ακέραιο μέρος: διαιρούμε συνέχεια με r και κρατάμε το υπόλοιπο.

    Κλασματικό μέρος: πολ/ζουμε συνέχεια με r και κρατάμε το ακέραιο μέρος.

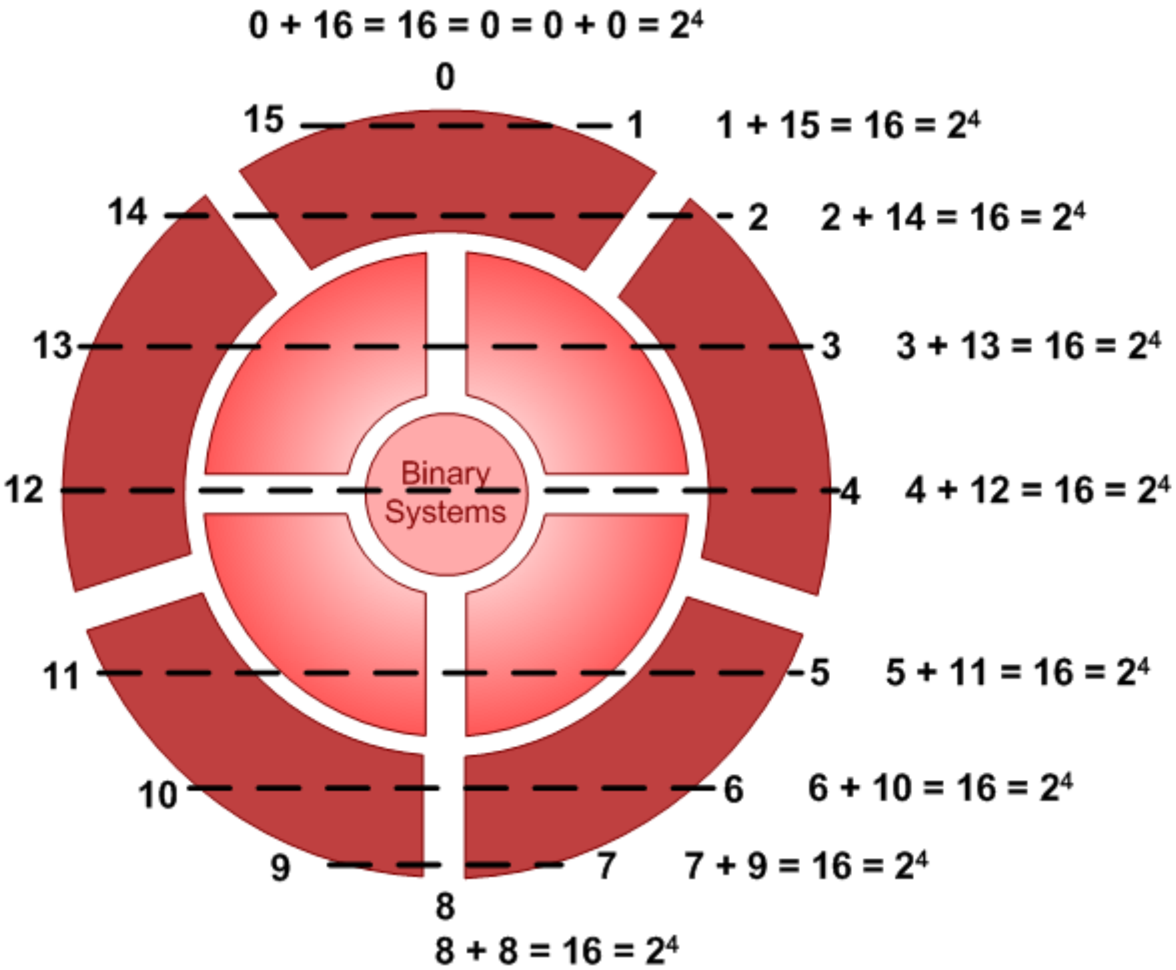
3) Μετατροπή από 8-αδικό/16-αδικό σε δυαδικό:

    Αντικαθιστούμε κάθε ψηφίο με τον αντίστοιχο 3-ψήφιο/4-ψήφιο δυαδικό αριθμό.

