ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ: 2023-24
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ.ΝΟΜΙΚΟΣ

5η Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1. Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και έστω $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του G. Κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα $H = (U, F)$ όπου

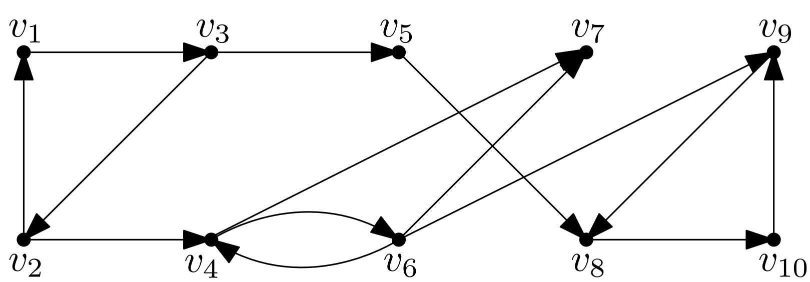
$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$$

(η κορυφή u_i αντιστοιχεί στη συνιστώσα G_i) και

$$F = \{(u_i, u_j) \mid \text{ υπάρχουν κορυφές } v_i \in V_i, v_j \in V_j \text{ τέτοιες ώστε } (v_i, v_j) \in E\}$$

(υπάρχει ακμή στο H από την κορυφή του που αντιστοιχεί στη συνιστώσα G_i προς την κορυφή που αντιστοιχεί στη συνιστώσα G_j, αν υπάρχει κάποια ακμή στο G που συνδέει μία κορυφή της G_i με μία κορυφή της G_j).

(α) Σχεδιάστε το γράφημα H που αντιστοιχεί στο παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα G.



(β) Αποδείξτε ότι για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα G το αντίστοιχο γράφημα H που κατασκευάζεται με την παραπάνω διαδικασία είναι ένα ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα.

Ασκηση 2.

(α) Βρείτε ένα γράφημα το οποίο να έχει κύκλωμα Euler και κύκλο Hamilton.

(β) Βρείτε ένα γράφημα το οποίο να μην έχει κύκλωμα Euler ούτε κύκλο Hamilton.

(γ) Βρείτε ένα γράφημα το οποίο να έχει κύκλωμα Euler αλλά να μην έχει κύκλο Hamilton.

(δ) Βρείτε ένα γράφημα το οποίο να έχει κύκλο Hamilton αλλά να μην έχει κύκλωμα Euler.

Ασκηση 3.

(α) Ονομάστε τις κορυφές του γραφήματος του Petersen έτσι ώστε τα ονοματα να είναι οι αριθμοι 12,13,14,15,23,24,25,34,35,45 και γειτονικές κορυφές να έχουν ονόματα που δεν έχουν κοινά ψηφία.

(β) Αποδείξτε ότι το γράφημα του Petersen δεν έχει κύκλο μήκους 3. Η απόδειξη δεν θα πρέπει να είναι εξαντλητική (βασιστείτε στη σχέση που έχουν οι αριθμοί σε γειτονικές ή μη γειτονικές κορυφές).

(γ) Ομοίως, αποδείξτε ότι το γράφημα του Petersen δεν έχει κύκλο μήκους 4.

(δ) Έχει το γράφημα του Petersen μονοπάτι Hamilton; Έχει ίχνος Euler;

Ασκηση 4.

(α) Δείξτε ότι αν ένα διμερές γράφημα $G = (V, U, E)$ έχει κύκλο Hamilton, τότε ισχύει $|V| = |U|$.

(β) Δείξτε ότι αν ένα διμερές γράφημα $G = (V, U, E)$ έχει μονοπάτι Hamilton, τότε ισχύει $||V| - |U|| \leq 1$.

Ασκηση 5.

Συμβολίζουμε με $L_{m,n}$, $m, n \geq 1$, το γράφημα $(U \cup V, E)$ όπου $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(U \cap V = \emptyset)$ και $E = \{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{\{u_i, u_j\} \mid 1 \leq i < j \leq m\}$. Το $L_{m,n}$ προκύπτει αν συνδέσουμε ανά δύο τις m κορυφές που ανήκουν στο πρώτο σύνολο της διαμέρισης των κορυφών του $K_{m,n}$.

(α) Ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το $L_{m,n}$ να έχει κύκλωμα Euler;

(β) Ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το $L_{m,n}$ να έχει κύκλο Hamilton;