Διακριτά Μαθηματικά II

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Χρωματισμοί

Ορισμός

Ονομάζουμε χρωματισμό (κορυφών) ενός γραφήματος G μία ανάθεση χρωμάτων από ένα σύνολο χρωμάτων C στις κορυφές του G, τέτοια ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Αν $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα και έχουμε ένα σύνολο C με $|V|$ χρώματα, τότε υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του G με χρώματα από το C. Ωστόσο ενδιαφερόμαστε για χρωματισμούς που χρησιμοποιούν τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων.

Αν υπάρχει χρωματισμός του G με χρώματα από ένα σύνολο χρωμάτων C με $|C| = k$, τότε λέμε ότι το G χρωματίζεται (ή ότι μπορεί να χρωματιστεί) με k χρώματα.

Χρωματισμοί

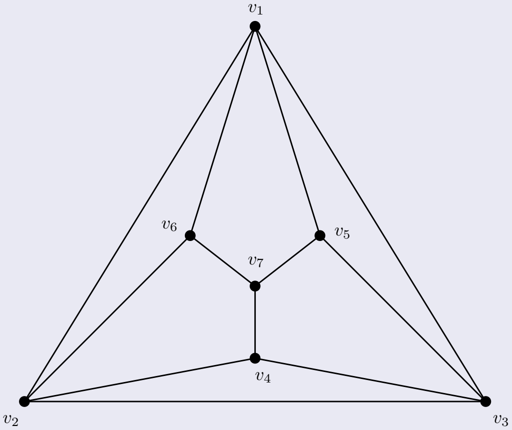
Ορισμός

Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος G, ο οποίος συμβολίζεται με $\chi(G)$, είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστούν οι κορυφές του γραφήματος G, έτσι ώστε γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Χρωματισμοί

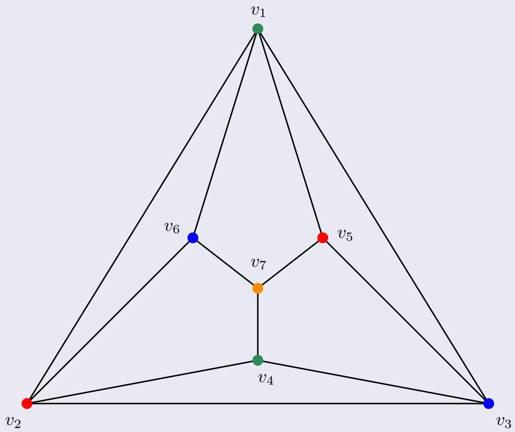
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα:



Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα:



Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Το G δεν μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα για τους παρακάτω λόγους:

Έστω ένα σύνολο χρωμάτων C με 3 στοιχεία. Οι κορυφές v_1, v_2 και v_3 είναι ανα δύο γειτονικές, άρα θα πρέπει να έχουν τρια διαφορετικά χρώματα.

Η κορυφή x_4 είναι γειτονική με τις x_2 και x_3, άρα θα πρέπει να έχει το ίδιο χρώμα με τη x_1. Με ανάλογο σκεπτικό, προκύπτει ότι η κορυφή x_5 θα πρέπει να έχει το ίδιο χρώμα με τη x_2 και η κορυφή x_6 θα πρέπει να έχει το ίδιο χρώμα με τη x_3.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς οι x_4, x_5 και x_6 έχουν η καθεμία ένα διαφορετικό χρώμα από το σύνολο C.

Η κορυφή x_7 είναι γειτονική και με τις τρεις κορυφές x_4, x_5 και x_6 και συνεπώς δεν μπορεί να χρωματιστεί με έγκυρο τρόπο.

Άρα το γράφημα G δεν μπορεί να χρωματιστεί με 3 χρώματα.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος G είναι $\chi(G) = 4$.

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν και μόνο αν $\chi(G) \leq 2$.

Απόδειξη

Έστω ότι το G είναι διμερές. Συνεπώς το V μπορεί να χωριστεί σε δύο ξένα σύνολα V_1 και V_2 τέτοια ώστε κάθε ακμή στο E να έχει το ένα της άκρο στο V_1 και το άλλο στο V_2

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Χρωματίζουμε τις κορυφές του V_1 με κόκκινο χρώμα και τις κορυφές του V_2 με μπλέ χρώμα.

Επειδή κάθε κορυφή του V ανήκει σε ένα ακριβώς από τα V_1 και V_2, σε κάθε κορυφή έχει ανατεθεί ένα ακριβώς χρώμα.

Επίσης, επειδή κάθε ακμή συνδέει μία κορυφή του V_1 με μία κορυφή του V_2, γειτονικές κορυφές έχουν διαφορετικό χρώμα.

Συνεπώς υπάρχει χρωματισμός των κορυφών του G με 2 χρώματα και άρα $\chi(G) \leq 2$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αντίστροφα, έστω ότι $\chi(G) \leq 2$. Τότε μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του G αναθέτοντας χρώματα από ένα σύνολο χρωμάτων $C = \{c_1, c_2\}$.

Έστω A το σύνολο κορυφών που έχουν χρώμα c_1 και B το σύνολο κορυφών που έχουν χρώμα c_2 (στην περίπτωση που $E = \emptyset$ ενδέχεται ένα από τα δύο σύνολα να είναι κενό).

Ισχύει $A \cup B = V$ και $A \cap B = \emptyset$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή οι κορυφές στο A έχουν το ίδιο χρώμα δεν υπάρχει ακμή στο E που να συνδέει δύο κορυφές του A.

Αντίστοιχα, δεν υπάρχει ακμή στο E που να συνδέει δύο κορυφές του B.

Άρα κάθε ακμή του G συνδέει μία κορυφή του A με μία κορυφή του B, που συνεπάγεται ότι το G είναι διμερές. $\square$

Χρωματισμοί

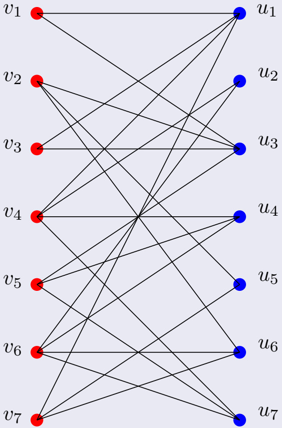
Πόρισμα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $|E| \neq \emptyset$ είναι διμερές αν και μόνο αν $\chi(G) = 2$.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι διμερές και μπορεί να χρωματιστεί με 2 χρώματα:



Χρωματισμοί

Από τον ορισμό του χρωματικού αριθμού, προκύπτει ότι για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $1 \leq \chi(G) \leq |V|$.

