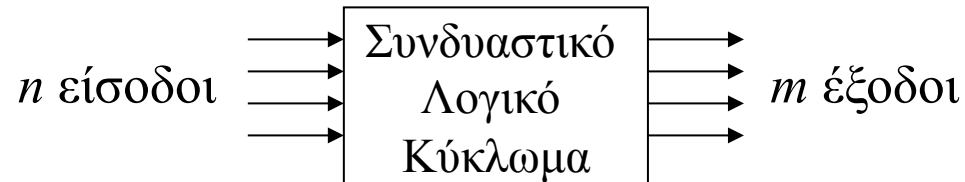

4^η Θεματική Ενότητα : Συνδυαστική Λογική

Επιμέλεια διαφανειών:
Χρ. Καβουσιανός

Λογικά Κυκλώματα

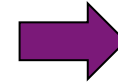
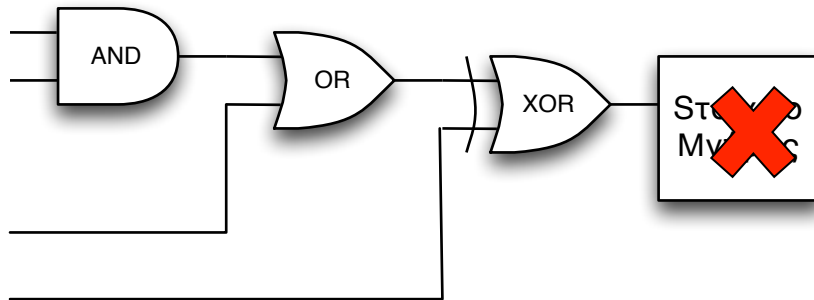
- Τα λογικά κυκλώματα διακρίνονται σε συνδυαστικά (combinational) και ακολουθιακά (sequential).
- Τα συνδυαστικά περιέχουν μόνο συνδυαστικές λογικές πύλες, ενώ τα ακολουθιακά περιέχουν επιπλέον και στοιχεία μνήμης.
- Συνδυαστικά κυκλώματα: Οι έξοδοι σε κάθε χρονική στιγμή είναι συνάρτηση των εισόδων εκείνης της χρονικής στιγμής και μόνο.
- Ακολουθιακά κυκλώματα: Οι έξοδοι είναι συνάρτηση των εισόδων εκείνης της χρονικής στιγμής, όπως επίσης και της κατάστασης των στοιχείων μνήμης, η οποία είναι συνάρτηση των προηγούμενων εισόδων.

Συνδυαστικά Κυκλώματα

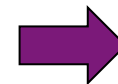
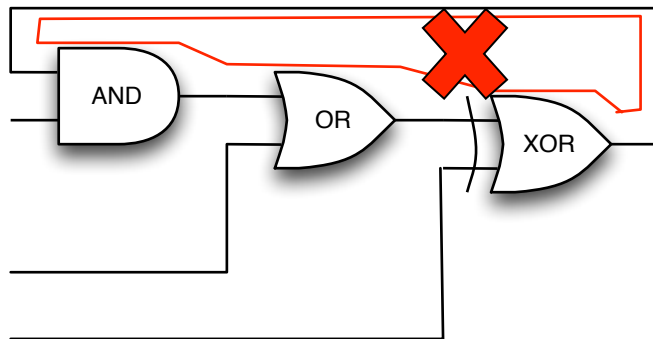


- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα αποτελείται από μεταβλητές εισόδου, λογικές πύλες και μεταβλητές εξόδου.
- Για κάθε έναν από τους 2^n πιθανούς συνδυασμούς δυαδικών τιμών στις εισόδους υπάρχει **ένας και μόνο ένας** συνδυασμός δυαδικών τιμών στις εξόδους.
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα περιγράφεται με m συναρτήσεις Boole n μεταβλητών, μία συνάρτηση για κάθε μεταβλητή εξόδου.
- Κάθε μεταβλητή εισόδου μπορεί να είναι διαθέσιμη με την κανονική ή/ και με τη συμπληρωματική μορφή της.

