

Δίκτυα Μέτρησης



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΔΕΚ

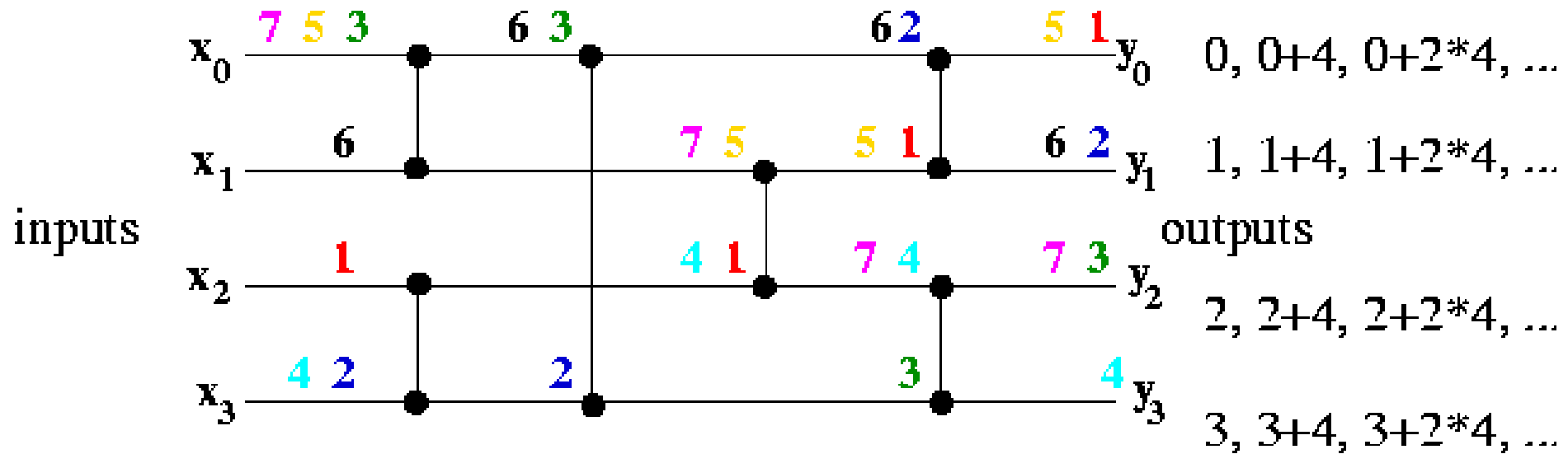


ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Δίκτυα Εξισορρόπησης



κατάσταση εξισορροπητή (balancer state): συλλογή από διακριτικά (tokens) στους συνδέσμους εισόδου και εξόδου του

μετάβαση εξισορροπητή (balancer transition) (t,b): η αλλαγή κατάστασης που προκαλείται όταν το διακριτικό t περνά από κάποια είσοδο του t σε κάποια έξοδο του.

Μια εκτέλεση του δικτύου είναι μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ακολουθία $s_0, e_1, s_1, e_2, s_2, \dots, e_n, s_n, \dots$ από καταστάσεις και μεταβάσεις εξισορροπητών που εναλλάσσονται:

$\forall (s_i, e_{i+1}, s_{i+1})$, η μετάβαση e_{i+1} οδηγεί από την κατάσταση s_i στην s_{i+1}

Δίκτυα Μέτρησης – Χρήσιμοι Ορισμοί & Χρήσιμα Λήμματα

Βάθος συνδέσμου x (wire depth, συμβολίζεται $\text{depth}(x)$): το βάθος ενός συνδέσμου που αποτελεί είσοδο στο δίκτυο = 0, ενώ το βάθος ενός συνδέσμου που είναι έξοδος ενός εξισορροπητή με εισόδους x_0, x_1 είναι $\max\{\text{depth}(x_0), \text{depth}(x_1)\}$.

Βάθος δικτύου εξισορόπησης (depth of the balancing network, συμβολίζεται d): μέγιστο βάθος οποιουδήποτε συνδέσμου.