Η αριστερή ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το σύνολο ακμών του γραφήματος είναι κενό, ενώ η δεξιά ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το γράφημα είναι πλήρες.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλα άνω και κάτω φράγματα για το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος.

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Απόδειξη

Έστω $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ και έστω ένα σύνολο χρωμάτων C με $|C| = \Delta(G) + 1$.

Θεωρούμε μία αυθαίρετη διάταξη των χρωμάτων $c_1 < c_2 < \cdots < c_{\Delta(G)+1}$.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Θα χρωματίσουμε τις κορυφές του V με χρώματα από το σύνολο C. Συμβολίζουμε $c(v)$ το χρώμα της κορυφής v.

Εξετάζουμε με τη σειρά κορυφές $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και ορίζουμε του χρώμα της κορυφής v_i με τον παρακάτω τρόπο:

$$c(v_i) = \min(C - \{c(v_j) \mid 1 \leq j < i \text{ και } \{v_j, v_i\} \in E\})$$

Το χρώμα που ανατίθεται στην κορυφή v_i είναι το ελάχιστο χρώμα (ως προς τη διάταξη που έχουμε ορίσει) που δεν έχει ανατεθεί σε κανέναν από τους γείτονες της v_i μεταξύ των $v_1, \ldots, v_{i-1}$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή οι γείτονες της v είναι λιγότεροι από τα χρώματα στο σύνολο C, υπάρχει πάντα κάποιο χρώμα που μπορεί να ανατεθεί στην κορυφή v_i.

Συνεπώς η παραπάνω διαδικασία βρίσκει πάντα έναν χρωματισμό με $\Delta(G)+1$, που συνεπάγεται ότι $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$. □

Από το παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ότι υπάρχουν γραφήματα για τα οποία ισχύει $\chi(G) = \Delta(G) + 1$.

Παράδειγμα

Για το πλήρες γράφημα K_n ισχύει $\Delta(K_n) = n - 1$ (επειδή κάθε κορυφή είναι γειτονική με όλες τι υπόλοιπες) και $\chi(K_n) = n$ (επειδή κάθε κορυφή πρέπει να έχει διαφορετικό χρώμα από κάθε άλλη).

Χρωματισμοί

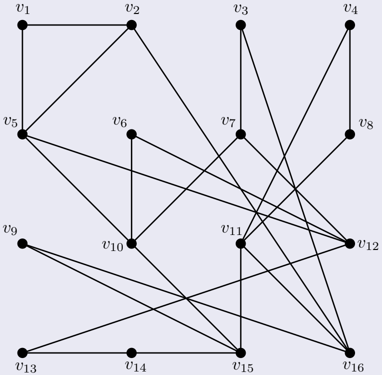
Από το παρακάτω παράδειγμα φαίνεται ότι ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος μπορεί να είναι πολύ μικρότερος από το βαθμό του.

Παράδειγμα

Για το πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,n}$ ισχύει $\Delta(K_{n,n}) = n$ και $\chi(K_{n,n}) = 2$ (επειδή το $K_{n,n}$ είναι διμερές γράφημα).

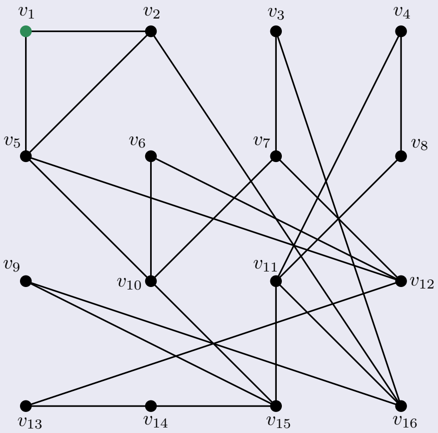
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G έχει βαθμό $\Delta(G) = 4$. Θα χρωματίσουμε το G με 5 χρώματα (πράσινο, μπλε, κόκκινο, πορτοκαλί, μώβ), με τη διαδικασία που περιγράφεται στη απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος.



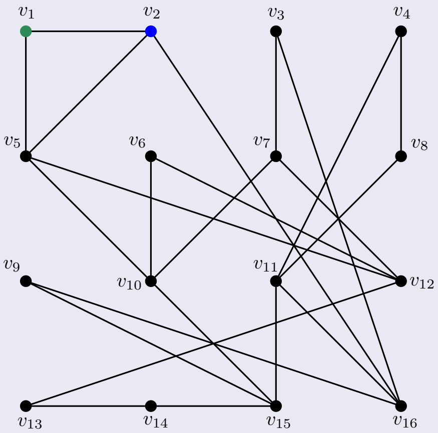
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



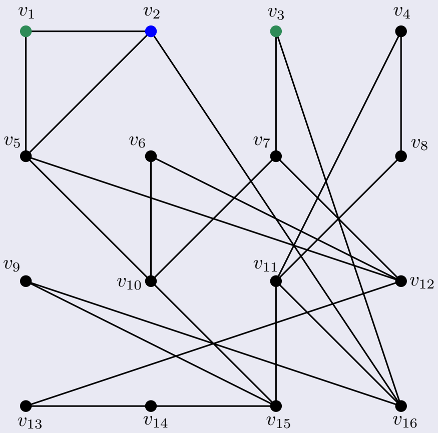
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



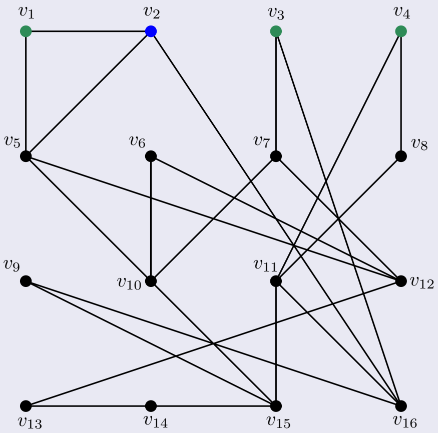
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