Συνδυαστικά Κυκλώματα



Τα στοιχεία μνήμης προσδίδουν ακολουθιακότητα στην λειτουργία των κυκλωμάτων



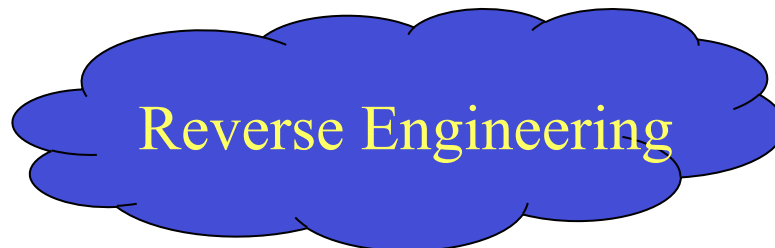
Οι αναδράσεις δημιουργούν εσωτερική μνήμη

Ανάλυση Συνδυαστικού Κυκλώματος

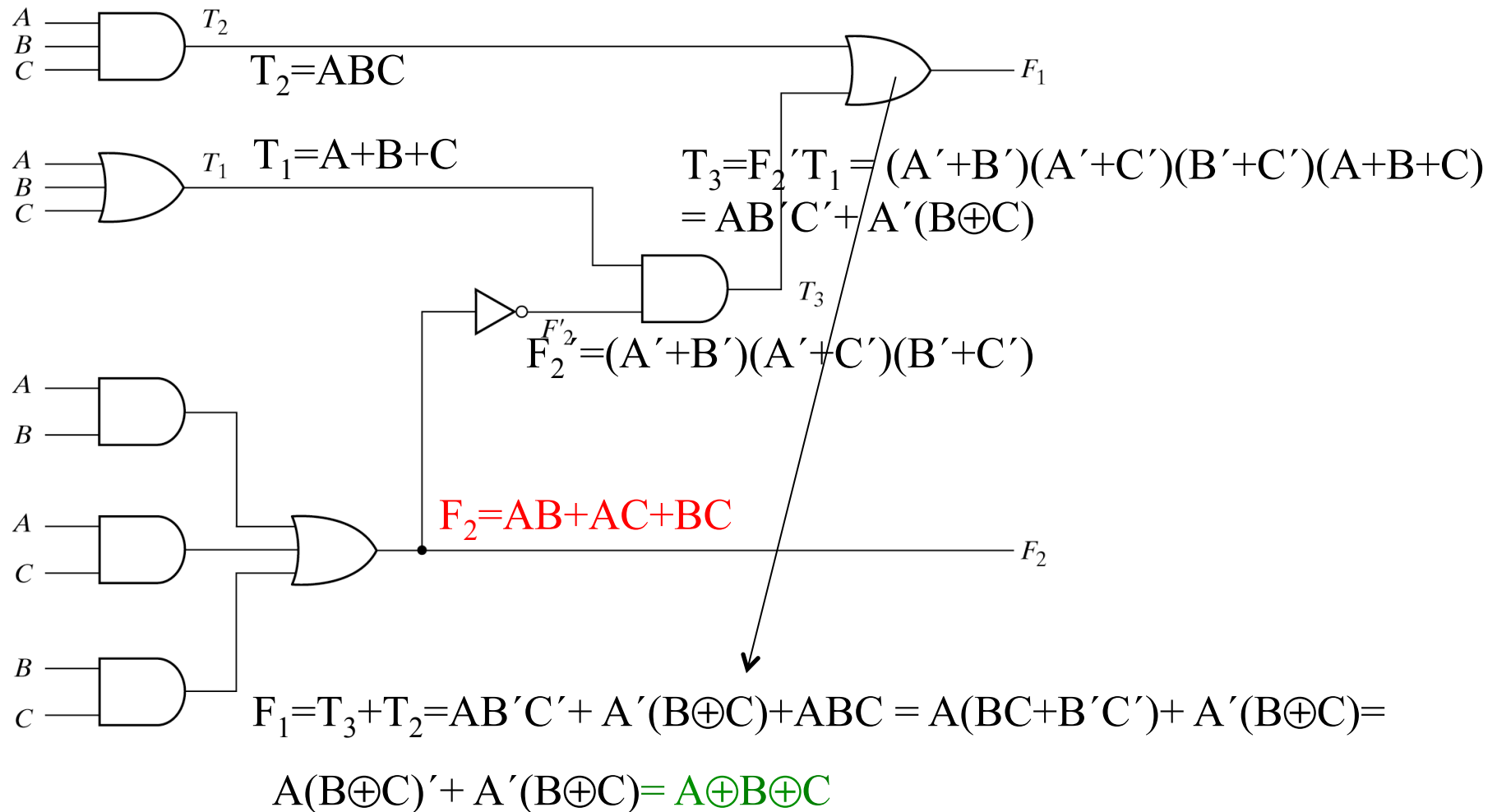
Πρόβλημα: Έχουμε ένα κύκλωμα και θέλουμε να εξάγουμε την συνάρτηση που υλοποιεί

Διαδικασία ανάλυσης

1. Ονομάζουμε τις εξόδους των πυλών του κυκλώματος.
2. Βρίσκουμε τις συναρτήσεις σε κάθε επίπεδο ξεκινώντας από το πρώτο, και φτάνοντας μέχρι το τελευταίο.



