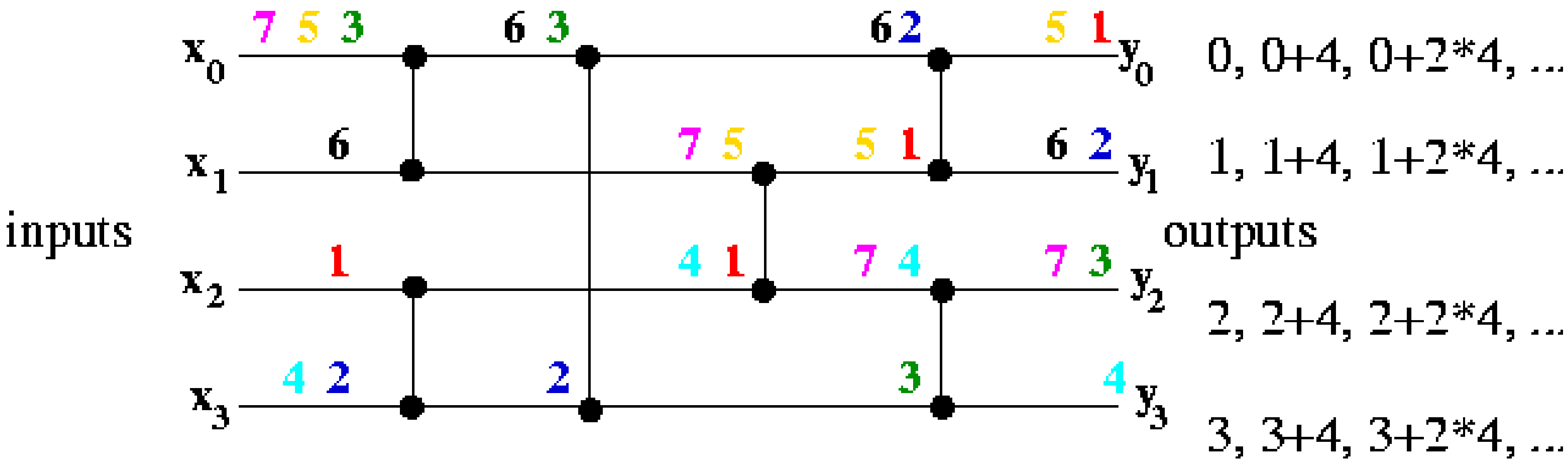
Δίκτυα Μέτρησης

Δίκτυα Εξισορρόπησης



κατάσταση εξισορροπητή (balancer state): συλλογή από διακριτικά (tokens) στους συνδέσμους εισόδου και εξόδου του

μετάβαση εξισορροπητή (balancer transition) (t,b): η αλλαγή κατάστασης που προκαλείται όταν το διακριτικό t περνά από κάποια είσοδο του t σε κάποια έξοδό του.

Μια *εκτέλεση* του δικτύου είναι μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία s_0, e_1, s_1, e_2, s_2, …, e_n, s_n, … από καταστάσεις και μεταβάσεις εξισορροπητών που εναλλάσσονται:

$\forall$ (s_i, e_{i+1}, s_{i+1}), η μετάβαση e_{i+1} οδηγεί από την κατάσταση s_i στην s_{i+1}

Δίκτυα Μέτρησης – Χρήσιμοι Ορισμοί & Χρήσιμα Λήμματα

Βάθος συνδέσμου x (wire depth, συμβολίζεται depth(x)): το βάθος ενός συνδέσμου που αποτελεί είσοδο στο δίκτυο = 0, ενώ το βάθος ενός συνδέσμου που είναι έξοδος ενός εξισορροπητή με εισόδους x0, x1 είναι max{depth(x0), depth(x1)}+1.

Βάθος δικτύου εξισορόπησης (depth of the balancing network, συμβολίζεται d): μέγιστο βάθος οποιουδήποτε συνδέσμου.