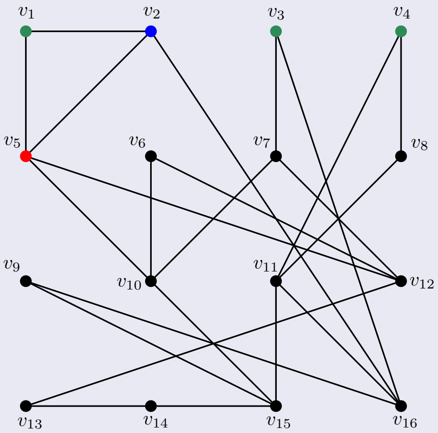
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



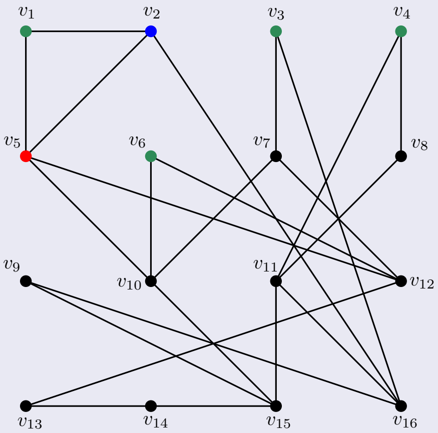
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



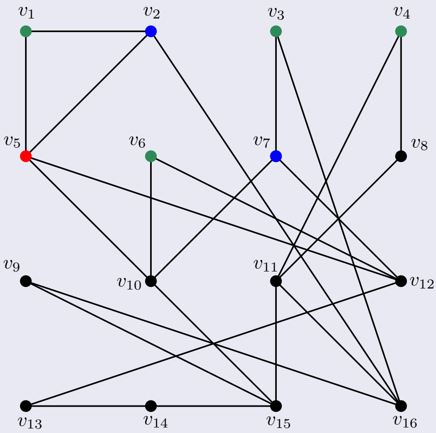
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



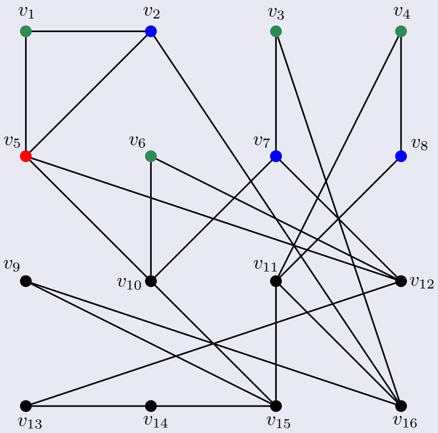
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



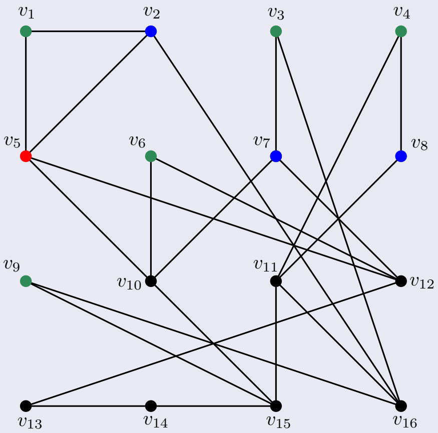
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



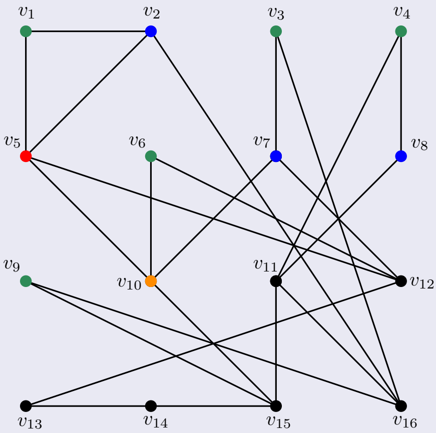
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



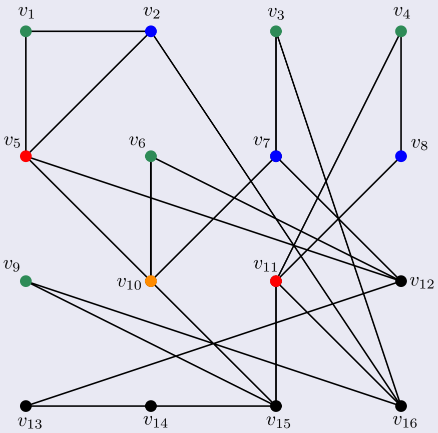
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



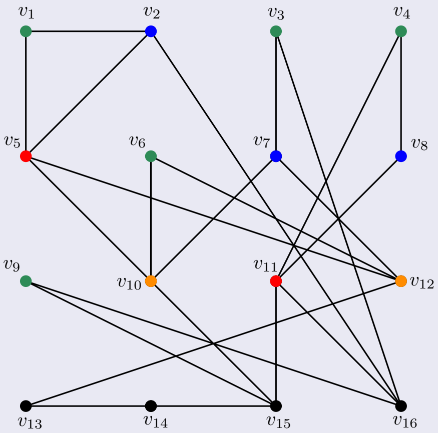
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

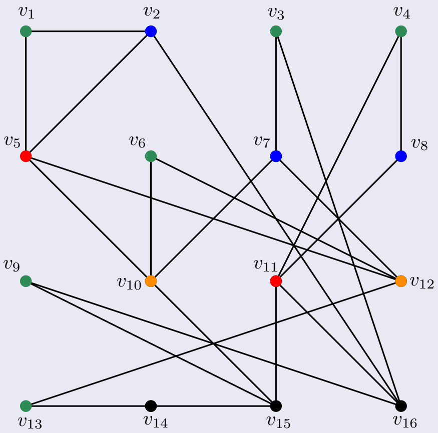


Χρωματισμοί

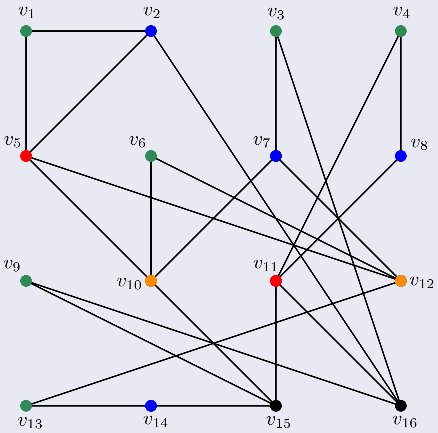
Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