4) Μετατροπή από δυαδικό σε 8-αδικό/16-αδικό:

    Ομαδοποιούμε τα δυαδικά ψηφία σε τριάδες/τετράδες και αντικαθιστούμε κάθε μία με το αντίστοιχο ψηφίο του 8-/16-αδικού.

Συμπληρώματα ως προς Βάση



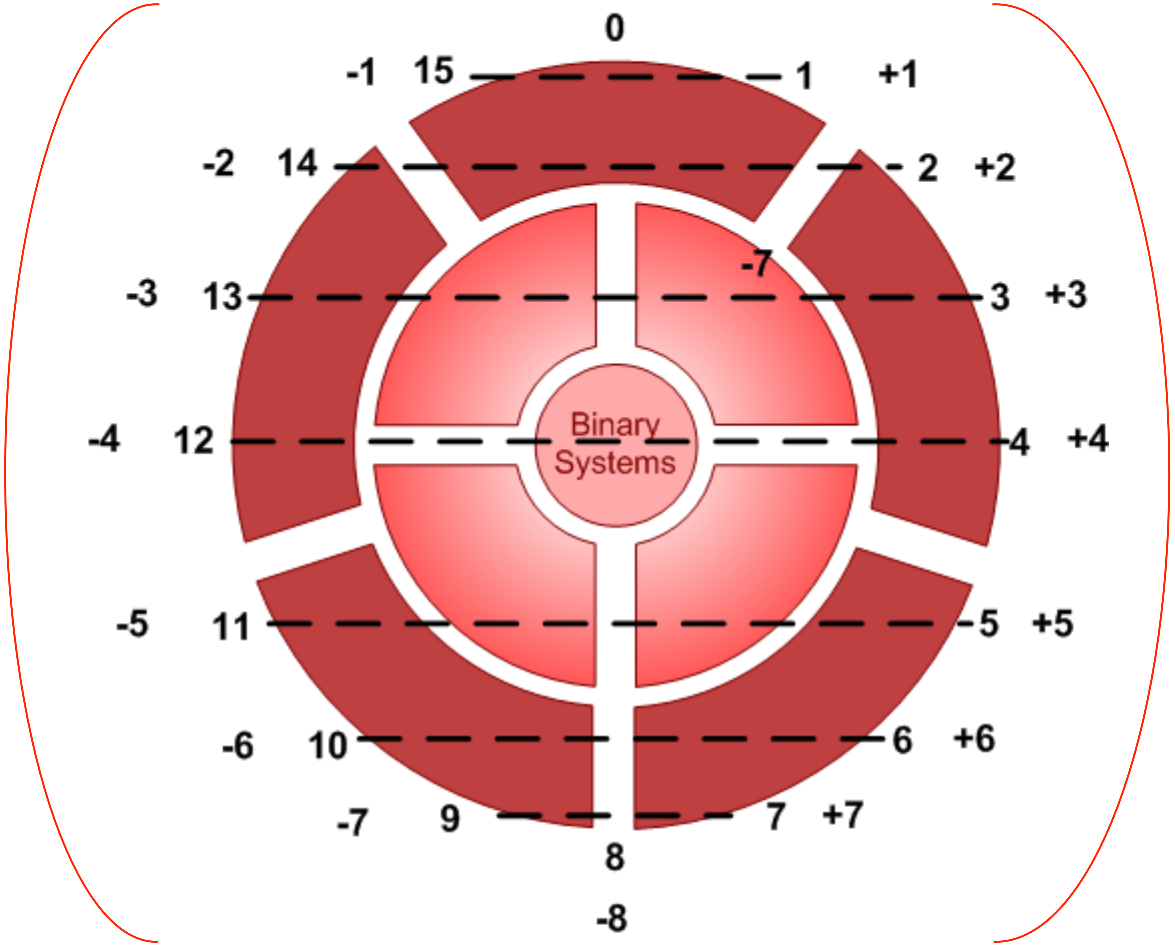
Όλοι οι αριθμοί που βρίσκονται σε μορφή συμπληρώματος ως προς βάση αθροίζονται στην τιμή $2^n = 0$

$$A + A_{2s} = 0$$

$$A = -A_{2s}$$

Αντίθετοι αριθμοί

Αρνητικοί αριθμοί



Θετικοί αριθμοί

Αναπαραστάσεις Αριθμών

Decimal	Signed-2's Complement	Signed-1's Complement	Signed Magnitude
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
−0	—	1111	1000
−1	1111	1110	1001
−2	1110	1101	1010
−3	1101	1100	1011
−4	1100	1011	1100
−5	1011	1010	1101
−6	1010	1001	1110
−7	1001	1000	1111
−8	1000	—	—