Λήμμα 1: Αν η μετάβαση ενός διακριτικού από την είσοδο στην έξοδο ενός εξισορροπητή απαιτεί χρόνο το πολύ Δ, τότε κάθε διακριτικό που εισέρχεται στο δίκτυο εξέρχεται αυτού σε χρόνο το πολύ Δ * d.

n = αριθμός διεργασιών στο σύστημα

w = πλάτος, μέγιστος αριθμός συνδέσμων εισόδου στους εξισορροπητές

Ένα **δίκτυο μέτρησης** ορίζεται να είναι ένα δίκτυο εξισορόπησης του οποίου οι έξοδοι y_0, … y_{w-1}, ικανοποιούν την ακόλουθη *βηματική ιδιότητα* (step property):

$$\textit{Σε κάθε μη-ενεργή κατάσταση, } 0 \leq y_i - y_j \leq 1, \textit{ για κάθε } i < j.$$

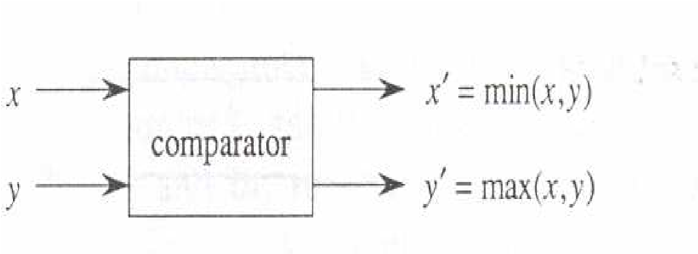
Δίκτυα Μέτρησης – Χρήσιμα Λήμματα

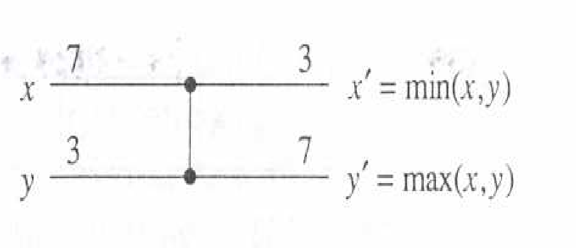
Λήμμα 2: Αν $y_0, \ldots, y_{w-1}$ είναι μια ακολουθία από μη-αρνητικούς ακεραίους, τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

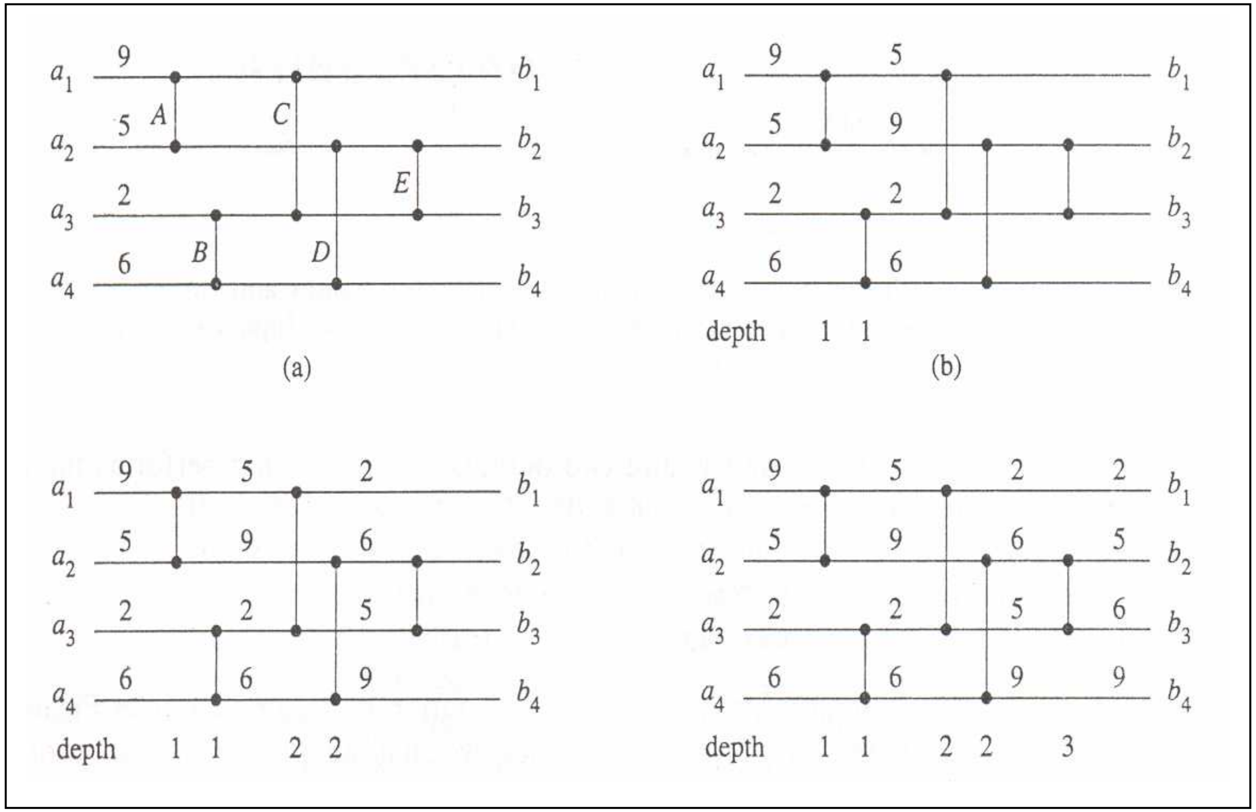
1. Για κάθε $i < j$, $0 \leq y_i - y_j \leq 1$.
2. Είτε $yi = yj$ για κάθε i,j ή υπάρχει κάποιος ακέραιος c τ.ω. για κάθε $i < c$ και $j \geq c$ ισχύει ότι $y_i - y_j = 1$.
3. Αν $m = \Sigma_{i=0}^{w-1} y_i$, τότε y_i = \ceil{(m-i)/w}

