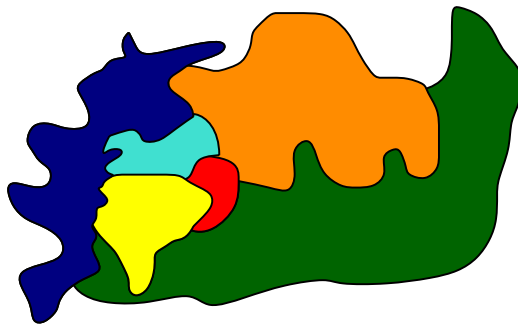


1η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω ότι η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής περιλαμβάνει τα παρακάτω σύμβολα:

- τα σύμβολα σταθερών \square , \circ , \diamond .
- το σύμβολο συνάρτησης \updownarrow , το οποίο δέχεται δύο ορίσματα
- το σύμβολο κατηγορήματος \sqsubset , το οποίο δέχεται δύο ορίσματα
- ένα σύμβολο κατηγορήματος p , το οποίο δέχεται τρία ορίσματα
- το σύμβολο $=$

Θεωρούμε ως σύνολο αναφοράς το σύνολο που αποτελείται από τις έξι χώρες που εικονίζονται στον παρακάτω χάρτη:



Ερμηνεύουμε τα σύμβολα της πρωτοβάθμιας γλώσσας με το παρακάτω τρόπο:

- η ερμηνεία της σταθεράς \square είναι η κόκκινη χώρα.
- η ερμηνεία της σταθεράς \circ είναι η κίτρινη χώρα.
- η ερμηνεία της σταθεράς \diamond είναι η μπλε χώρα.
- η ερμηνεία του συμβόλου \updownarrow είναι η συνάρτηση που επιστρέφει τον μεγαλύτερο σε έκταση κοινό γείτονα δύο χωρών.
- η ερμηνεία του συμβόλου κατηγορήματος \sqsubset είναι το σύνολο που περιέχει τα ζεύγη χωρών, το οποία έχουν την εξής ιδιότητα: το βορειότερο σημείο της πρώτης χώρας στο ζεύγος βρίσκεται νοτιότερα από το βορειότερο σημείο της δεύτερης χώρας και το νοτιότερο σημείο της πρώτης χώρας στο ζεύγος βρίσκεται βορειότερα από το νοτιότερο σημείο της δεύτερης χώρας. Με άλλα λόγια, η δεύτερη χώρα στο ζεύγος εκτείνεται περισσότερο από την πρώτη τόσο στο βορά όσο και στο νότο.
- η ερμηνεία του συμβόλου κατηγορήματος p είναι το σύνολο που αποτελείται από όλες τις τριάδες, οι οποίες περιέχουν τρεις διαφορετικές χώρες που έχουν κάποιον κοινό γείτονα.

(α) Ποια είναι η ερμηνεία των παρακάτω όρων:

i $\bigcirc \updownarrow \square$

ii $(\square \updownarrow \bigcirc) \updownarrow \bigcirc$

iii $\diamond \updownarrow \diamond$

(β) Υπάρχει κάποια χώρα η οποία να μην είναι η ερμηνεία κανενός όρου (απλού ή σύνθετου);

(γ) Ποιες από τις παρακάτω ατομικές προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς:

i $\bigcirc \sqsubset \square$

ii $\bigcirc \sqsubset \diamond$

iii $p(\bigcirc, \square, \diamond)$

iv $p(\bigcirc, \square, \diamond \updownarrow \diamond)$

(δ) Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις με ποσοδείκτες είναι αληθείς και ποιές ψευδείς:

i $\exists x (x \updownarrow x = \diamond)$

ii $\forall x \forall y \neg(x \updownarrow y = \bigcirc)$

iii $\forall x \forall y \forall z p(x, y, z)$

iv $\forall x \exists y ((x \sqsubset y) \vee (y \sqsubset x))$

iv $\forall x \exists y \forall z ((\neg(x = z) \wedge \neg(y = z)) \rightarrow p(x, y, z))$

Άσκηση 2. Στα μαθηματικά πολλές φορές διατυπώνονται προτάσεις της μορφής *υπάρχει μοναδική τιμή της μεταβλητής x τέτοια ώστε να ισχύει η ϕ* (σε συμβολική μορφή: $\exists! x \phi$). Η ποσοδείκτης μοναδικότητας $\exists!$ δεν συμπεριλαμβάνεται στη σύνταξη της πρωτοβάθμιας λογικής. Σκοπός της άσκησης αυτής είναι να δείξουμε ότι η απαίτηση που εκφράζει ο ποσοδείκτης μοναδικότητας μπορεί να διατυπωθεί στην πρωτοβάθμια λογική.

(α) Έστω p ένα σύμβολο κατηγορήματος με ένα όρισμα. Διατυπώστε στην πρωτοβάθμια λογική την πρόταση: *υπάρχει μοναδική τιμή της μεταβλητής x τέτοια ώστε να ισχύει $p(x)$*

(β) Έστω ϕ μία οποιαδήποτε πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής. Διατυπώστε στην πρωτοβάθμια λογική την πρόταση: *υπάρχει μοναδική τιμή της μεταβλητής x τέτοια ώστε να ισχύει η ϕ*

Άσκηση 3. Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη προτάσεων διερευνήστε αν οι δύο προτάσεις του είναι λογικά ισοδύναμες ή αν κάποια από τις δύο λογικά συνεπάγεται την άλλη. Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να αποδείξετε το ισχυρισμό σας.

i $\forall x (\phi \vee \psi)$ και $\forall x \phi \vee \forall x \psi$

ii $\exists x (\phi \vee \psi)$ και $\exists x \phi \vee \exists x \psi$

Η λογική ισοδυναμία ή συνεπαγωγή θα πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή των προτάσεων ϕ και ψ .