Ανάλυση Συνδυαστικού Κυκλώματος



Ανάλυση Συνδυαστικού Κυκλώματος

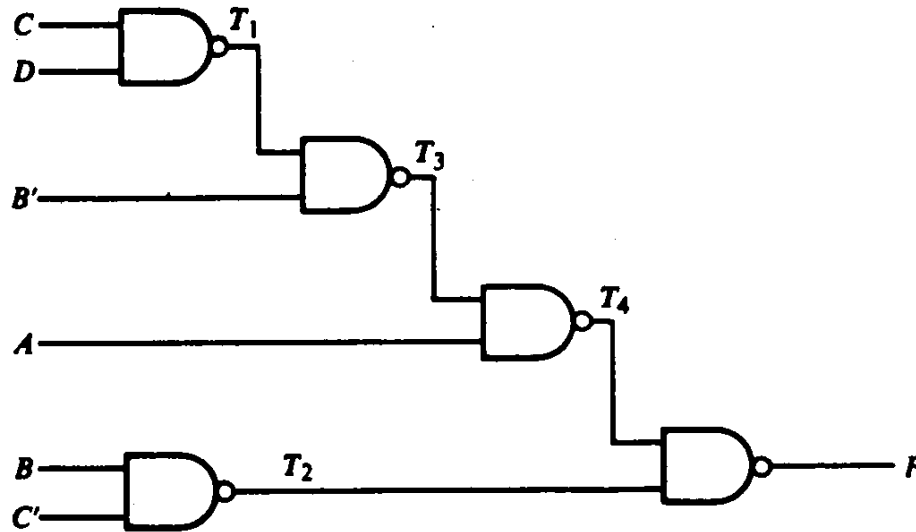
Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αλήθειας του κυκλώματος κατευθείαν από το λογικό διάγραμμα χωρίς να εξάγουμε τις συναρτήσεις Boole.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-2

Πίνακας Αληθείας του Λογικού Διαγράμματος του Σχήματος 4-9

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>F</i> ₂	<i>F</i> ₂ '	<i>T</i> ₁	<i>T</i> ₂	<i>T</i> ₃	<i>F</i> ₁
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1

Εξαγωγή Συνάρτησης και Πίνακα Αλήθειας



ΠΙΝΑΚΑΣ 4-3

Πίνακας αληθείας για το κύκλωμα του Σχήματος 4-13

A	B	C	D	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	F
0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0	1