Λήμμα 3: Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια κατάσταση μιας εκτέλεσης ενός δικτύου μέτρησης, m διακριτικά έχουν εισέλθει στο δίκτυο και m′ έχουν εξέλθει αυτού. Τότε, υπάρχουν μη-αρνητικοί ακέραιοι d_i, $0 \leq i < w\text{-}1$, τ.ω. $\Sigma_{i=0}^{w-1} d_i = m - m'$ και $y_i + d_i$ = \ceil{(m-i)/w}.

Δίκτυα Σύγκρισης & Δίκτυα Μέτρησης







Ένα *δίκτυο ταξινόμησης* ορίζεται να είναι ένα δίκτυο σύγκρισης του οποίου η ακολουθία εξόδου είναι μονοτονικά αύξουσα για κάθε ακολουθία εισόδου.

Ένα δίκτυο εξισορρόπησης είναι *ισομορφικό* σε ένα δίκτυο σύγκρισης αν το ένα μπορεί να κατασκευαστεί από το άλλο με αντικατάσταση των συγκριτών από εξοσοροπητές και το αντίστροφο.

Μέτρηση έναντι Ταξινόμησης

Θεώρημα
Αν ένα δίκτυο εξισορόπησης μετράει, το ισομορφικό δίκτυο ταξινόμησης ταξινομεί, ενώ το αντίστροφο δεν είναι αλήθεια.

Απόδειξη
Κατασκευάζουμε μια απεικόνιση από τις μεταβάσεις του δικτύου σύγκρισης στις μεταβάσεις του ισομορφικού δικτύου εξισορόπησης.

Θεωρούμε μια αυθαίρετη ακολουθία από 0 και 1ως είσοδο στο δίκτυο σύγκρισης. Για το δίκτυο εξισορόπησης, τοποθετούμε ένα διακριτικό σε κάθε είσοδο της οποίας η αντίστοιχη στο δίκτυο σύγκρισης έχει 0 και δεν τοποθετούμε διακριτικά στις υπόλοιπες εισόδους (δηλαδή σε εκείνες που στο δίκτυο σύγκρισης έχουν 1).

$\Rightarrow$ Αν τρέξουμε και τα δύο δίκτυα επιτρέποντας σε κάθε ένα να κάνει από ένα μόνο βήμα κάθε φορά (in lockstep), τότε το δίκτυο εξισορόπησης θα προσομοιώσει το δίκτυο σύγκρισης.

Μέτρηση έναντι Ταξινόμησης

Απόδειξη (συνέχεια):

Με επαγωγή στο βάθος του δικτύου.

Βάση Επαγωγής: Ο ισχυρισμός ισχύει εξ κατασκευής.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για συνδέσμους που βρίσκονται στο επίπεδο k.

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για συνδέσμους που βρίσκονται στο επίπεδο k+1.