Λήμμα 1: Αν η μετάβαση ενός διακριτικού από την είσοδο στην έξοδο ενός εξισορροπητή απαιτεί χρόνο το πολύ Δ , τότε κάθε διακριτικό που εισέρχεται στο δίκτυο εξέρχεται αυτού σε χρόνο το πολύ $\Delta * d$.

n = αριθμός διεργασιών στο σύστημα

w = πλάτος, μέγιστος αριθμός συνδέσμων εισόδου στους εξισορροπητές

Ένα **δίκτυο μέτρησης** ορίζεται να είναι ένα δίκτυο εξισορόπησης του οποίου οι έξοδοι y_0, \dots, y_{w-1} , ικανοποιούν την ακόλουθη *βηματική ιδιότητα* (step property):

Σε κάθε μη-ενεργή κατάσταση, $0 \leq y_i - y_j \leq 1$, για κάθε $i < j$.

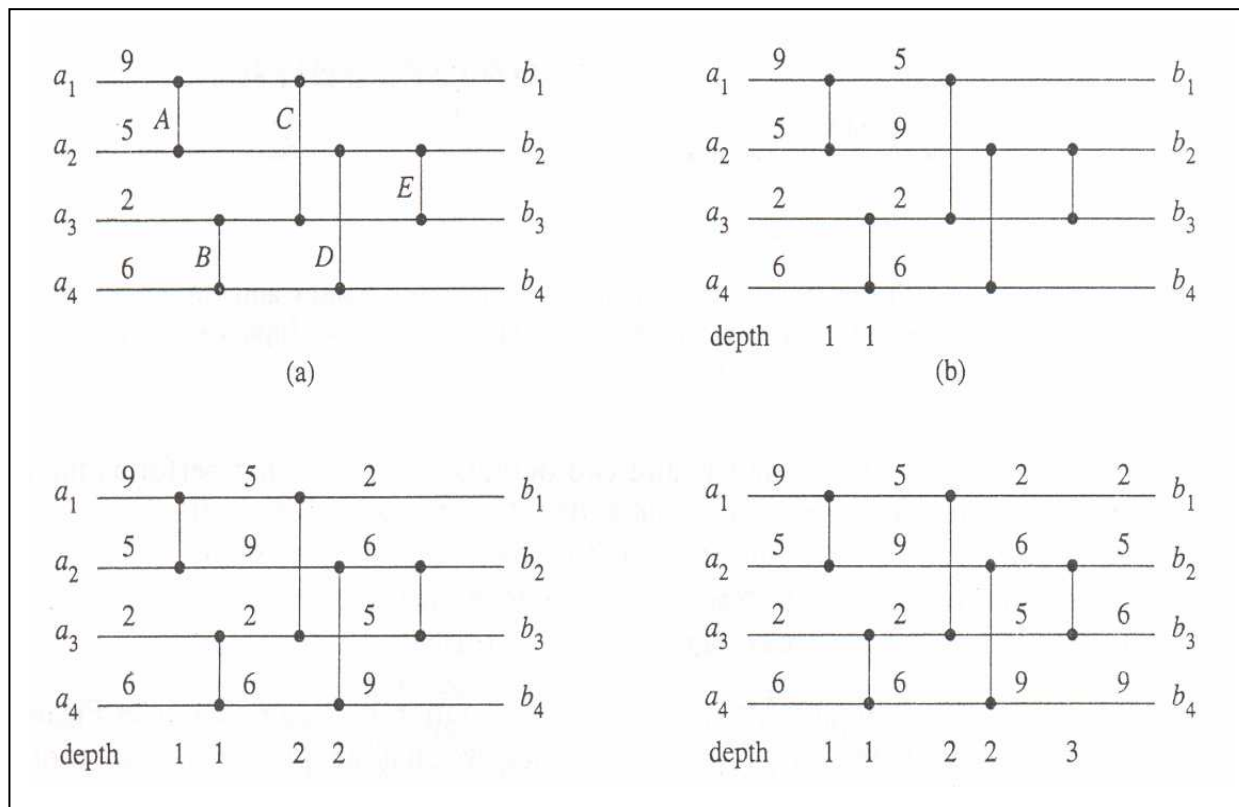
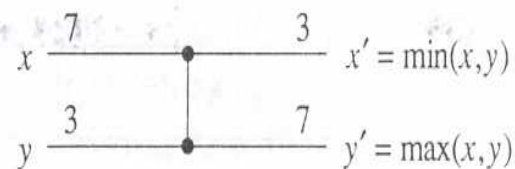
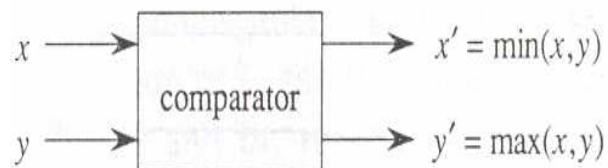
Δίκτυα Μέτρησης – Χρήσιμα Λήμματα