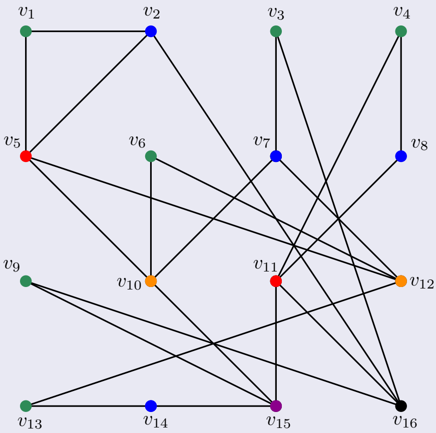


Παράδειγμα (συνέχεια)



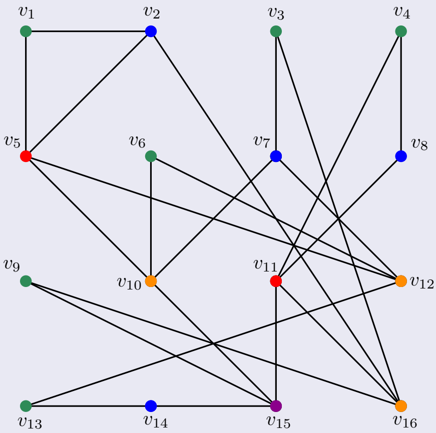
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



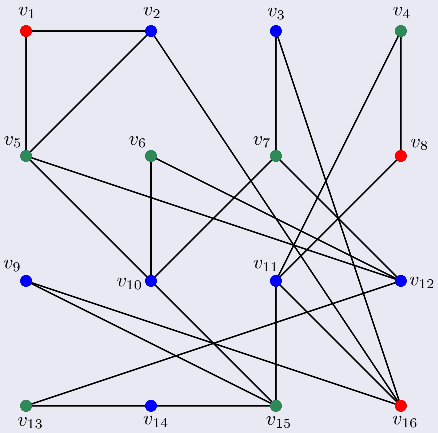
Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο χρωματισμός που προέκυψε χρησιμοποιεί και τα 5 χρώματα του συνόλου C.

Ο χρωματικός αριθμός το γραφήματος είναι $\chi(G) = 3$. Πράγματι, το G μπορεί να χρωματιστεί με τρία χρώματα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, αλλά όχι με 2, καθώς οι κορυφές v_1, v_2 και v_5 είναι ανά δύο γειτονικές.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Ένα μη κενό σύνολο κορυφών $C \subseteq V$ ονομάζεται κλίκα αν για οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in C$ με $u \neq v$, ισχύει $\{u, v\} \in E$.

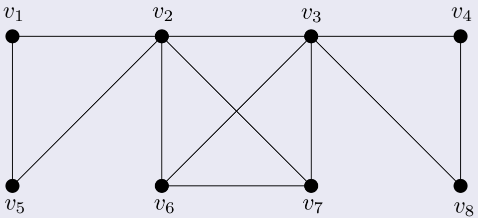
Οι κορυφές μιας κλίκας σε ένα γράφημα είναι ανά δύο γειτονικές στο γράφημα αυτό. Παρατηρούμε ότι το υπογράφημα που επάγεται από μια κλίκα είναι πλήρες γράφημα.

Ορισμός

Ο αριθμός κλίκας ενός γραφήματος G, ο οποίος συμβολίζεται με $\omega(G)$, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος k τέτοιος ώστε να υπάρχει κλίκα μεγέθους k στο G.

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα G τα σύνολα κορυφών $\{v_2, v_3, v_6, v_7\}$, $\{v_1, v_2, v_5\}$, $\{v_4, v_8\}$, $\{v_2\}$ είναι κλίκες. Ο αριθμός κλίκας του G είναι $\omega(G) = 4$.



Θεώρημα

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Απόδειξη

Έστω C μία κλίκα του G με πληθάριθμο $\omega(G)$. Επειδή οι κορυφές στο C είναι ανά δύο γειτονικές, θα πρέπει καθεμία να έχει διαφορετικό χρώμα.

Συνεπώς το πλήθος των χρωμάτων που απαιτούνται για να χρωματιστεί το G είναι τουλάχιστον $\omega(G)$. $\square$

Χρωματισμοί

Από το προηγούμενο θεώρημα είναι φανερό ότι η ύπαρξη μεγάλων κλικών αποτελεί έναν παράγοντα που αυξάνει το χρωματικό αριθμό ενός γραφήματος.

Ωστόσο οι μεγάλες κλίκες δεν είναι ο μοναδικός λόγος για τον οποίο μπορεί ένα γράφημα να έχει μεγάλο χρωματικό αριθμό: μπορούμε να κατασκευάσουμε γραφήματα με οσοδήποτε μεγάλο χρωματικό αριθμό, στα οποία ο αριθμός κλίκας είναι ίσος με 2.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα

Ορίζουμε μία άπειρη ακολουθία γραφημάτων $G_1, G_2, \ldots$ με τον ακόλουθο τρόπο:

Θέτουμε $G_1 = K_1$ και $G_2 = K_2$.

Για $n \geq 3$, το $G_{n+1} = (V_{n+1}, E_{n+1})$ προκύπτει από το $G_n = (V_n, E_n)$ με τον παρακάτω τρόπο:

Έστω $V_n = \{v_1, \ldots, v_s\}$. Το V_{n+1} περιέχει όλες τις κορυφές του V_n και $s+1$ νέες κορυφές $u_1, \ldots, u_s, w$.