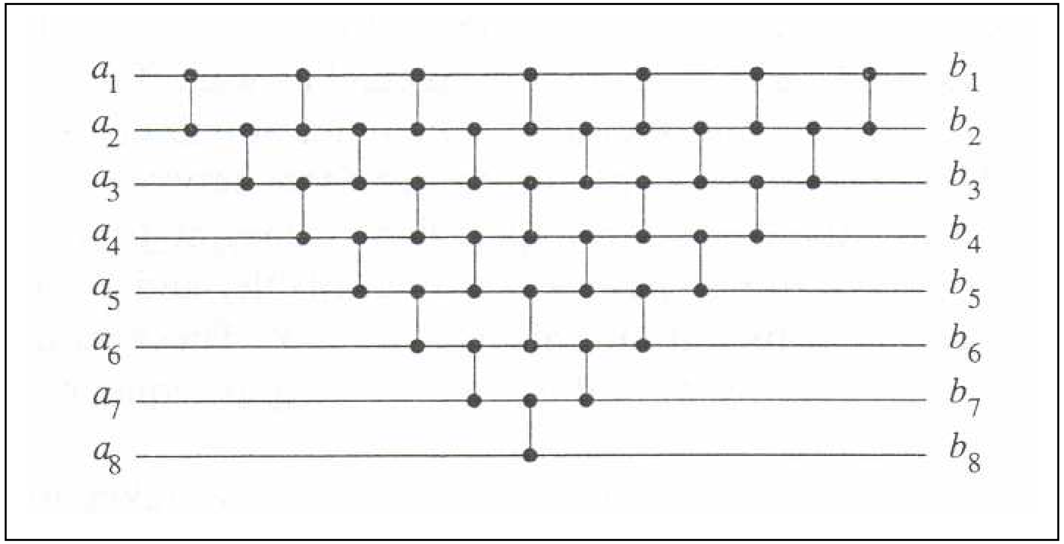
1. πύλες στις οποίες δύο 0 συναντιούνται.
2. πύλες στις οποίες δύο 1 συναντιούνται.
3. πύλες στις οποίες ένα 0 συναντιέται με έναν 1.

Αφού το δίκτυο ταξινόμησης έχει τη βηματική ιδιότητα $\Rightarrow$ το δίκτυο σύγκρισης ταξινομεί.

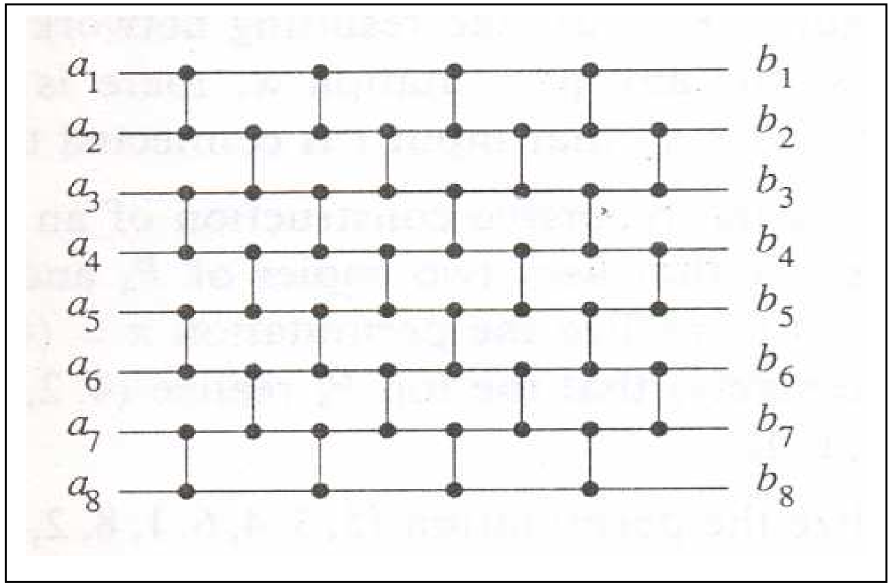
Αν ένα δίκτυο ταξινομεί όλες τις ακολουθίες από 0 και 1, τότε είναι δίκτυο ταξινόμησης. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι δίκτυα εξισορρόπησης με τοπολογία ισομορφική των δικτύων σύγκρισης EVEN-ODD και INSERTION δεν είναι δίκτυα μέτρησης.

Πόρισμα: Το βάθος οποιουδήποτε δικτύου μέτρησης είναι τουλάχιστον $\Omega(\log n)$.

Τα Δίκτυα Σύγκρισης INSERTION και EVEN-ODD



Το *δίκτυο* INSERTION



Το *δίκτυο* EVEN-ODD

Το δίκτυο Συγχωνευτής (Merger network)

Δίκτυο Εξισορρόπησης MERGER[w] πλάτους w: Αποτελείται από δύο ακολουθίες εισόδων x και x′ που η κάθε μια έχει μήκος w/2, και μια ακολουθία εξόδων y μήκους w.

Ας υποθέσουμε ότι το w είναι δύναμη του 2.

