

8η Σειρά Ασκήσεων

**Ασκηση 1.**

(α) Σχεδιάστε ένα οποιοδήποτε επίπεδο μη συνεκτικό γράφημα  $G$  και εξετάστε αν ο τύπος του Euler ισχύει για το γράφημα αυτό.

(β) Έστω  $G$  ένα επίπεδο γράφημα με  $c$  συνεκτικές συνιστώσες,  $v$  κορυφές και  $e$  ακμές και έστω  $r$  το πλήθος των περιοχών σε ένα σχεδιασμό του  $G$  στο επίπεδο στον οποίο δεν υπάρχουν ακμές τεμνόμενες σε εσωτερικά σημεία. Βρείτε έναν τύπο που να συσχετίζει τις παραμέτρους  $v$ ,  $e$ ,  $r$ , και  $c$ .

**Ασκηση 2.**

(α) Έστω  $G$  ένα συνεκτικό επίπεδο διμερές γράφημα με  $v$  κορυφές και  $e$  ακμές. Βρείτε ένα άνω φράγμα για το  $e$ , το οποίο να είναι μικρότερο από το  $3v - 6$ .

(β) Χρησιμοποιήστε την απάντηση του (α) ώστε να δώσετε μία εναλλακτική απόδειξη για το ότι το  $K_{3,3}$  δεν είναι επίπεδο γράφημα.

**Ασκηση 3.** Εξετάστε αν το γράφημα του Petersen είναι επίπεδο γράφημα.

**Ασκηση 4.** Αποδείξτε ότι αν  $G$  είναι ένα γράφημα και  $F$  ένα σύνολο ακμών με  $|F| = \lambda(G)$ , τέτοιο ώστε το γράφημα  $G - F$  να είναι μη συνεκτικό, τότε τα άκρα κάθε ακμής  $e \in F$  βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του  $G - F$ .

**Ασκηση 5.**

(α) Αποδείξτε ότι για οποιοσδήποτε θετικούς ακεραίους  $a, b$ , με  $a \leq b$  υπάρχει γράφημα  $G$  τέτοιο ώστε  $\lambda(G) = a$  και  $\delta(G) = b$

(β) Αποδείξτε ότι για οποιοσδήποτε θετικούς ακεραίους  $a, b$ , με  $a \leq b$  υπάρχει γράφημα  $G$  τέτοιο ώστε  $\kappa(G) = a$  και  $\lambda(G) = b$

**Ασκηση 6.** Βρείτε έναν τύπο που να συσχετίζει το πλήθος κορυφών  $n$ , το πλήθος ακμών  $e$  και το πλήθος συνεκτικών συνιστωσών  $c$  ενός δάσους  $F$ .

**Ασκηση 7.** Αποδείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(α) Κάθε δέντρο  $T$  με  $n \geq 2$  κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

(β) Κάθε δέντρο  $T$  με  $n \geq 3$  κορυφές έχει τουλάχιστον μία εσωτερική κορυφή.