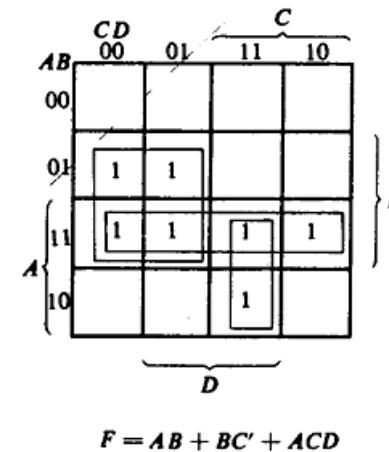
$$T_1 = (CD)' = C' + D'$$

$$T_2 = (BC')' = B' + C$$

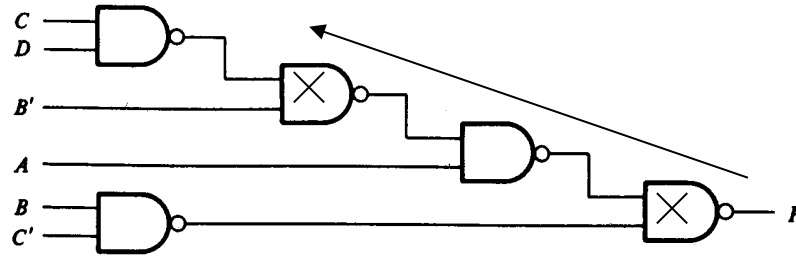
$$T_3 = (B'T_1)' = \dots = B + CD$$

$$T_4 = (AT_3)' = [A(B+CD)]'$$

$$F = (T_2T_4)' = \dots = BC' + A(B+CD)$$

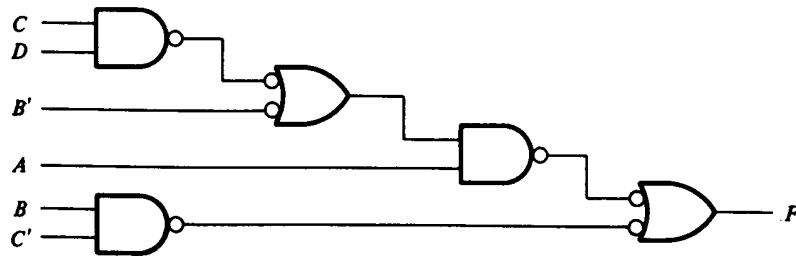


Μετασχηματισμός από ΟΧΙ-ΚΑΙ σε ΚΑΙ-Η

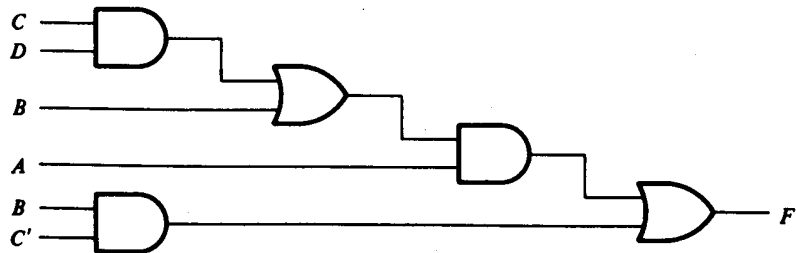


(α) Λογικό διάγραμμα ΟΧΙ-ΚΑΙ

Ξεκινάμε από το τελευταίο επίπεδο προς τα πίσω



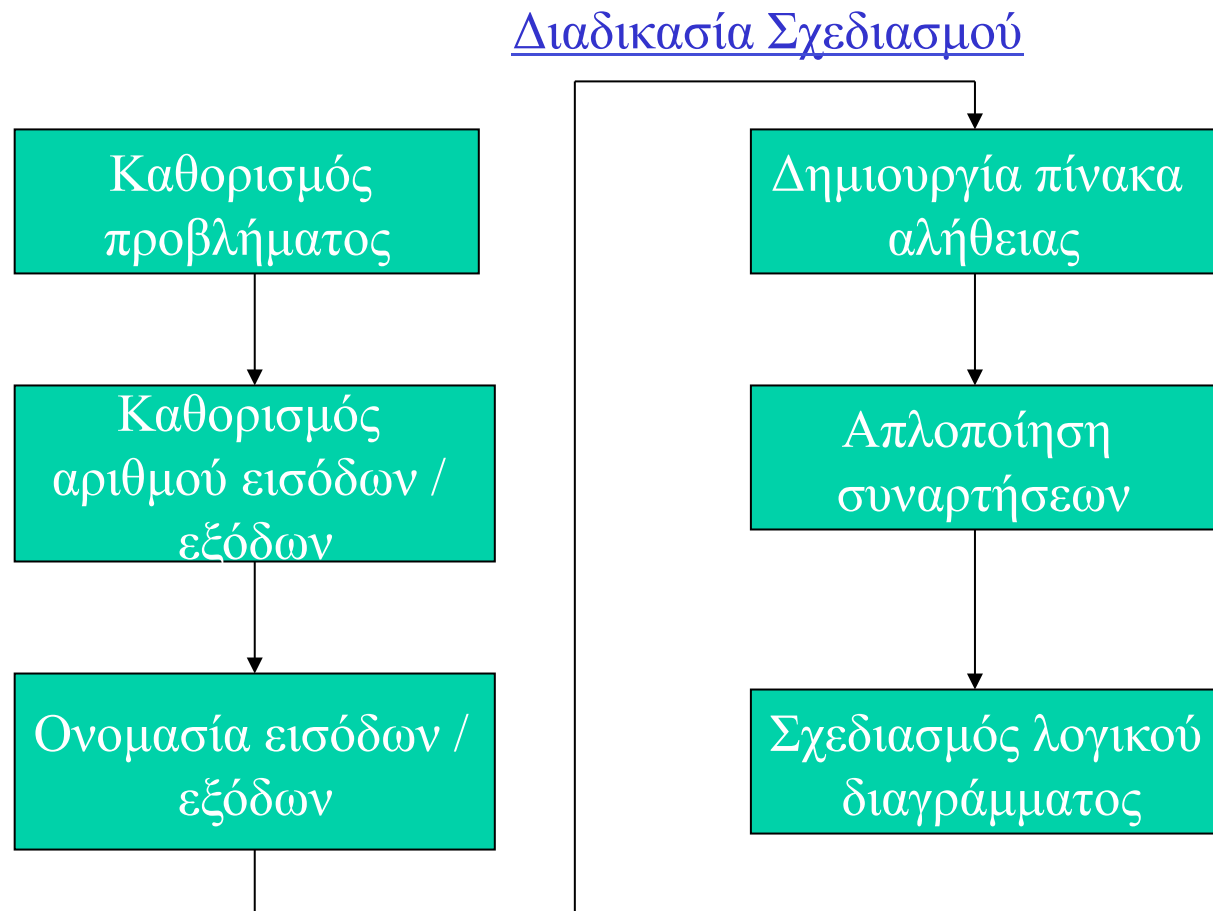
(β) Αντικατάσταση με σύμβολα αντιστροφή-Η, επίπεδο-παρά-επίπεδο