Επαγωγικός ορισμός

k = 1 $\Rightarrow$ MERGER[2k]: 1 εξισορροπητής με 2 εισόδους & 2 εξόδους

k > 1 $\Rightarrow$ MERGER[2k] με ακολουθίες εισόδου x και x′: αποτελείται από 2 δίκτυα MERGER[k] και k εξισορροπητές τ.ω.:

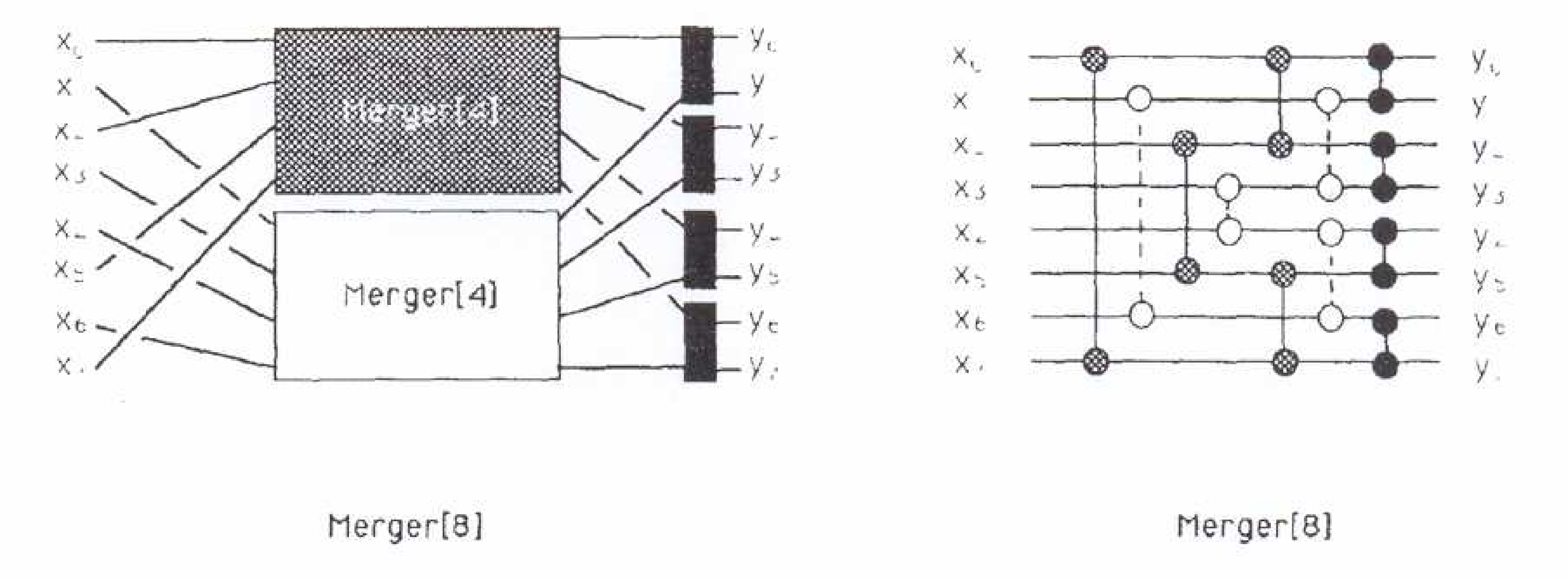
1ος MERGER[k]: συγχωνεύει την υπακολουθία εισόδων x_0, x_2, …, x_{k-2} του x με την x_1', x_3', …, x_{k-1}' του x′ (δηλαδή η ακολουθία εισόδου του 1ου MERGER[k] είναι x_0, x_2, …, x_{k-2}, x_3', …, x_{k-1}').

2ος MERGER[k]: συγχωνεύει την υπακολουθία εισόδων x_1, x_3, …, x_{k-1} του x με την x_0', x_2', …, x_{k-2}' του x′

z,z′: έξοδοι του MERGER[k]

Οι σύνδεσμοι z_i, z_i' αποτελούν τις εισόδους ενός εξισορροπητή του οποίου οι έξοδοι είναι y_{2i} και y_{2i+1}.