Λήμμα 2: Αν y_0, \dots, y_{w-1} είναι μια ακολουθία από μη-αρνητικούς ακέραιους, τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. Για κάθε $i < j$, $0 \leq y_i - y_j \leq 1$.
2. Είτε $y_i = y_j$ για κάθε i, j ή υπάρχει κάποιος ακέραιος c τ.ω. για κάθε $i < c$ και $j \geq c$ ισχύει ότι $y_i - y_j = 1$.
3. Αν $m = \sum_{i=0}^{w-1} y_i$, τότε $y_i = \lceil (m-i)/w \rceil$

Λήμμα 3: Ας υποθέσουμε ότι σε κάποια κατάσταση μιας εκτέλεσης ενός δικτύου μέτρησης, m διακριτικά έχουν εισέλθει στο δίκτυο και m' έχουν εξέλθει αυτού. Τότε, υπάρχουν μη-αρνητικοί ακέραιοι d_i , $0 \leq i < w-1$, τ.ω. $\sum_{i=0}^{w-1} d_i = m - m'$ και $y_i + d_i = \lceil (m-i)/w \rceil$.

Δίκτυα Σύγκρισης & Δίκτυα Μέτρησης



Ένα δίκτυο ταξινόμησης ορίζεται να είναι ένα δίκτυο σύγκρισης του οποίου η ακολουθία εξόδου είναι μονοτονικά αύξουσα για κάθε ακολουθία εισόδου.

Ένα δίκτυο εξισορρόπησης είναι *ισομορφικό* σε ένα δίκτυο σύγκρισης αν το ένα μπορεί να κατασκευαστεί από το άλλο με αντικατάσταση των συγκριτών από εξοσοροπητές και το αντίστροφο.

Μέτρηση έναντι Ταξινόμησης

Θεώρημα

Αν ένα δίκτυο εξισορρόπησης μετράει, το ισομορφικό δίκτυο ταξινόμησης ταξινομεί, ενώ το αντίστροφο δεν είναι αλήθεια.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε μια απεικόνιση από τις μεταβάσεις του δικτύου σύγκρισης στις μεταβάσεις του ισομορφικού δικτύου εξισορρόπησης.

Θεωρούμε μια αυθαίρετη ακολουθία από 0 και 1 ως είσοδο στο δίκτυο σύγκρισης. Για το δίκτυο εξισορρόπησης, τοποθετούμε ένα διακριτικό σε κάθε είσοδο της οποίας η αντίστοιχη στο δίκτυο σύγκρισης έχει 0 και δεν τοποθετούμε διακριτικά στις υπόλοιπες εισόδους (δηλαδή σε εκείνες που στο δίκτυο σύγκρισης έχουν 1).

⇒ Αν τρέξουμε και τα δύο δίκτυα επιτρέποντας σε κάθε ένα να κάνει από ένα μόνο βήμα κάθε φορά (in lockstep), τότε το δίκτυο εξισορρόπησης θα προσομοιώσει το δίκτυο σύγκρισης.

Μέτρηση έναντι Ταξινόμησης

Απόδειξη (συνέχεια):

Με επαγωγή στο βάθος του δικτύου.

Βάση Επαγωγής: Ο ισχυρισμός ισχύει εξ κατασκευής.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για συνδέσμους που βρίσκονται στο επίπεδο k .

Επαγωγικό Βήμα: Θα δείξω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για συνδέσμους που βρίσκονται στο επίπεδο $k+1$.