Binary-Coded Decimal Code

Ο κώδικας BCD είναι δεκαδικός κώδικας:

μετατρέπει έναν δυαδικό σε έναν δεκαδικό αριθμό για επικοινωνία με τον άνθρωπο

Binary-Coded Decimal (BCD)

Decimal Symbol	BCD Digit
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

5 8 1

Decimal: 581

BCD: 0101 1000 0001

Binary: 1001000101

Οι αχρησιμοποίητοι συνδυασμοί οδηγούν σε μεγαλύτερες αναπαραστάσεις σε BCD

Κώδικας Gray

Οι διαδοχικοί αριθμοί στον κώδικα gray μεταβάλλονται κατά ένα μόνο bit.

Χρησιμοποιείται όταν κατά τη μετάδοση η μετάβαση γίνεται σε *γειτονικούς* αριθμούς και θέλουμε να μειώσουμε την αβεβαιότητα κατά την εναλλαγή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-4
Κώδικας Gray τεσσάρων bits

Κώδικας Gray	Ισοδύναμος δεκαδικός
0000	0
0001	1
0011	2
0010	3
0110	4
0111	5
0101	6
0100	7
1100	8
1101	9
1111	10
1110	11
1010	12
1011	13
1001	14
1000	15

Κώδικες Ανίχνευσης Σφαλμάτων

Τα φυσικά μέσα μετάδοσης επηρεάζονται από θόρυβο και προκαλούν λάθη. Για αυτό χρησιμοποιούνται οι κώδικες ανίχνευσης σφαλμάτων (π.χ. parity bits).

Η μέθοδος ισοτιμίας ανιχνεύει περιττό αριθμό λαθών

ΠΙΝΑΚΑΣ 1-3
Bit ισοτιμίας

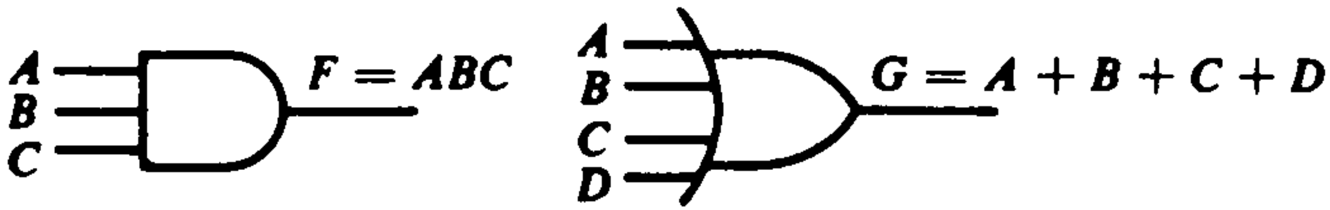
Περιττή Ισοτιμία		Άρτια ισοτιμία	
Μήνυμα	P	Μήνυμα	P
0000	1	0000	0
0001	0	0001	1
0010	0	0010	1
0011	1	0011	0
0100	0	0100	1
0101	1	0101	0
0110	1	0110	0
0111	0	0111	1
1000	0	1000	1
1001	1	1001	0
1010	1	1010	0
1011	0	1011	1
1100	1	1100	0
1101	0	1101	1
1110	0	1110	1
1111	1	1111	0

Λογικές Πύλες

(α) Πύλη ΚΑΙ (AND) δύο εισόδων

(β) Πύλη Ή (OR) δύο εισόδων

(γ) Πύλη ΟΧΙ (NOT) ή αντιστροφέας



(δ) Πύλη ΚΑΙ τριών εισόδων

(ε) Πύλη Ή τεσσάρων εισόδων

Βασικά θεωρήματα και ιδιότητες

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1
Αξιώματα και θεωρήματα της άλγεβρας Boole