Το δίκτυο Συγχωνευτής – Παραδείγματα



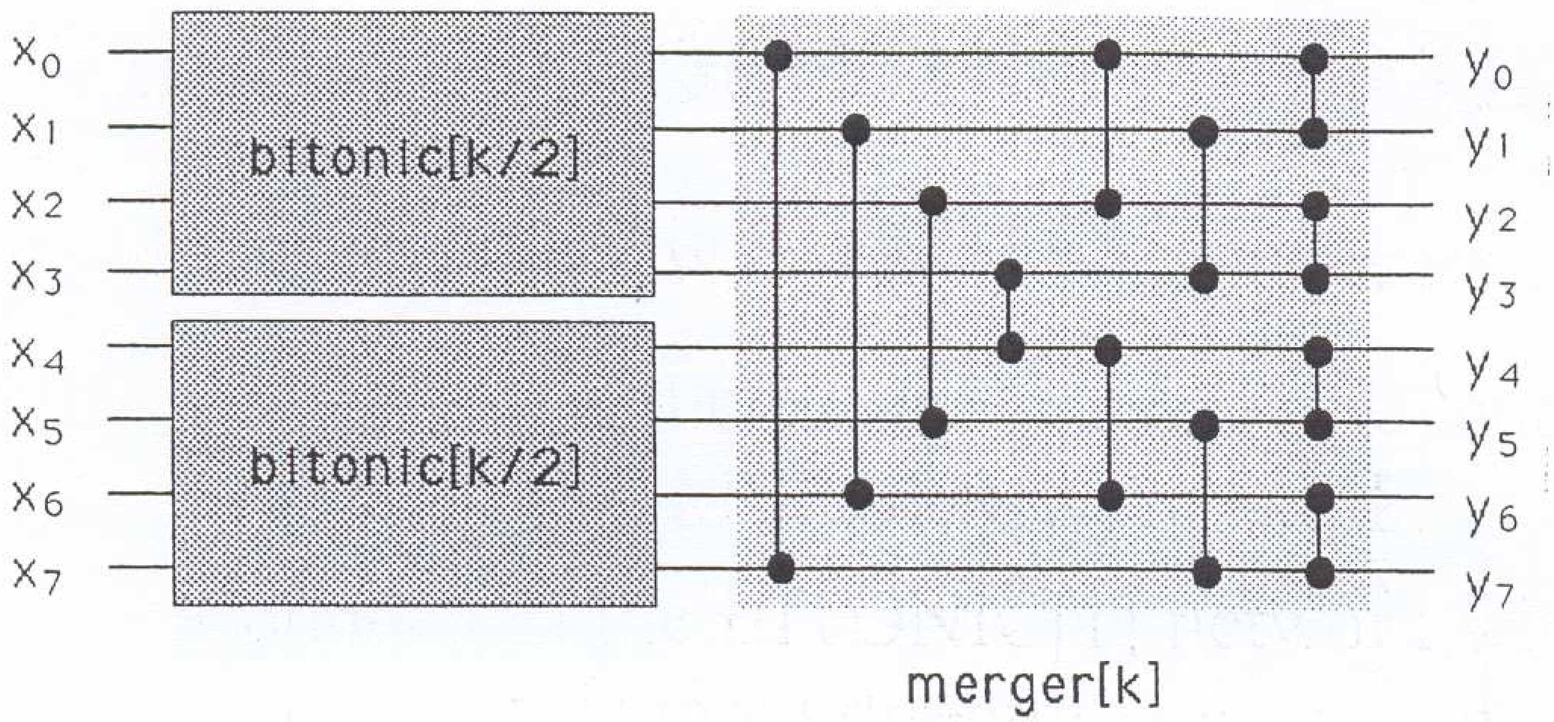
Το δίκτυο MERGER[8]

⇒ Το δίκτυο MERGER[w] αποτελείται από logw επίπεδα που το καθένα αποτελείται από w/2 εξισορροπητές.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC – Τοπολογία

BITONIC[w]: κατασκευάζεται επαγωγικά από δύο δίκτυα BITONIC[w/2] των οποίων οι έξοδοι αποτελούν τις εισόδους ενός δικτύου MERGER[w].

Στη βάση της επαγωγής, το δίκτυο BITONIC[1] δεν περιέχει κανένα εξισορροπητή -> οι είσοδοί του είναι απλά και έξοδοι.



Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Λήμμα 4: Αν μια ακολουθία έχει τη βηματική ιδιότητα, το ίδιο ισχύει και για όλες τις υπακολουθίες της.

Λήμμα 5: Αν η ακολουθία $x_0, \ldots, x_{k-1}$ έχει τη βηματική ιδιότητα, τότε ισχύουν τα εξής για την περιττή και την άρτια υπακολουθία της:

$$\Sigma_{i=0}^{k/2-1} x_{2i} = \text{\textbackslash ceil}\{\Sigma_{i=0}^{k-1} x_i/2\} \text{ και } \Sigma_{i=0}^{k/2-1} x_{2i+1} = \text{\textbackslash floor}\{\Sigma_{i=0}^{k-1} x_i/2\}.$$

Απόδειξη:

Το k είναι δύναμη του 2, δηλαδή άρτιος αριθμός.