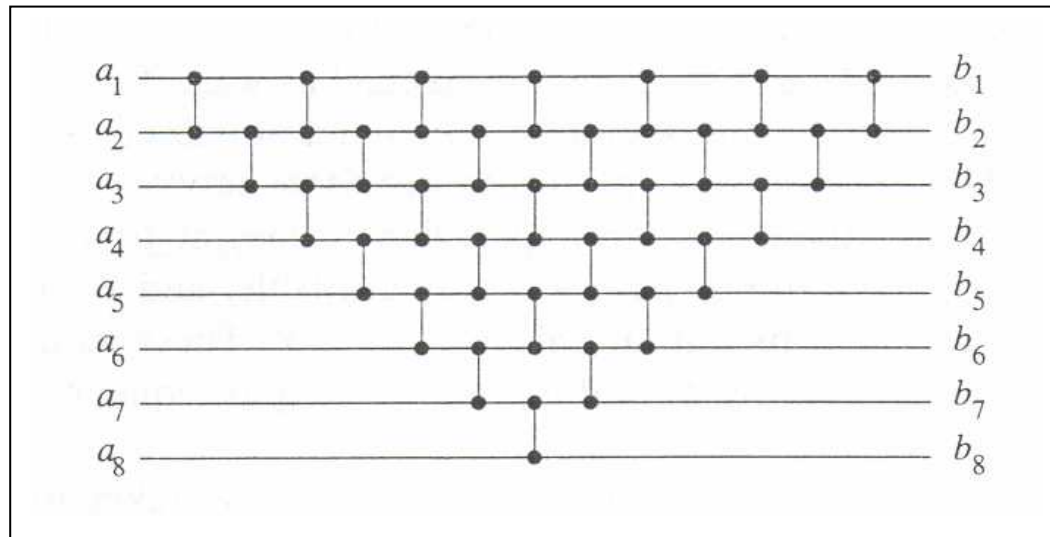
1. πύλες στις οποίες δύο 0 συναντιούνται.
2. πύλες στις οποίες δύο 1 συναντιούνται.
3. πύλες στις οποίες ένα 0 συναντιέται με έναν 1.

Αφού το δίκτυο ταξινόμησης έχει τη βηματική ιδιότητα \Rightarrow το δίκτυο σύγκρισης ταξινομεί.

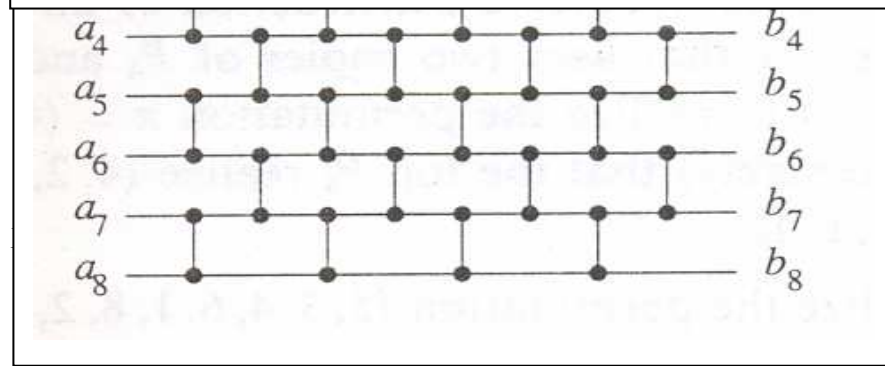
Αν ένα δίκτυο ταξινομεί όλες τις ακολουθίες από 0 και 1, τότε είναι δίκτυο ταξινόμησης. Είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι δίκτυα εξισορόπησης με τοπολογία ισομορφική των δικτύων σύγκρισης EVEN-ODD και INSERTION δεν είναι δίκτυα μέτρησης.

Πόρισμα: Το βάθος οποιουδήποτε δικτύου μέτρησης είναι τουλάχιστον $\Omega(\log n)$.

Τα Δίκτυα Σύγκρισης INSERTION και EVEN-ODD



Το δίκτυο INSERTION



Το δίκτυο EVEN-ODD

Το δίκτυο Συγχωνευτής (Merger network)

Δίκτυο Εξισορόπησης MERGER[w] πλάτους w : Αποτελείται από δύο ακολουθίες εισόδων x και x' που η κάθε μια έχει μήκος $w/2$, και μια ακολουθία εξόδων y μήκους w .

Ας υποθέσουμε ότι το w είναι δύναμη του 2.