(γ) Λογικό διάγραμμα ΚΑΙ-Η


Αποφυγή Πολλαπλών Συμπληρωμάτων

Σχεδιασμός Συνδυαστικών Κυκλωμάτων



Σχεδιασμός Συνδυαστικών Κυκλωμάτων

Κριτήρια Επιλογής
Απλοποιημένης Έκφρασης

- 
- 1.Ελάχιστος αριθμός πυλών.
 - 2.Ελάχιστος αριθμός εισόδων πύλης.
 - 3.Ελάχιστο χρόνο διάδοσης σήματος.
 - 4.Ελάχιστος αριθμός διασυνδέσεων.
 - 5.Περιορισμοί ικανότητας οδήγησης.

Παρακάτω θα δούμε μερικά ευρέως χρησιμοποιούμενα συνδυαστικά κυκλώματα

Εφαρμογή: Μετατροπή Κωδίκων

- Η ύπαρξη πολλών κωδίκων οδηγεί στην ανάγκη μετατροπών ανάλογα με τη λειτουργία του κάθε συστήματος.
- Ένας μετατροπέας κωδίκων είναι ένα κύκλωμα που μετατρέπει πληροφορία από ένα κώδικα A σε ένα κώδικα B.
- Οι γραμμές εισόδου τροφοδοτούν το κύκλωμα με συνδυασμούς δυαδικών ψηφίων που ανήκουν στον κώδικα A.
- Οι γραμμές εξόδου παράγουν συνδυασμούς δυαδικούς ψηφίων που ανήκουν στον κώδικα B.
- Οι αχρησιμοποίητες καταστάσεις αποτελούν αδιάφορους όρους.

Παράδειγμα: Μετατροπή BCD σε Excess-3

ΠΙΝΑΚΑΣ 4-1

Πίνακας Αληθείας για το Παράδειγμα Μετατροπής Κώδικα

Είσοδος Κώδικας BCD				Έξοδος Κώδικας excess-3			
<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0

Οι καταστάσεις εισόδου από 1010 έως και 1111 αποτελούν αδιάφορες καταστάσεις καθώς δεν προκύπτουν ποτέ

Παράδειγμα: Μετατροπή BCD σε Excess-3

Χάρτες
μετατροπέα
κώδικα BCD σε
Excess-3.

		CD		C	
		00	01	11	10
A	00	1			1
	01	1			1
	11	X	X	X	X
	10	1		X	X

$z = D'$

		CD		C	
		00	01	11	10
A	00	1		1	
	01	1		1	
	11	X	X	X	X
	10	1		X	X

$y = CD + C'D'$

		CD		C	
		00	01	11	10
A	00		1	1	1
	01	1			
	11	X	X	X	X
	10		1	X	X

$X = B'C + B'D + BC'D'$

		CD		C	
		00	01	11	10
A	00				
	01		1	1	1
	11	X	X	X	X
	10	1	1	X	X

$w = A + BC + BD$

Παράδειγμα: Μετατροπή BCD σε Excess-3

Βέλτιστη υλοποίηση δύο επιπέδων

$$z=D' \quad y=CD+C'D' \quad x=B'C+B'D+BC'D' \quad w=A+BC+BD$$

Βελτιστοποίηση μεγέθους: υλοποίηση πολλαπλών επιπέδων

Μπορούμε να αλλάξουμε αλγεβρικά τις απλοποιημένες εκφράσεις με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε κοινές πύλες για 2 ή περισσότερες εξόδους.