Το E_{n+1} περιέχει όλες τις ακμές του E_n και επιπλέον τις ακμές που συνδέουν κάθε κορυφή u_i με κάθε γείτονα της v_i στο G_n και με την w.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Πιο τυπικά:

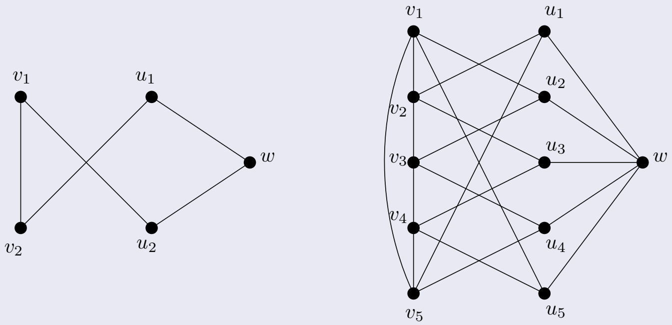
$$V_{n+1} = V_n \cup U_n \cup \{w\}$$

όπου $U_n = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ και

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n \cup \{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i, j \leq s, \{v_i, v_j\} \in E_n\} \\ &\cup \{\{u_i, w\} \mid 1 \leq i \leq s\} \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα G_3 και G_4 (οι κορυφές u_1, w και u_2 του G_3 μετονομάζονται σε v_3, v_4 και v_5 στην κατασκευή του G_4).



Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα αποδείξουμε με επαγωγή στο n ότι για κάθε $n \geq 2$, $\omega(G_n) = 2$ και $\chi(G_n) = n$.

Για $n = 2$ έχουμε $G_2 = K_2$. Οι δύο κορυφές του G_2 αποτελούν κλίκα, και άρα $\omega(G_2) = 2$ (έπειδή το γράφημα έχει 2 κορυφές είναι προφανές ότι δεν μπορεί να έχει κλίκα με 3 στοιχεία).

Επίσης οι δύο κορυφές του γραφήματος μπορούν να χρωματιστούν με δύο χρώματα, αλλά όχι με ένα, επειδή είναι γειτονικές. Συνεπώς $\chi(G_2) = 2$.

Άρα ο ισχυρισμός μας ισχύει για $n = 2$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Υποθέτουμε ότι για $k \geq 2$ ισχύει $\omega(G_k) = 2$ και $\chi(G_k) = k$.

Δείχνουμε πρώτα ότι το G_{k+1} δεν περιέχει κλίκα με 3 στοιχεία, με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι το G_{k+1} περιέχει κλίκα C με 3 στοιχεία.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η κορυφή w δεν μπορεί να ανήκει στη C, καθώς οι γείτονές της ανήκουν στο U_k και άρα δεν είναι γειτονικοί μεταξύ τους.

Επίσης, η C δεν μπορεί να περιέχει δύο κορυφές του U_k, καθώς αυτές δεν θα ήταν γειτονικές.

Επιπλέον, η C δεν μπορεί να αποτελείται μόνο από κορυφές του V_k, καθώς από επαγωγική υπόθεση το G_k δεν περιέχει κλίκα με τρία στοιχεία.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς θα πρέπει $C = \{u_i, v_j, v_\ell\}$, για κάποια $u_i \in U_k$, $v_j, v_\ell \in V_k$ δηλαδή η κλίκα θα πρέπει να αποτελείται από μία κορυφή του U_k και δύο κορυφές του V_k.

Επειδή η C είναι κλίκα, θα πρέπει $\{u_i, v_j\}, \{u_i, v_\ell\}, \{v_j, v_\ell\} \in E_{k+1}$.

Λόγω του τρόπου κατασκευής του G_{k+1} από το G_k θα πρέπει $\{v_i, v_j\}, \{v_i, v_\ell\}, \{v_j, v_\ell\} \in E_k$.

Τότε όμως το σύνολο κορυφών $\{v_i, v_j, v_\ell\}$ είναι μία κλίκα με τρία στοιχεία στο G_k (άτοπο, καθώς από επαγωγική υπόθεση $\omega(G_k) = 2$).

Παράδειγμα (συνέχεια)

Υποθέτοντας ότι το G_{k+1} έχει κλίκα με 3 στοιχεία καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς το G_{k+1} δεν έχει κλίκα με 3 στοιχεία.

Επειδή το G_{k+1} περιέχει κλίκες με 2 στοιχεία (οποιοδήποτε ζεύγος γειτονικών κορυφών είναι μία τέτοια κλίκα), ισχύει $\omega(G_{k+1}) = 2$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το G_{k+1} μπορεί να χρωματιστεί με $k+1$ χρώματα.

Από επαγωγική υπόθεση ο χρωματικός αριθμός του G_k είναι k. Έστω c ένας χρωματισμός των κορυφών του G_k με χρώματα από το C, όπου $|C| = k$.

Θεωρούμε το σύνολο χρωμάτων $C' = C \cup \{z\}$ όπου z είναι ένα νέο χρώμα που δεν ανήκει στο C.

Χρωματισμοί

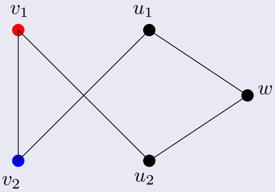
Παράδειγμα (συνέχεια)

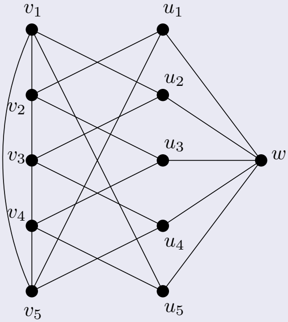
Ορίζουμε την παρακάτω ανάθεση χρωμάτων c' στις κορυφές του G_{k+1}.

- Για κάθε κορυφή $v_i \in V_k$, $c'(v_i) = c(v_i)$.
- Για κάθε κορυφή $u_i \in U_k$, $c'(u_i) = c(v_i)$.
- $c'(w) = z$.