Επαγωγικός ορισμός

$k = 1 \Rightarrow \text{MERGER}[2k]$: 1 εξισορροπητής με 2 εισόδους & 2 εξόδους

$k > 1 \Rightarrow \text{MERGER}[2k]$ με ακολουθίες εισόδου x και x' : αποτελείται από 2 δίκτυα $\text{MERGER}[k]$ και k εξισορροπητές τ.ω.:

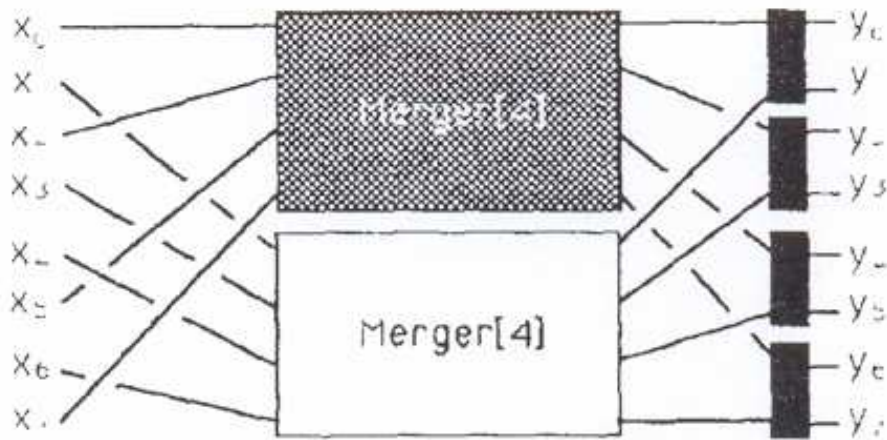
1^{ος} MERGER[k]: συγχωνεύει την υπακολουθία εισόδων x_0, x_2, \dots, x_{k-2} του x με την $x_1', x_3', \dots, x_{k-1}'$ του x' (δηλαδή η ακολουθία εισόδου του 1^{ου} MERGER[k] είναι $x_0, x_2, \dots, x_{k-2}, x_3', \dots, x_{k-1}'$).

2^{ος} MERGER[k]: συγχωνεύει την υπακολουθία εισόδων x_1, x_3, \dots, x_{k-1} του x με την $x_0', x_2', \dots, x_{k-2}'$ του x'

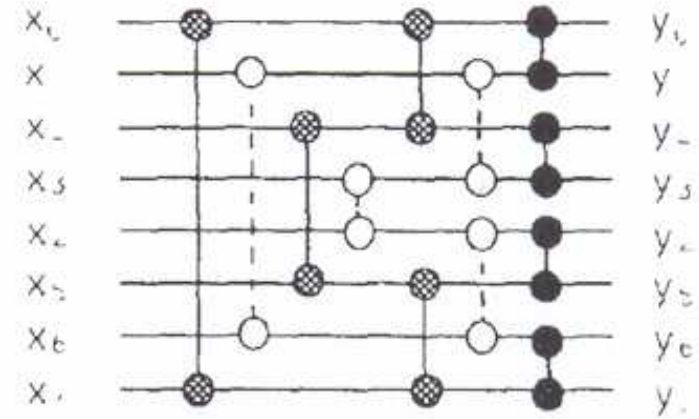
z, z' : έξοδοι του MERGER[k]

Οι σύνδεσμοι z_i, z_i' αποτελούν τις εισόδους ενός εξισορροπητή του οποίου οι έξοδοι είναι y_{2i} και y_{2i+1} .

Το δίκτυο Συγχωνευτής – Παραδείγματα



Merger[8]



Merger[8]