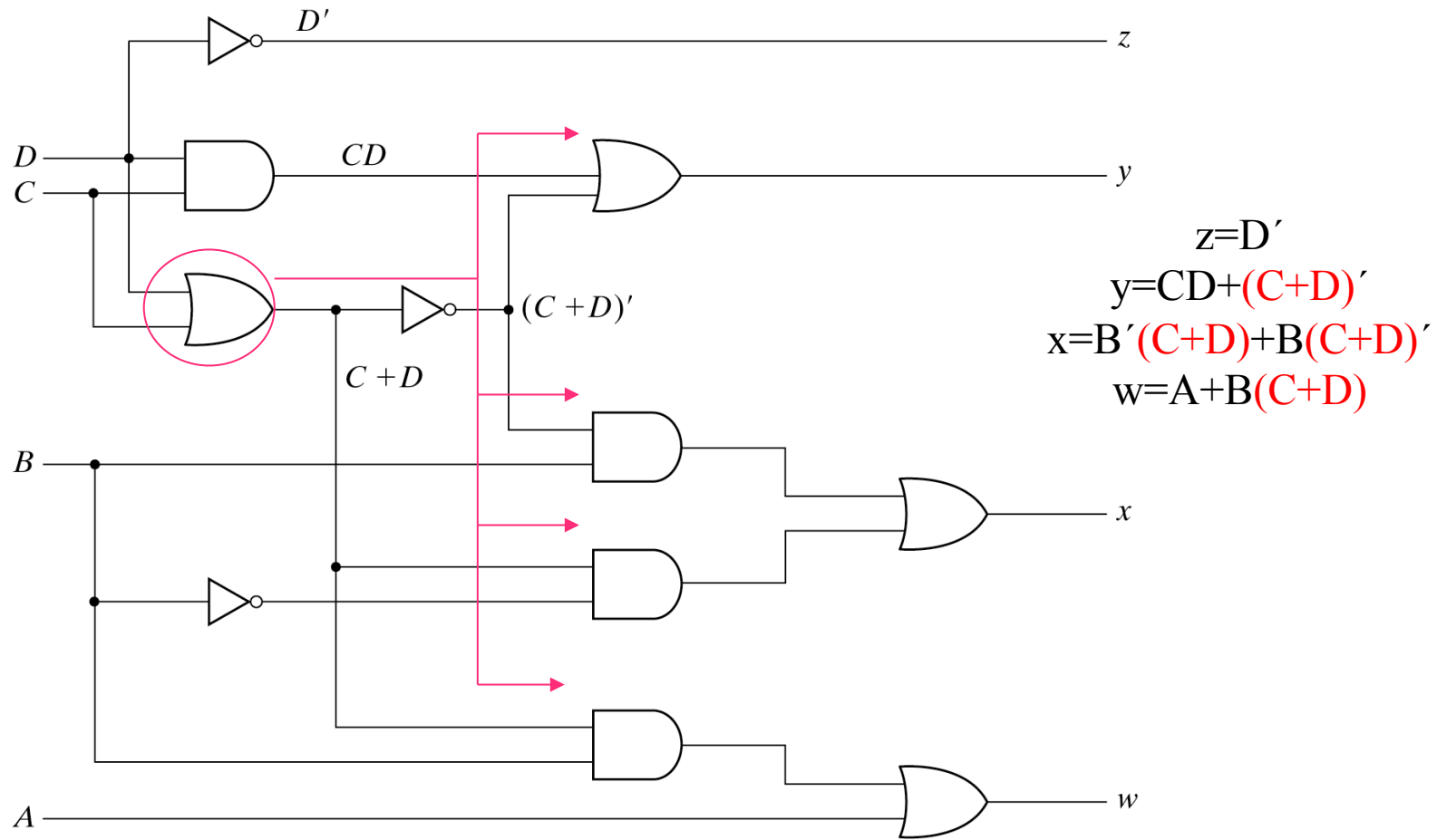
$$z=D'$$

$$y=CD+C'D'=CD+(C+D)'$$

$$x=B'C+B'D+BC'D'=B'(C+D)+BC'D'=B'(C+D)+B(C+D)'$$

$$w=A+BC+BD=A+B(C+D)$$

Παράδειγμα: Μετατροπή BCD σε Excess-3



Παράδειγμα

Σχεδιάστε συνδυαστικό κύκλωμα με τις λιγότερες λογικές πύλες το οποίο υλοποιεί την αριθμητική πράξη