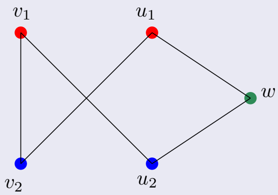
Χρωματισμοί

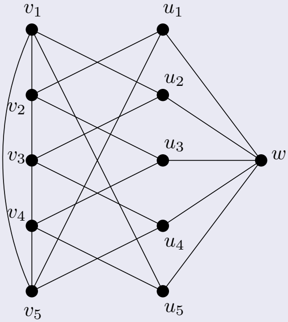
Παράδειγμα (συνέχεια)





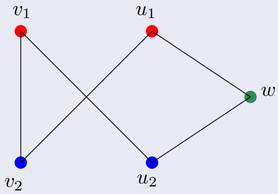
Παράδειγμα (συνέχεια)

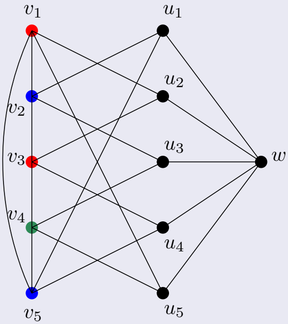




Χρωματισμοί

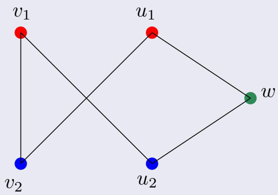
Παράδειγμα (συνέχεια)

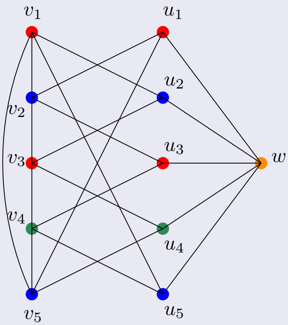




Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)





Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα δείξουμε ότι η c' αναθέτει διαφορετικά χρώματα σε γειτονικές κορυφές του G_{k+1}. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακμή $e \in E_{k+1}$, τα δύο άκρα της έχουν διαφορετικά χρώματα.

Αν $e = \{v_i, v_j\}$, για κάποια $v_i, v_j \in V_k$ τότε $c(v_i) \neq c(v_j)$, επειδή $e \in E_k$ και c είναι ένας χρωματισμός του G_k.

Επίσης $c'(v_i) = c(v_i)$ και $c'(v_j) = c(v_j)$.

Άρα $c'(v_i) \neq c'(v_j)$.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν $e = \{u_i, v_j\}$, για κάποια $u_i \in U_k$, $v_j \in V_k$, τότε θα πρέπει να ισχύει $\{v_i, v_j\} \in E_k$ (λόγω του τρόπου κατασκευής του G_{k+1}) που συνεπάγεται $c(v_i) \neq c(v_j)$, επειδή c είναι ένας χρωματισμός του G_k.

Επίσης $c'(u_i) = c(v_i)$ και $c'(v_j) = c(v_j)$.

Άρα $c'(u_i) \neq c'(v_j)$.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν $e = \{u_i, w\}$, για κάποιο $u_i \in U_k$, τότε ισχύει $c(u_i) \in C$ και $c(w) = z \notin C$. Άρα $c(u_i) \neq c(w)$.

Συνεπώς η ανάθεση χρωμάτων c' είναι ένας χρωματισμός των κορυφών του G_{k+1} με $k+1$ χρώματα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο, ότι δεν υπάρχει χρωματισμός του G_{k+1} με k χρώματα.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας χρωματισμός f του G_{k+1} από ένα σύνολο χρωμάτων F, με $|F| = k$.

Έστω $z = f(w)$. Τότε για κάθε κορυφή $u_j \in U_k$ ισχύει $f(u_j) \in F - \{z\}$, επειδή η u_j είναι γειτονική με την w.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω $Z = \{v_i \in V_k \mid f(v_i) = z\}$

Ορίζουμε την παρακάτω ανάθεση χρωμάτων f' στις κορυφές του V_k:

- Για κάθε κορυφή $v_i \in Z$, $f'(v_i) = f(u_i)$.
- Για κάθε κορυφή $v_i \in V_k - Z$, $f'(v_i) = f(v_i)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα δείξουμε ότι η f' αναθέτει διαφορετικά χρώματα σε γειτονικές κορυφές του G_k. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακμή $e \in E_k$, τα δύο άκρα της έχουν διαφορετικά χρώματα.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $e \in E_k$, τότε $e \in E_{k+1}$ και άρα ο χρωματισμός f αναθετει το πολυ σε ένα από δύο άκρα της e το χρώμα z. Συνεπώς τουλάχιστον ένα άκρο της e στο σύνολο $V_k - Z$.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν $e = \{v_i, v_j\}$, για κάποια $v_i, v_j \in V_k - Z$, τότε $f(v_i) \neq f(v_j)$, επειδή $e \in E_{k+1}$ και f είναι ένας χρωματισμός του G_{k+1}.

Επίσης $f'(v_i) = f(v_i)$ και $f'(v_j) = f(v_j)$.

Άρα $f'(v_i) \neq f'(v_j)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν $e = \{v_i, v_j\}$, για κάποια $v_i \in Z$, $v_j \in V_k - Z$, τότε ισχύει $\{u_i, v_j\} \in E_k$ (λόγω του τρόπου κατασκευής του G_{k+1}) που συνεπάγεται $f(u_i) \neq f(v_j)$, επειδή f είναι ένας χρωματισμός του G_{k+1}.

Επίσης $f'(v_i) = f(u_i)$ και $f'(v_j) = f(v_j)$.

Άρα $f'(v_i) \neq f'(v_j)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς η ανάθεση χρωμάτων f' είναι ένας χρωματισμός των κορυφών του G_k με χρώματα από το $F - \{z\}$, το οποίο έχει $k-1$ στοιχεία.

Αυτό είναι άτοπο, καθώς από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματίσουμε τις κορυφές του G_k είναι $\chi(G_k) = k$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Υποθέτοντας ότι το γράφημα G_{k+1} μπορεί να χρωματιστεί με k χρώματα καταλήξαμε σε άτοπο.

Εφόσον, όπως δείξαμε, υπάρχει χρωματισμός του G_{k+1} με $k+1$ χρώματα έχουμε $\chi(G_k) = k+1$.

Χρωματισμοί

Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Ένα μη κενό σύνολο κορυφών $I \subseteq V$ ονομάζεται ανεξάρτητο σύνολο αν για οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in I$, ισχύει $\{u, v\} \notin E$.

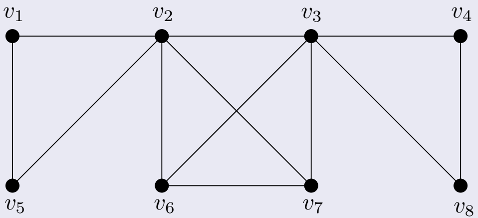
Οι κορυφές ενός ανεξάρτητου συνόλου σε ένα γράφημα είναι ανά δύο μη γειτονικές στο γράφημα αυτό. Παρατηρούμε ότι το υπογράφημα που επάγεται από ένα ανεξάρτητο σύνολο δεν περιέχει καμία ακμή.