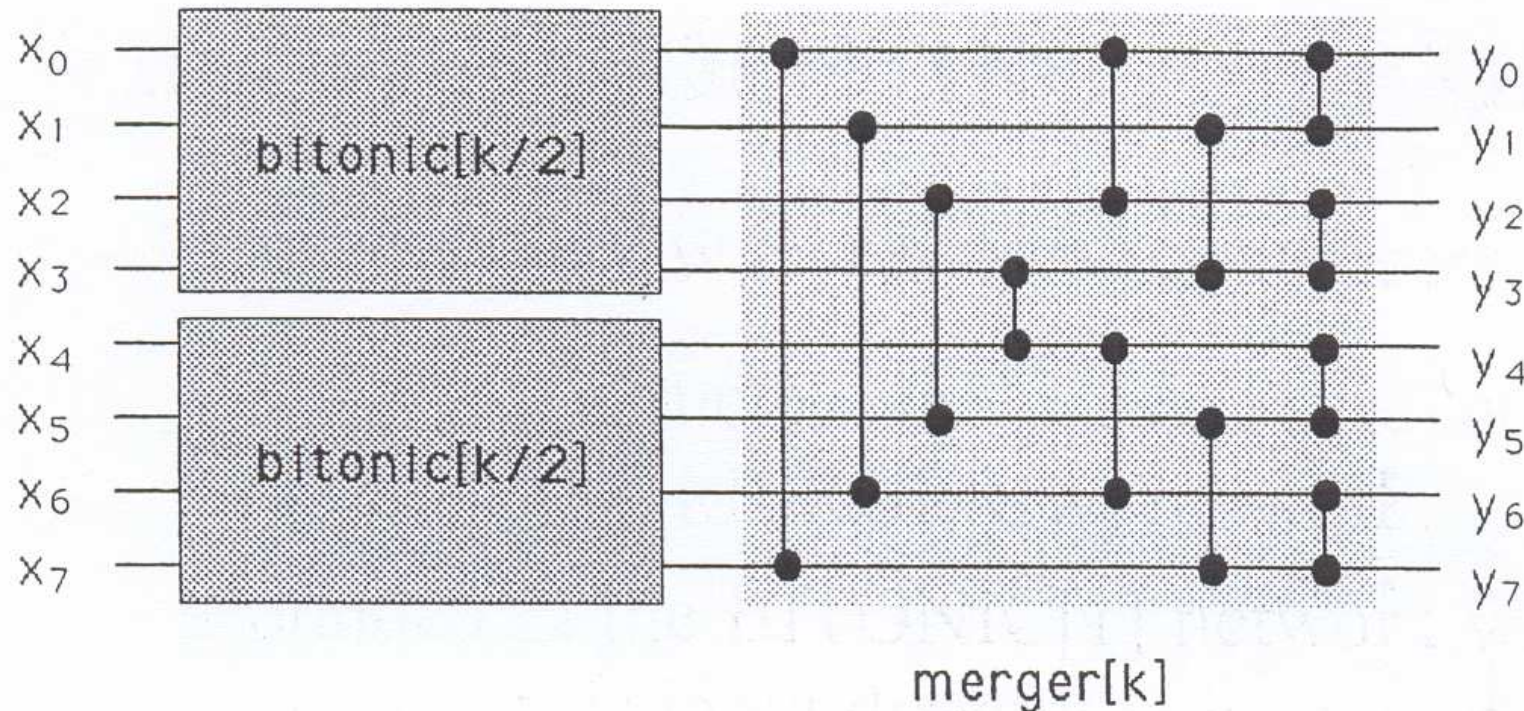
Το δίκτυο MERGER[8]

⇒ Το δίκτυο MERGER[w] αποτελείται από $\log w$ επίπεδα που το καθένα αποτελείται από $w/2$ εξισορροπητές.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC – Τοπολογία

BITONIC[w]: κατασκευάζεται επαγωγικά από δύο δίκτυα BITONIC[w/2] των οποίων οι έξοδοι αποτελούν τις εισόδους ενός δικτύου MERGER[w].

Στη βάση της επαγωγής, το δίκτυο BITONIC[1] δεν περιέχει κανένα εξισορροπητή -> οι εισοδοί του είναι απλά και έξοδοι.



Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Λήμμα 4: Αν μια ακολουθία έχει τη βηματική ιδιότητα, το ίδιο ισχύει και για όλες τις υπακολουθίες της.

Λήμμα 5: Αν η ακολουθία x_0, \dots, x_{k-1} έχει τη βηματική ιδιότητα, τότε ισχύουν τα εξής για την περιττή και την άρτια υπακολουθία της:

$$\sum_{i=0}^{k/2-1} x_{2i} = \lceil \sum_{i=0}^{k-1} x_i / 2 \rceil \text{ και } \sum_{i=0}^{k/2-1} x_{2i+1} = \lfloor \sum_{i=0}^{k-1} x_i / 2 \rfloor.$$

Απόδειξη:

Το k είναι δύναμη του 2, δηλαδή άρτιος αριθμός.