1. Είτε $x_{2i} = x_{2i+1}$, για $0 \leq i < k/2$, ή
2. από το Λήμμα 2 υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος j τ.ω. $x_j = x_{j+1} + 1$ και $x_i = x_{i+1}$, για όλα τα $i \neq j$, $0 \leq i < k/2$.

Στην περίπτωση 1 $\Rightarrow \Sigma x_{2i} = \Sigma x_{2i+1} = \Sigma x_i/2$.

Στην περίπτωση 2 $\Rightarrow \Sigma x_{2i} = \text{\textbackslash ceil}\{\Sigma x_i/2\}$ και $\Sigma x_{2i+1} = \text{\textbackslash floor}\{\Sigma x_i/2\}$.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Λήμμα 6: Έστω ότι οι $x_0, \ldots, x_{k-1}$ *και* $y_0, \ldots, y_{k-1}$ είναι αυθαίρετες ακολουθίες που έχουν τη βηματική ιδιότητα. Αν $\sum_{i=0}^{k-1} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} y_i$, τότε $x_i = y_i$, για όλα τα i, $0 \leq i < k$.

Απόδειξη: Έστω $m = \Sigma\, x_i = \Sigma\, y_i$. Τότε, από Λήμμα 2 $\Rightarrow x_i = y_i =$ \ceil{(m-i)/k}.

Λήμμα 7: Έστω ότι οι $x_0, \ldots, x_{k-1}$ *και* $y_0, \ldots, y_{k-1}$ είναι αυθαίρετες ακολουθίες που έχουν τη βηματική ιδιότητα. Αν $\sum_{i=0}^{k-1} x_i = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} y_i$, τότε υπάρχει μοναδικός ακέραιος j, $0 \leq j < k$ τ.ω. $x_j = y_j+1$ *και* $x_i = y_i$, για *κάθε* $i \neq j$, $0 \leq i < k$.

Απόδειξη: Έστω $m = \Sigma\, x_i = 1+ \Sigma\, y_i$. Από Λήμμα 2, $x_i =$ \ceil{(m-i)/k} *και* $y_i =$ \ceil{(m-i-1)/k}.

Οι δύο αυτοί όροι είναι ίδιοι για όλα τα i, $0 \leq i < k$, εκτός από την τιμή $i = (m-1) \pmod k$.

Λήμμα 8: Αν ο MERGER[2k] είναι ανενεργός *και* οι ακολουθίες εισόδου του $x_0, \ldots, x_{k-1}$ *και* $x_0', \ldots, x_{k-1}'$ έχουν τη βηματική ιδιότητα, τότε *και* οι έξοδοι έχουν τη βηματική ιδιότητα.

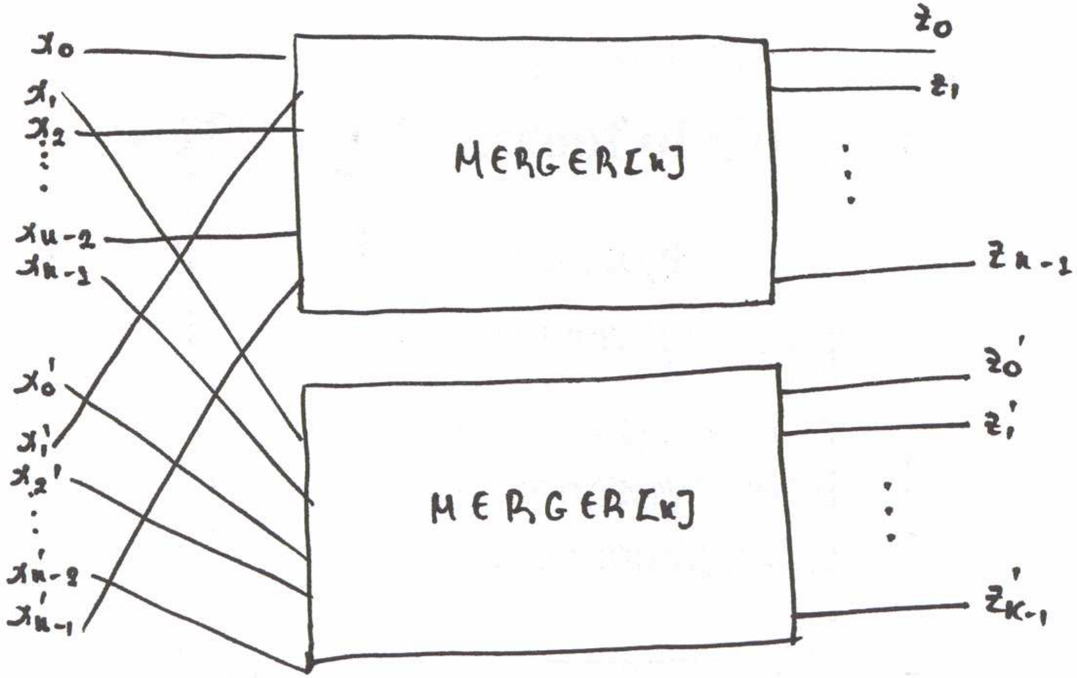
Θεώρημα: Σε *κάθε* ανενεργή *κατάσταση*, η ακολουθία εξόδου του BITONIC[w] έχει τη βηματική ιδιότητα.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Απόδειξη Λήμματος 8: Με επαγωγή στο logk.