Αξίωμα 2	(a) $x + 0 = x$	(b) $x \cdot 1 = x$
Αξίωμα 5	(a) $x + x' = 1$	(b) $x \cdot x' = 0$
Θεώρημα 1	(a) $x + x = x$	(b) $x \cdot x = x$
Θεώρημα 2	(a) $x + 1 = 1$	(b) $x \cdot 0 = 0$
Θεώρημα 3, (δύο αρνήσεις)	$(x')' = x$	
Αξίωμα 3, αντιμεταθετική	(a) $x + y = y + x$	(b) $xy = yx$
Θεώρημα 4, προσεταιριστική	(a) $x + (y + z) = (x + y) + z$	(b) $x(yz) = (xy)z$
Αξίωμα 4, επιμεριστική	(a) $x(y + z) = xy + xz$	(b) $x + yz = (x + y)(x + z)$
Θεώρημα 5, De Morgan	(a) $(x + y)' = x'y'$	(b) $(xy)' = x' + y'$
Θεώρημα 6, απορρόφηση	(a) $x + xy = x$	(b) $x(x + y) = x$

Τα θεωρήματα αποδεικνύονται:
(α) με χρήση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί, ή
(β) με τη βοήθεια των πινάκων αλήθειας

Συναρτήσεις Boole

Συνάρτηση: Έκφραση από δυαδικές μεταβλητές, τους δύο δυαδικούς τελεστές Η και ΚΑΙ, τον τελεστή ΌΧΙ, παρενθέσεις και ένα ίσον.

$F_1 = x + y'z$ είναι αληθής (1) μόνο αν (x=1) ή (y=0 και z=1).

Πίνακας Αλήθειας

n

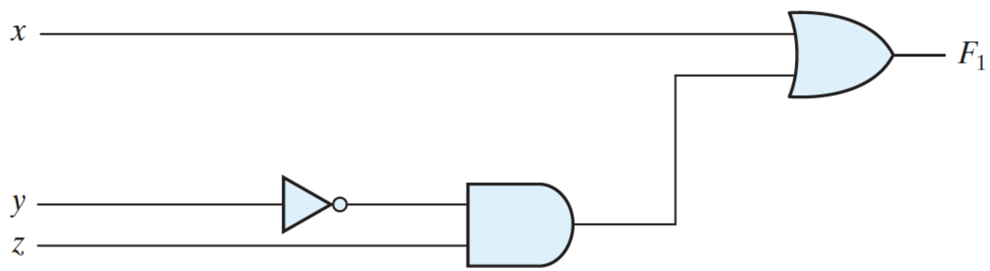
2^n συνδυασμοί σε αύξουσα δυαδική αρίθμηση

x	*y*	*z*	F_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Αλγεβρική έκφραση

$F_1 = x + y'z$

Κυκλωματικη Υλοποίηση



Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι

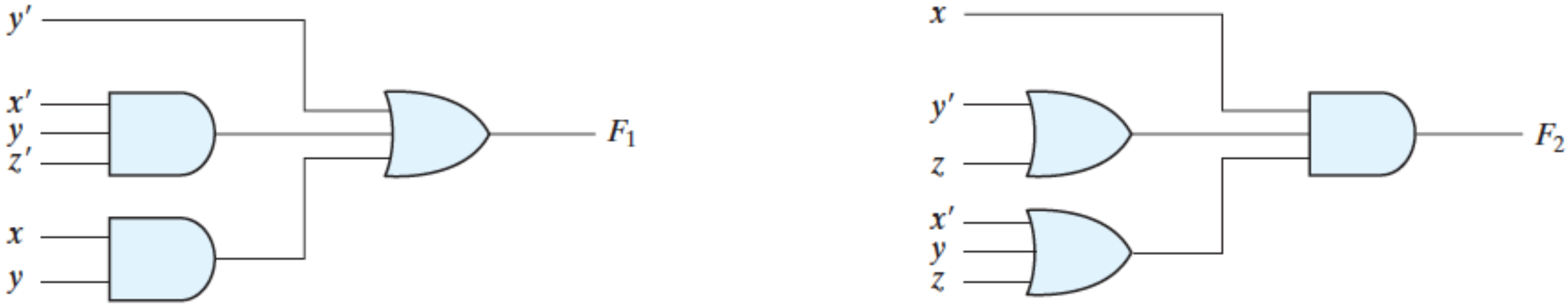
			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
x	y	z	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x+y+z'$	M_1
0	1	0	$x'yz'$	m_2	$x+y'+z$	M_2
0	1	1	$x'yz$	m_3	$x+y'+z'$	M_3
1	0	0	$xy'z'$	m_4	$x'+y+z$	M_4
1	0	1	$xy'z$	m_5	$x'+y+z'$	M_5
1	1	0	xyz'	m_6	$x'+y'+z$	M_6
1	1	1	xyz	m_7	$x'+y'+z'$	M_7