1. Είτε $x_{2i} = x_{2i+1}$, για $0 \leq i < k/2$, ή
2. από το Λήμμα 2 υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος j τ.ω. $x_j = x_{j+1} + 1$ και $x_i = x_{i+1}$, για όλα τα $i \neq j$, $0 \leq i < k/2$.

Στην περίπτωση 1 $\Rightarrow \sum x_{2i} = \sum x_{2i+1} = \sum x_i / 2$.

Στην περίπτωση 2 $\Rightarrow \sum x_{2i} = \lceil \sum x_i / 2 \rceil$ και $\sum x_{2i+1} = \lfloor \sum x_i / 2 \rfloor$.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Λήμμα 6: Έστω ότι οι x_0, \dots, x_{k-1} και y_0, \dots, y_{k-1} είναι αυθαίρετες ακολουθίες που έχουν τη βηματική ιδιότητα. Αν $\sum_{i=0}^{k-1} x_i = \sum_{i=0}^{k-1} y_i$, τότε $x_i = y_i$, για όλα τα i , $0 \leq i < k$.

Απόδειξη: Έστω $m = \sum x_i = \sum y_i$. Τότε, από Λήμμα 2 $\Rightarrow x_i = y_i = \lceil (m-i)/k \rceil$.

Λήμμα 7: Έστω ότι οι x_0, \dots, x_{k-1} και y_0, \dots, y_{k-1} είναι αυθαίρετες ακολουθίες που έχουν τη βηματική ιδιότητα. Αν $\sum_{i=0}^{k-1} x_i = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} y_i$, τότε υπάρχει μοναδικός ανέραιος j , $0 \leq j < k$ τ.ω. $x_j = y_j + 1$ και $x_i = y_i$, για κάθε $i \neq j$, $0 \leq i < k$.

Απόδειξη: Έστω $m = \sum x_i = 1 + \sum y_i$. Από Λήμμα 2, $x_i = \lceil (m-i)/k \rceil$ και $y_i = \lceil (m-i-1)/k \rceil$.

Οι δύο αυτοί όροι είναι ίδιοι για όλα τα i , $0 \leq i < k$, εκτός από την τιμή $i = (m-1) \pmod k$.

Λήμμα 8: Αν ο MERGER[2k] είναι ανενεργός και οι ακολουθίες εισόδου του x_0, \dots, x_{k-1} και x_0', \dots, x_{k-1}' έχουν τη βηματική ιδιότητα, τότε και οι έξοδοι έχουν τη βηματική ιδιότητα.

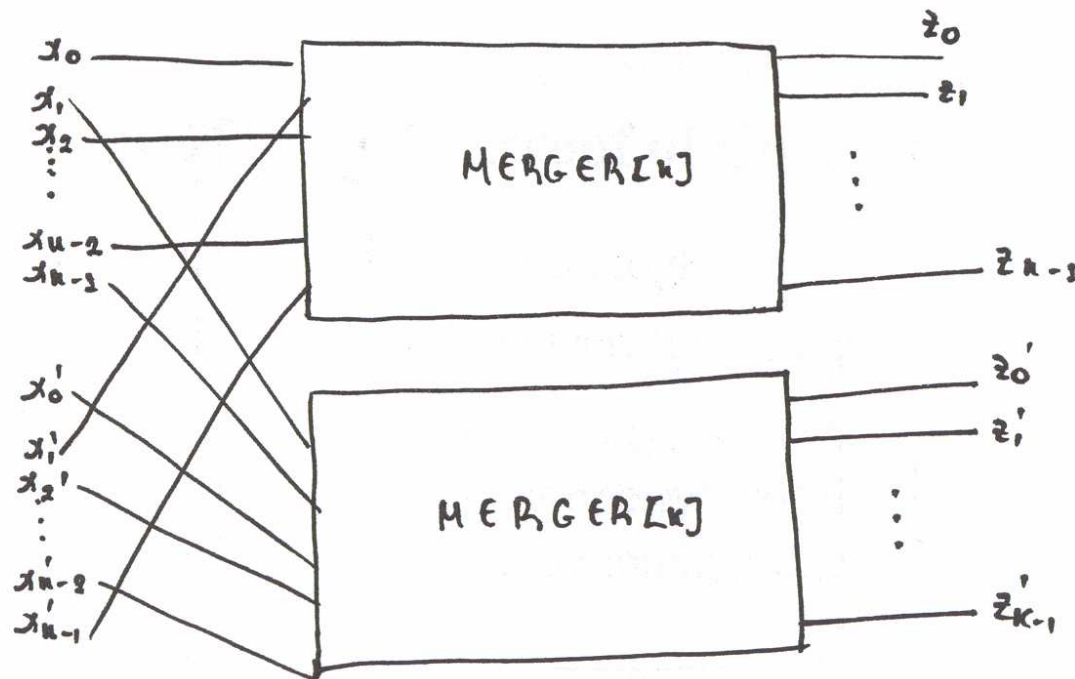
Θεώρημα: Σε κάθε ανενεργή κατάσταση, η ακολουθία εξόδου του BITONIC[w] έχει τη βηματική ιδιότητα.

Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Απόδειξη Λήμματος 8: Με επαγωγή στο $\log k$.

Βάση Επαγωγής: $2k = 2 \rightarrow \text{MERGER}[2k]$ είναι απλά ένας εξισορροπητής. Ο ισχυρισμός ισχύει!

Επαγωγικό βήμα: $2k > 2 \rightarrow$ Εφόσον οι ακολουθίες x και x' έχουν τη βηματική ιδιότητα, το ίδιο ισχύει και για τις άρτιες και περιττές υποακολουθίες τους \Rightarrow το ίδιο ισχύει και για τις z και z' (από επαγωγική υπόθεση).



Το δίκτυο μέτρησης BITONIC - Ορθότητα

Απόδειξη Λήμματος 8 (συνέχεια)

$$\circ \sum z_i = \lceil \sum x_i / 2 \rceil + \lfloor \sum x'_i / 2 \rfloor$$

$$\circ \sum z'_i = \lfloor \sum x_i / 2 \rfloor + \lceil \sum x'_i / 2 \rceil$$

Διακρίνοντας περιπτώσεις προκύπτει άμεσα ότι: $\sum z_i$ και $\sum z'_i$ διαφέρουν κατά το πολύ 1.

1. Αν $\sum z_i = \sum z'_i$, από Λήμμα 6 $\Rightarrow z_i = z'_i$.

$\Rightarrow y_i - y_j = z_i / 2 - z_j / 2 \Rightarrow$ ο ισχυρισμός ισχύει αφού η z έχει τη βηματική ιδιότητα.

2. Αν τα $\sum z_i, \sum z'_i$ διαφέρουν κατά 1, από Λήμμα 7 $\Rightarrow z_i = z'_i$ για όλα τα $i, 0 \leq i < k/2$, εκτός από ένα μοναδικό ακέραιο m για τον οποίο οι z_m και z'_m διαφέρουν κατά 1.

Έστω ότι $\max\{z_m, z'_m\} = x+1$ και $\min\{z_m, z'_m\} = x$ για κάποιο μη-αρνητικό ακέραιο x .

Από τη βηματική ιδιότητα στα z και $z' \Rightarrow$ για όλα τα $j < m, z_j = z'_j = x+1$ και για όλα τα $j > m, z_j = z'_j = x$.

Αφού τα z_m, z'_m παίρνουν μέσα από εξισορροπητή με εξόδους y_{2m} και $y_{2m+1} \Rightarrow y_{2m} = x+1$ και $y_{2m+1} = x$. Ομοίως, τα z_j, z'_j παίρνουν μέσα από εξισορροπητή, $j \neq m$.

Επιλέγουμε $c = 2m+1$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.

Υλοποίηση των Δικτύων Μέτρησης

Συστήματα Διαμοιραζόμενης Μνήμης

```
struct balancer {
    boolean toggle;
    struct balancer *next[2];
}

void traverse(balancer b)
{
    loop until leaf(b) {
        i = RMW(b.toggle := NOT(b.toggle));
        b = b.next[i];
    }
} /* Κώδικας διάσχισης εξισορροπητή */
```

- Κάθε διεργασία μπορεί να έχει συσχετισθεί με έναν σύνδεσμο εισόδου από όπου ξεκινά το ταξίδι της μέσα στο δίκτυο.
- Η αλλαγή του toggle πραγματοποιείται είτε με «μικρό» κρίσιμο τμήμα ή με μια RMW.