Ορισμός

Ο αριθμός ανεξαρτησίας ενός γραφήματος G, ο οποίος συμβολίζεται με $\alpha(G)$, είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος k τέτοιος ώστε να υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k στο G.

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα τα σύνολα κορυφών $\{v_5, v_6, v_8\}$, $\{v_1, v_4, v_7\}$, $\{v_5, v_7\}$, $\{v_2\}$, είναι ανεξάρτητα σύνολα. Ο αριθμός ανεξαρτησίας του G είναι $\alpha(G) = 3$.



Χρωματισμοί

Παρατηρούμε ότι το σύνολο κορυφών U είναι μία κλίκα στο G αν και μόνο αν το U είναι ανεξάρτητο σύνολο στο συμπλήρωμα του G.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε χρωματισμός ενός γραφήματος $G = (V, E)$ με k χρώματα, επάγει μία διαμέριση του V σε k ανεξάρτητα σύνολα και αντίστροφα.

Ο χρωματικός αριθμός ενός γραφήματος είναι το ελάχιστο πλήθος ανεξάρτητων συνόλων στα οποία μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο κορυφών του G.

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος, αφήνεται σαν άσκηση.

Θεώρημα

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\chi(G) \geq \lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \rceil$.

Χρωματισμοί

Ο υπολογισμός του χρωματικού αριθμού $\chi(G)$ ενός γραφήματος G είναι δυσεπίλυτο υπολογιστικό πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος εκτέλεσης των γνωστών αλγορίθμων για τον υπολογισμό του $\chi(G)$ αυξάνεται εκθετικά ως προς το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Το ίδιο ισχύει και για το αριθμό κλίκας $\omega(G)$ και τον αριθμό ανεξαρτησίας $\alpha(G)$.

Χρωματισμοί

Ορισμός

Ονομάζουμε χρωματισμό ακμών ενός γραφήματος G μια ανάθεση χρωμάτων από ένα σύνολο χρωμάτων C στις ακμές του G τέτοια ώστε οι ακμές που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή να έχουν διαφορετικά χρώματα.

Αν $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα και έχουμε ένα σύνολο C με $|E|$ χρώματα, τότε υπάρχει χρωματισμός των ακμών του G με χρώματα από το C. Ωστόσο ενδιαφερόμαστε για χρωματισμούς ακμών που χρησιμοποιούν τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων.

Αν υπάρχει χρωματισμός των ακμών του G με χρώματα από ένα σύνολο χρωμάτων C με $|C| = k$, τότε λέμε ότι οι ακμές του G χρωματίζονται (ή ότι μπορούν να χρωματιστούν) με k χρώματα.

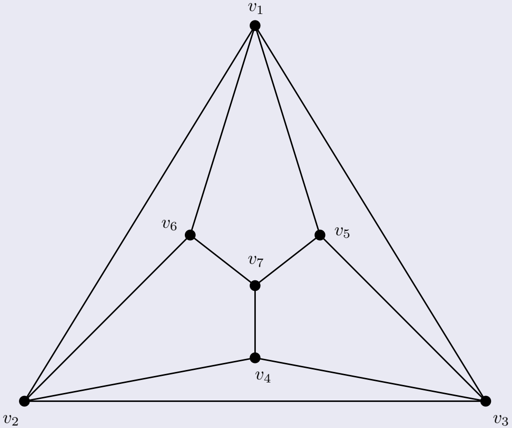
Χρωματισμοί

Ορισμός

Ο χρωματικός δείκτης ενός γραφήματος G, ο οποίος συμβολίζεται με $\chi'(G)$, είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτείται για να χρωματιστούν οι ακμές του γραφήματος G, έτσι ώστε οι ακμές που προσπίπτουν στην ίδια κορυφή να έχουν διαφορετικά χρώματα.

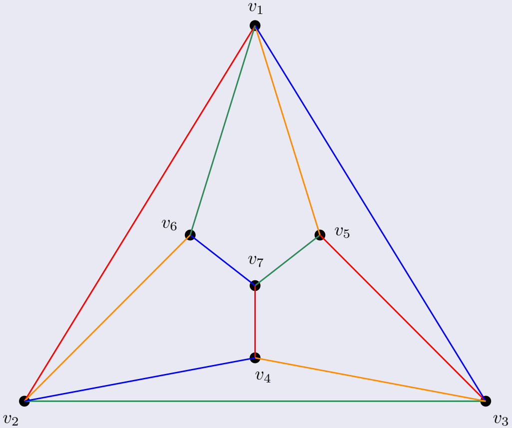
Παράδειγμα

Οι ακμές του παρακάτω γραφήματος G μπορούν να χρωματιστούν με 4 χρώματα:



Παράδειγμα

Οι ακμές του παρακάτω γραφήματος G μπορούν να χρωματιστούν με 4 χρώματα:



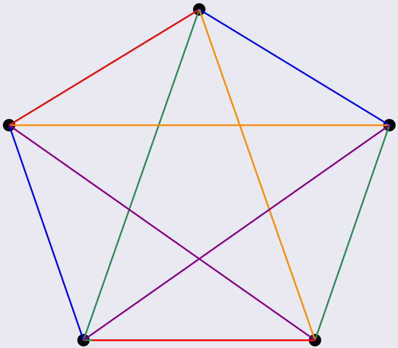
Παράδειγμα (συνέχεια)

Οι ακμές του G δεν μπορούν να χρωματιστούν με 3 χρώματα, επειδή υπάρχουν 4 ακμές που προσπίπτουν στην κορυφή v_1, οι οποίες θα πρέπει να έχουν 4 διαφορετικά χρώματα.

Ο χρωματικός δείκτης του γραφήματος G είναι $\chi'(G) = 4$.

Παράδειγμα

Οι ακμές του γραφήματος K_5 μπορούν να χρωματιστούν με 5 χρώματα:



Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Οι ακμές του K_5 δεν μπορούν να χρωματιστούν με 4 χρώματα για τον παρακάτω λόγο:

Επειδή το K_5 έχει 5 κορυφές, οποιεσδήποτε 3 ακμές έχουν τουλάχιστον ένα κοινό άκρο.