Για n μεταβλητές έχουμε 2^n ελαχιστόρους και μεγιστόρους. Οι μεταβλητές έχουν ανεστραμένες τιμές στους αντίστοιχους ελαχιστόρους / μεγιστόρους

Κάθε ελαχιστόρος είναι το συμπλήρωμα του αντίστοιχου μεγιστόρου και αντίστροφα, π.χ. $m_0=x'y'z'$, $M_0=x+y+z$

Υλοποίηση Δύο Επιπέδων

Οι συναρτήσεις σε πρότυπη μορφή υλοποιούνται σε δύο επίπεδα λογικής

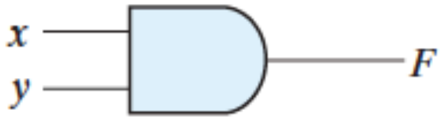


(a) Sum of Products (b) Product of Sums

Η απλοποίηση κυκλωμάτων δύο επιπέδων αποτελεί έναν από τους βασικότερους στόχους της Ψηφιακής Σχεδίασης

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

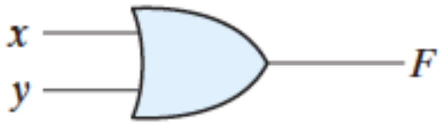
AND



$F = x \cdot y$

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

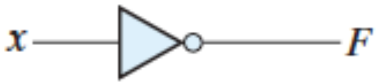
OR



$F = x + y$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Inverter



$F = x'$

x	F
0	1
1	0

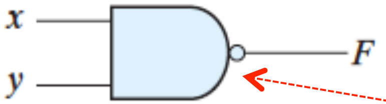
Buffer

$F = x$

x	F
0	0
1	1

Ψηφιακές Λογικές Πύλες

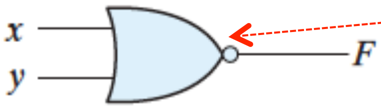
NAND



$F = (xy)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

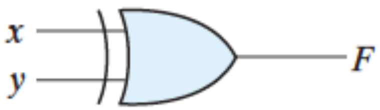
NOR



$F = (x + y)'$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

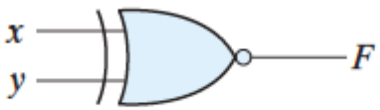
Exclusive-OR (XOR)



$$F = xy' + x'y = x \oplus y$$

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exclusive-NOR or equivalence



$$F = xy + x'y' = (x \oplus y)'$$

x	y	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Η φυσσαλίδα δείχνει συμπλήρωση

Χάρτης Τριών (3) Μεταβλητών

Ο χάρτης περιέχει 8 τετράγωνα, ένα για κάθε ελαχιστόρο.

Οι ελαχιστόροι τοποθετούνται σε σειρά όμοια με τον κώδικα Gray.