$$Y = (Y_v Y_{v-1} \dots Y_1) = [(X-4)^2 - 3]$$

όπου X ένας τριψήφιος δυαδικός αριθμός ($X = X_3 X_2 X_1$).

Όταν η έξοδος έχει αρνητική τιμή δεν μας ενδιαφέρει να εμφανίζεται η σωστή ένδειξη.

Παράδειγμα

Τα τρία δυαδικά ψηφία X_3, X_2, X_1 του αριθμού εισόδου X αποτελούν τις εισόδους του κυκλώματος

Τα δυαδικά ψηφία του αριθμού εξόδου Y αποτελούν τις εξόδους του κυκλώματος

Υπάρχουν αδιάφορες καταστάσεις αφού «όταν η έξοδος έχει αρνητική τιμή δεν μας ενδιαφέρει να εμφανίζεται η σωστή ένδειξη»

Παράδειγμα

- Δεν είναι φανερός ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων του αριθμού εξόδου ($Y=Y_v Y_{v-1} \dots Y_1$).
- Μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, σχηματίζοντας τον πίνακα με τις τιμές των X, Y στο δεκαδικό σύστημα
- Οι τιμές του αριθμού X κυμαίνονται από 0 ως 7
- Οι τιμές του αριθμού εξόδου Y υπολογίζονται με βάση τη σχέση $Y = [(X-4)^2 - 3]$

X	0	1	2	3	4	5	6	7
Y	13	6	1	-2	-3	-2	1	6

Παράδειγμα

- Η μεγαλύτερη τιμή του Y είναι το 13, το οποίο απαιτεί 4 δυαδικά ψηφία για να αναπαρασταθεί στο δυαδικό σύστημα.
- Σύμφωνα με την εκφώνηση, όταν η έξοδος έχει αρνητική τιμή δεν μας ενδιαφέρει να εμφανίζεται η σωστή ένδειξη.
- Έτσι, ο αριθμός των δυαδικών ψηφίων του δυαδικού αριθμού εξόδου Y είναι $n=4$
- Το συνδυαστικό κύκλωμα που θα σχεδιάσουμε θα έχει τέσσερις (4) εξόδους Y_4, Y_3, Y_2, Y_1

Παράδειγμα

X_3	X_2	X_1	Y_4	Y_3	Y_2	Y_1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	X	X	X	X
1	0	0	X	X	X	X
1	0	1	X	X	X	X
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0

Δυαδική μετατροπή από το δεκαδικό

Οι αρνητικές τιμές είναι αδιάφορες

Δυαδική μετατροπή από το δεκαδικό

Παράδειγμα

- Σχηματίζουμε τους 4 χάρτες Karnaugh των τριών μεταβλητών, έναν για κάθε έξοδο.
- “Εκμεταλλευόμαστε” τους αδιάφορους όρους ώστε να προκύψουν από τους χάρτες Karnaugh οι μεγαλύτερες δυνατές γειτονιές με λογικές μονάδες

Παράδειγμα

Σχηματίζουμε τους 4 χάρτες Karnaugh των τριών μεταβλητών, έναν για κάθε έξοδο.

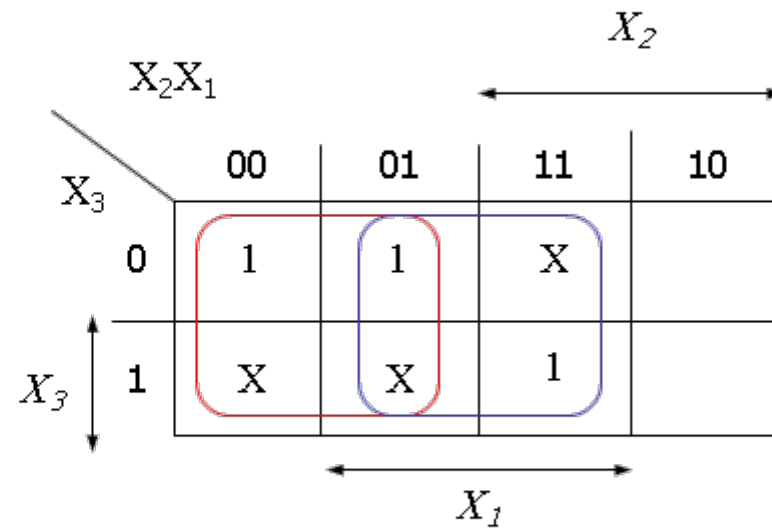
Ο χάρτης Karnaugh για την έξοδο Y_4 φαίνεται παρακάτω

