

9η Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- (α) Για κάθε γεμάτο m -αδικό δέντρο T με t φύλλα και i εσωτερικές κορυφές, ισχύει $i = \frac{t-1}{m-1}$.
- (β) Κάθε γεμάτο m -αδικό δέντρο T με ύψος h έχει τουλάχιστον h εσωτερικές κορυφές και $h \cdot (m - 1) + 1$ φύλλα.

Ασκηση 2. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

- (α) Αν $d \mid a$ και $a \mid b$ τότε $d \mid b$.
- (β) Αν $d \mid a$ και $b \neq 0$ τότε $d \cdot b \mid a \cdot b$

Ασκηση 3. Έστω δύο ακέραιοι a, d με $d > 0$. Αποδείξτε ότι οι μοναδικές ακέραιες τιμές q και r για τις οποίες ισχύει $0 \leq r < d$ και $a = q \cdot d + r$ είναι $q = a \operatorname{div} d$ και $r = a \operatorname{mod} d$.

Ασκηση 4.

- (α) Αποδείξτε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους αριθμούς a, b με $b > a$, ισχύει $b \operatorname{mod} a < \frac{b}{2}$.
- (β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του υποερωτήματος (α) αποδείξτε ότι ο βελτιωμένος αλγόριθμος του Ευκλείδη, με είσοδο δύο θετικούς ακέραιους a και $b \neq a$, τερματίζει μετά από το πολύ $2 \log_2 \max(a, b)$ βήματα.

Ασκηση 5. Βρείτε το $\operatorname{gcd}(308, 259)$, καθώς και δύο ακέραιους αριθμούς s και t τέτοιους ώστε $\operatorname{gcd}(308, 259) = s \cdot 308 + t \cdot 259$.