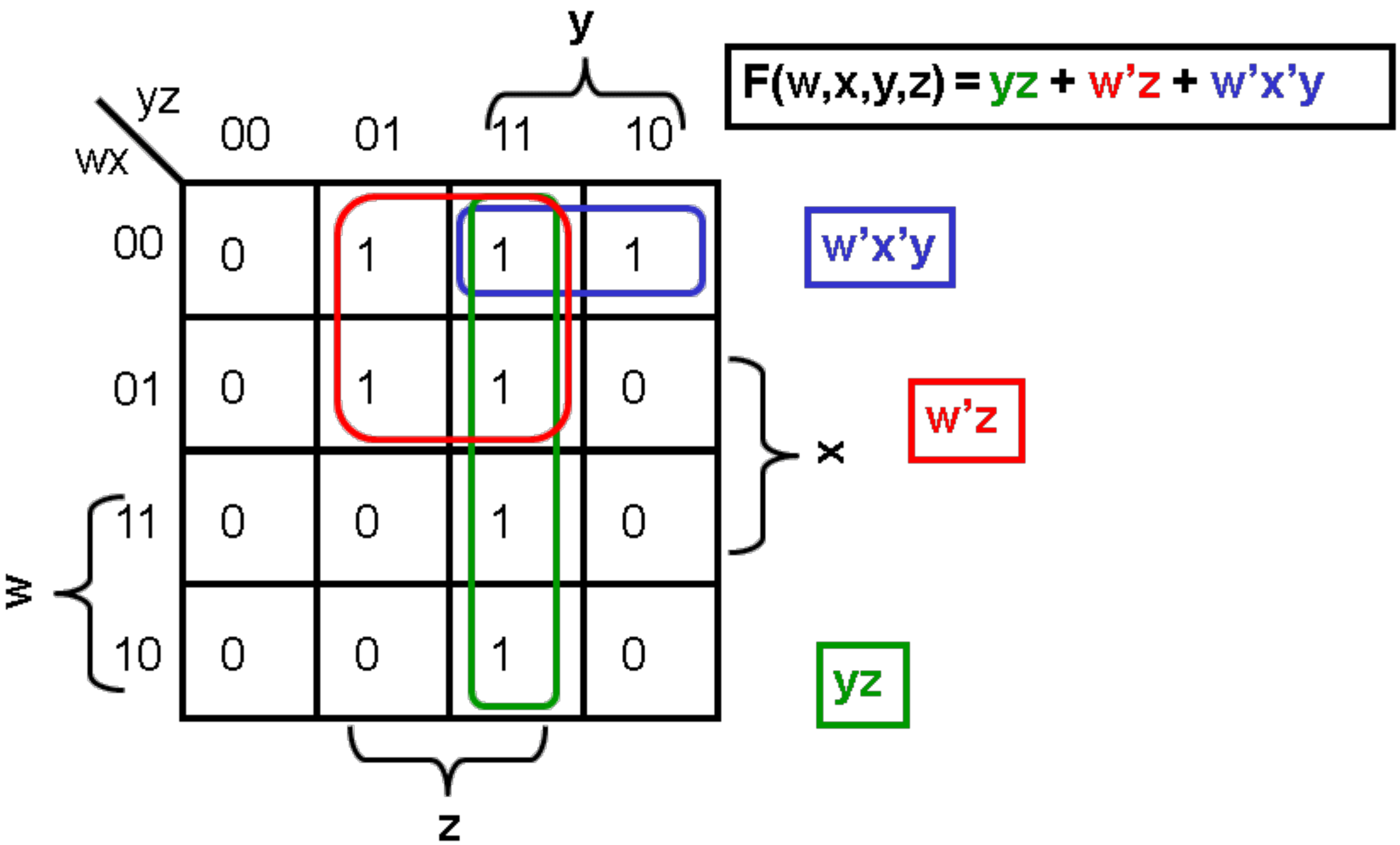
x	y	z	
0	0	0	m_0
0	0	1	m_1
0	1	0	m_2
0	1	1	m_3
1	0	0	m_4
1	0	1	m_5
1	1	0	m_6
1	1	1	m_7

	00	01	11	10
0	m_{000}	m_{001}	m_{011}	m_{010}
1	m_{100}	m_{101}	m_{111}	m_{110}

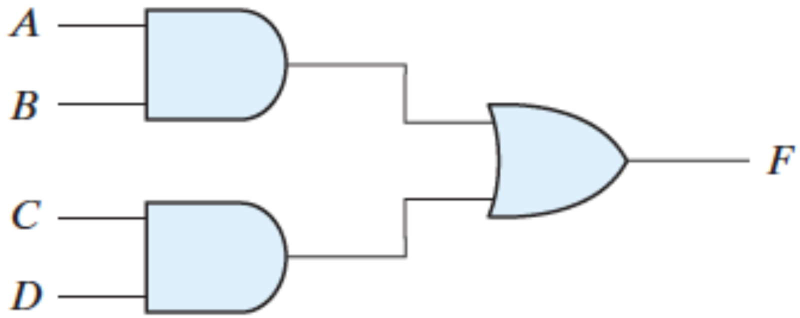
	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