		X_2X_1			
		00	01	11	10
X_3	0	1		X	
	1	X	X		

$$Y_4 = X_2' X_1'$$

Παράδειγμα

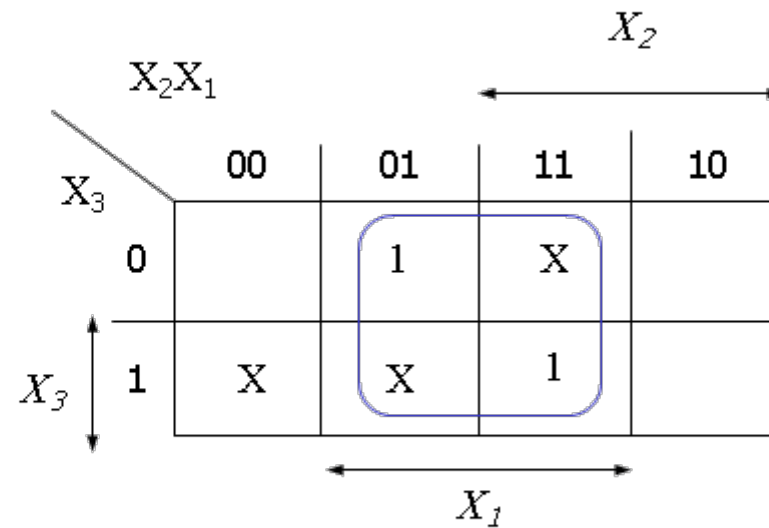
Ο χάρτης Karnaugh για την έξοδο Y_3 φαίνεται παρακάτω



$$Y_3 = X_2' + X_1$$

Παράδειγμα

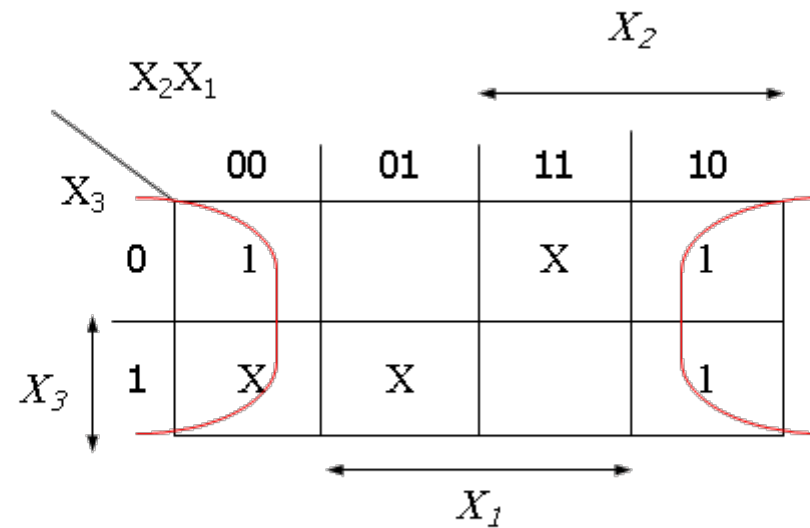
Ο χάρτης Karnaugh για την έξοδο Y_2 φαίνεται παρακάτω



$$Y_2 = X_1$$

Παράδειγμα

Ο χάρτης Karnaugh για την έξοδο Y_1 φαίνεται παρακάτω



$$Y_1 = X_1'$$

Παράδειγμα

- Με βάση τις απλοποιημένες συναρτήσεις που προέκυψαν σχεδιάζουμε το παρακάτω συνδυαστικό κύκλωμα.

$$Y_4 = X_2' X_1'$$

$$Y_3 = X_2' + X_1$$

$$Y_2 = X_1$$

$$Y_1 = X_1'$$