Βάση Επαγωγής: 2k = 2 -> MERGER[2k] είναι απλά ένας εξισορροπητής. Ο ισχυρισμός ισχύει!

Επαγωγικό βήμα: 2k > 2 - > Εφόσον οι ακολουθίες x και x' έχουν τη βηματική ιδιότητα, το ίδιο ισχύει και για τις άρτιες και περιττές υπακολουθίες τους $\Rightarrow$ το ίδιο ισχύει και για τις z και z' (από επαγωγική υπόθεση).



Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Απόδειξη Λήμματος 8 (συνέχεια)

- Σz_i = \ceil{$\Sigma x_i/2$} + \floor{$\Sigma x_i'/2$}
- $\Sigma z_i'$ = \floor{$\Sigma x_i/2$} + \ceil{$\Sigma x_i'/2$}

Διακρίνοντας περιπτώσεις προκύπτει άμεσα ότι: Σz_i και $\Sigma z_i'$ διαφέρουν κατά το πολύ 1.

1. Αν $\Sigma z_i = \Sigma z_i'$, από Λήμμα 6 $\Rightarrow z_i = z_i'$.

   $\Rightarrow y_i - y_j = z_i/2 - z_j/2 \Rightarrow$ ο ισχυρισμός ισχύει αφού η z έχει τη βηματική ιδιότητα.

2. Αν τα Σz_i, $\Sigma z_i'$ διαφέρουν κατά 1, από Λήμμα 7 $\Rightarrow z_i = z_i'$ για όλα τα i, $0 \leq i < k/2$, εκτός από ένα μοναδικό ακέραιο m για τον οποίο οι z_m και z_m' διαφέρουν κατά 1.

   Έστω ότι $\max\{z_m, z_m'\} = x+1$ και $\min\{z_m, z_m'\} = x$ για κάποιο μη-αρνητικό ακέραιο x.

   Από τη βηματική ιδιότητα στα z και z′ $\Rightarrow$ για όλα τα $j < m$, $z_j = z_j' = x+1$ και για όλα τα $j > m$, $z_j = z_j' = x$.

   Αφού τα z_m, z_m' παίρνουν μέσα από εξισορροπητή με εξόδους y_{2m} και $y_{2m+1} \Rightarrow y_{2m} = x+1$ και $y_{2m+1} = x$. Ομοίως, τα z_j, z_j' παίρνουν μέσα από εξισορροπητή, $j \neq m$.
   Επιλέγουμε $c = 2m+1$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.

Υλοποίηση των Δικτύων Μέτρησης

Συστήματα Διαμοιραζόμενης Μνήμης

```
struct balancer {
      boolean toggle;
      struct balancer *next[2];
}

void traverse(balancer b)
{
      loop until leaf(b) {
            i = RMW(b.toggle := NOT(b.toggle);
            b = b.next[i];
      }
}                     /* Κώδικας διάσχισης εξισορροπητή  */
```

- Κάθε διεργασία μπορεί να έχει συσχετισθεί με έναν σύνδεσμο εισόδου από όπου ξεκινά το ταξίδι της μέσα στο δίκτυο.
- Η αλλαγή του toggle πραγματοποιείται είτε με «μικρό» κρίσιμο τμήμα ή με μια RMW.