Κώδικας Gray

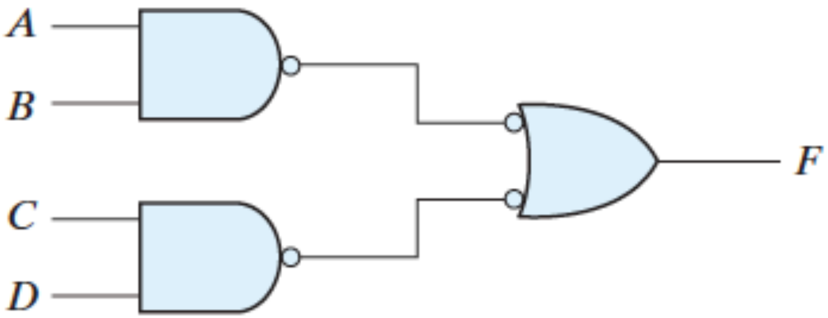
Χάρτης Τεσσάρων (4) Μεταβλητών



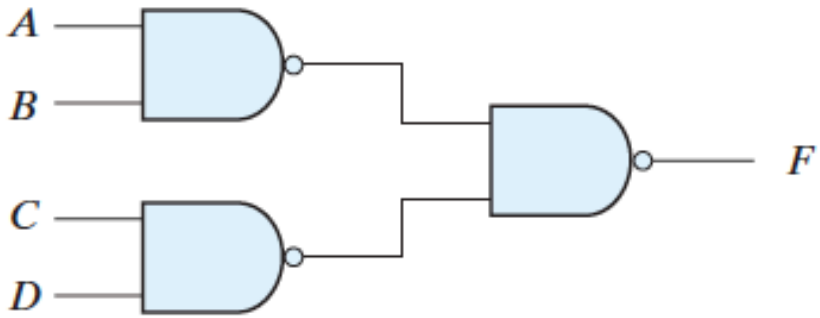
Υλοποίηση με πύλες ΌΧΙ-ΚΑΙ



(a)



(b)



(c)

Συνθήκες Αδιαφορίας

Συμβολίζονται με × και αντιστοιχούν σε συνδυασμούς εισόδων που δεν ορίζονται για μία συνάρτηση.

Π.χ. F(w,x,y,z)=Σ(1,3,7,11,15) με συνθήκες αδιαφορίας d(w,x,y,z)=Σ(0,2,5)

wx \ yz	00	01	11	10
00	×	1	1	×
01	0	×	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

F = yz + w′x′ = Σ(<u>0</u>,1,<u>2</u>,3,7,11,15)

wx \ yz	00	01	11	10
00	×	1	1	×
01	0	×	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

F = yz + w′z = Σ(1,3,<u>5</u>,7,11,15)

Οι αδιάφοροι όροι μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως άσσοι ή μηδενικά ανάλογα με την απλοποίηση που οδηγεί στο μικρότερο κύκλωμα.

Η Συνάρτηση Αποκλειστικό Ή

Αποκλειστικό Ή (XOR) *Σχ. Αντιστρ.* Αποκλειστικό ΟΥΤΕ (XNOR)

$x \oplus y = x'y + xy'$ $\Longleftrightarrow$ $(x \oplus y)' = xy + x'y'$

- Ιδιότητες:

$$x \oplus 0 = x \qquad x \oplus 1 = x'$$

$$x \oplus x = 0 \qquad x \oplus x' = 1$$

$$x \oplus y' = (x \oplus y)' \qquad x' \oplus y = (x \oplus y)'$$

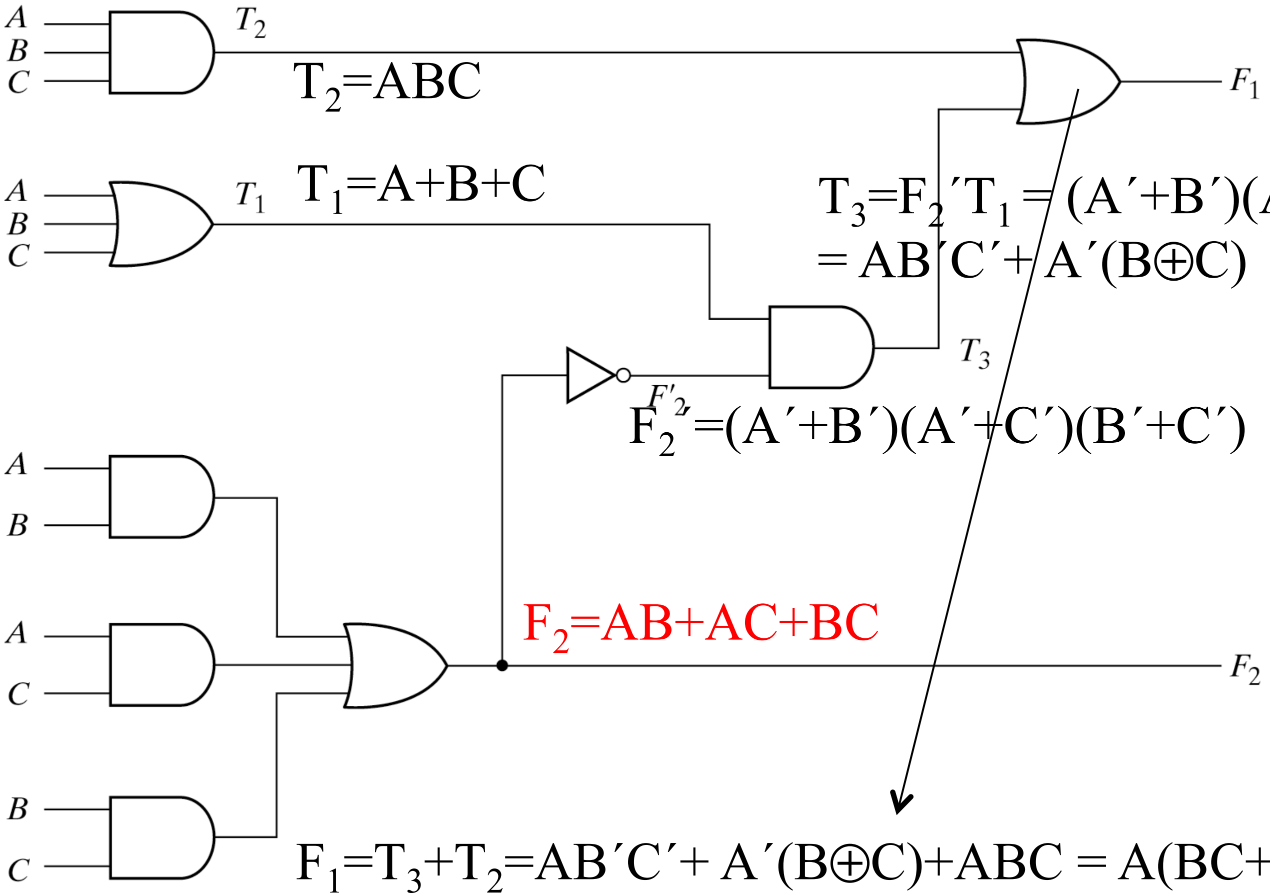
- Η πράξη XOR είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική:

$$A \oplus B = B \oplus A$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C = A \oplus B \oplus C$$

- Δεν φτιάχνονται συχνά πύλες XOR με περισσότερες από 2 εισόδους.

Ανάλυση Συνδυαστικού Κυκλώματος



$T_2 = ABC$

$T_1 = A+B+C$

$T_3 = F_2'T_1 = (A'+B')(A'+C')(B'+C')(A+B+C)$
$= AB'C' + A'(B \oplus C)$

$F_2' = (A'+B')(A'+C')(B'+C')$

$F_2 = AB+AC+BC$

$F_1 = T_3+T_2 = AB'C' + A'(B \oplus C) + ABC = A(BC+B'C') + A'(B \oplus C) =$

$A(B \oplus C)' + A'(B \oplus C) = A \oplus B \oplus C$

Σχεδιασμός Συνδυαστικών Κυκλωμάτων

Κριτήρια Επιλογής Απλοποιημένης Έκφρασης

1. Ελάχιστος αριθμός πυλών.
2. Ελάχιστος αριθμός εισόδων πύλης.
3. Ελάχιστο χρόνο διάδοσης σήματος.
4. Ελάχιστος αριθμός διασυνδέσεων.
5. Περιορισμοί ικανότητας οδήγησης.

Παρακάτω θα δούμε μερικά ευρέως χρησιμοποιούμενα συνδυαστικά κυκλώματα