ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ: 2023-24
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ.ΝΟΜΙΚΟΣ

2η Σειρά Ασκήσεων

Ασκηση 1. (*Από την άσκηση αυτή θα γίνει περισσότερο κατανοητό το τι γίνεται όταν ένας ποσοδείκτης δεσμεύει μία μεταβλητή η οποία δεν είναι ελεύθερη στην πρόταση που ακολουθεί τον ποσοδείκτη.*)

Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα περιέχει μόνο ένα σύμβολο κατηγορήματος p με ένα όρισμα. Θεωρούμε το μοντέλο $\mathcal{M}$ όπου

$$|\mathcal{M}| = \{0, 1\}$$

$$p^{\mathcal{M}} = \{1\}$$

(α) Δείξτε ότι $\mathcal{M} \models \forall x \, \exists x \, p(x)$.

(β) Δείξτε ότι $\mathcal{M} \not\models \exists x \, \forall x \, p(x)$.

Ασκηση 2.
(α) Δείξτε ότι για οποιαδήποτε πρόταση ψ, η πρόταση $\forall x \, \psi$ λογικά συνεπάγεται την $\exists x \, \psi$.

(β) Εξετάστε αν ισχύει κάτι αντίστοιχο για την περίπτωση ποσοδεικτών με περιορισμένο πεδίο ορισμού (δείτε τις διαφάνεις 42-48, Πρωτοβάθμια Λογική ΙΙ), δηλαδή αν για οποιαδήποτε προτάσεις ϕ και ψ, η πρόταση $\forall x \, (\phi \to \psi)$ λογικά συνεπάγεται την $\exists x \, (\phi \wedge \psi)$.

Ασκηση 3. Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα περιέχει μόνο ένα σύμβολο κατηγορήματος p με δύο ορίσματα. Έστω οι προτάσεις $\exists x \, \forall y \, p(x, y)$ και $\forall x \, \exists y \, p(x, y)$.

(α) Βρείτε ένα μοντέλο $\mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models \exists x \, \forall y \, p(x, y)$ και $\mathcal{M} \not\models \forall x \, \exists y \, p(x, y)$.

(β) Βρείτε ένα μοντέλο $\mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models \forall x \, \exists y \, p(x, y)$ και $\mathcal{M} \not\models \exists x \, \forall y \, p(x, y)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η πρόταση $\forall x \, \exists y \, p(x, y)$ είναι διαφορετική από την $\forall y \, \exists x \, p(x, y)$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι λογική συνέπεια της $\exists x \, \forall y \, p(x, y)$.