Συνεπώς δεν μπορούμε να χρωματίσουμε 3 ακμές με το ίδιο χρώμα και άρα το μέγιστο πλήθος ακμών που μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα είναι 8.

Άρα δεν είναι δυνατός ο χρωματισμός όλων των ακμών του K_5 με 4 χρώματα.

Ο χρωματικός δείκτης του γραφήματος K_5 είναι $\chi'(K_5) = 4$.

Χρωματισμοί

Το επόμενο θεώρημα δίνει άνω και κάτω φράγματα για το χρωματικό δείκτη ενός γραφήματος.

Χρωματισμοί

Θεώρημα (Vizing)

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Απόδειξη

Η αριστερή ανισότητα ισχύει επειδή στο γράφημα G υπάρχει μία κορυφή στην οποία προσπίπτουν $\Delta(G)$ ακμές, οι οποίες πρέπει να χρωματιστούν με διαφορετικό χρώμα η καθεμία.

Η απόδειξη της δεξιάς ανισότητας είναι αρκετά σύνθετη και παραλείπεται. $\square$

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ ισχύει $\chi(G) \leq \chi'(G) + 1$.

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι ισχύουν οι ανισότητες $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ και $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, από τις οποίες προκύπτει άμεσα το θεώρημα. $\square$

Χρωματισμοί

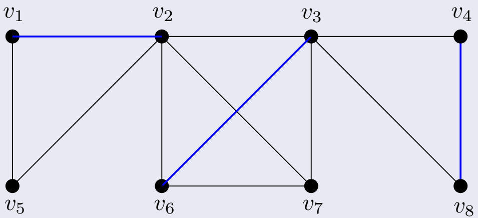
Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Ένα σύνολο ακμών $M \subseteq E$ ονομάζεται ταίριασμα αν για οποιεσδήποτε ακμές $e, f \in M$ με $e \neq f$, ισχύει $e \cap f = \emptyset$.

Οι ακμές ενός ταιριάσματος σε ένα γράφημα ανά δύο δεν έχουν κοινά άκρα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο παρακάτω γράφημα το σύνολο ακμών $M = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_8\}\}$ (φαίνεται με μπλε χρώμα) είναι ταίριασμα.



Χρωματισμοί

Ορισμός

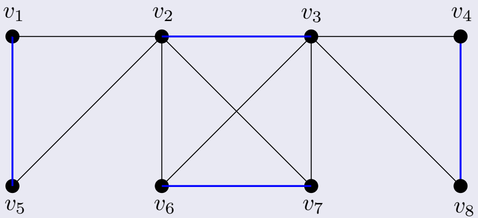
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Ένα ταίριασμα M ονομάζεται τέλειο αν για κάθε κορυφή $v \in V$, υπάρχει ακμή $e \in M$ τέτοια ώστε η e να προσπίπτει στη v.

Ένα τέλειο ταίριασμα περιέχει $\frac{|V|}{2}$ ακμές.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο παρακάτω γράφημα το σύνολο ακμών
$M = \{\{v_1, v_5\}, \{v_2, v_3\}, \{v_6, v_7\}, \{v_4, v_8\}\}$ (φαίνεται με μπλε χρώμα)
είναι τέλειο ταίριασμα.



Χρωματισμοί

Παρατηρούμε ότι κάθε χρωματισμός των ακμών ενός γραφήματος $G = (V, E)$ με k χρώματα, επάγει μία διαμέριση του E σε k ταιριάσματα.

Ο χρωματικός δείκτης ενός γραφήματος είναι το ελάχιστο πλήθος ταιριασμάτων στα οποία μπορεί να διαμεριστεί το σύνολο ακμών του G.

Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $S \subseteq V$. Συμβολίζουμε με $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ τη γειτονιά του S στο G.

Χρωματισμοί

Θεώρημα (Hall)

Έστω $G = (V, U, E)$ ένα διμερές γράφημα. Το G έχει ταίριασμα M με $|M| = |V|$ αν και μόνο αν για κάθε $W \subseteq V$ ισχύει $|W| \leq |N_G(W)|$.

Απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι αν το G έχει ταίριασμα M με $|M| = |V|$, τότε για κάθε $W \subseteq V$ ισχύει $|W| \leq |N_G(W)|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω M ένα ταίριασμα στο G τέτοιο ώστε $|M| = |V|$.

Θεωρούμε ένα τυχαίο $W \subseteq V$.

Κάθε κορυφή του W αποτελεί άκρο κάποιας ακμής του M.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω το σύνολο $C = \{u \in U \mid \{v, u\} \in M$ για κάποια κορυφή $v \in W\}$ το οποίο αποτελείται από τους γείτονες των κορυφών του W μέσω ακμών του M.

Το σύνολο C περιέχει έναν γείτονα για κάθε κορυφή του W και επιπλέον για διαφορετικές κορυφές του W οι αντίστοιχοι γείτονες στο C είναι διαφορετικοί, επειδή το M είναι ταίριασμα.

Συνεπώς $|W| = |C|$.

Επιπλέον ισχύει $C \subseteq N_G(W)$, που συνεπάγεται $|C| \leq |N_G(W)|$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι $|W| \leq |N_G(W)|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αντίστροφα θα αποδείξουμε με ισχυρή επαγωγή στο $n = |V|$ ότι αν για κάθε $W \subseteq V$ ισχύει $|W| \leq |N_G(A)|$ τότε υπάρχει ένα ταίριασμα M στο G τέτοιο με $|M| = |V|$.

Για $n = 1$, το V περιέχει μία μοναδική κορυφή v. Αν θεωρήσουμε το σύνολο $W = \{v\}$, τότε η σχέση $|W| \leq |N_G(W)|$ συνεπάγεται ότι $N_G(v) \neq \emptyset$.

Επιλέγουμε μία κορυφή $u \in N_G(v)$ και θέτουμε $M = \{\{v, u\}\}$, για το οποίο ισχύει $|M| = |V| = 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για $n \leq k$.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε διμερές γράφημα $G = (V, U, E)$ με $|V| = k + 1$, τέτοιο ώστε για κάθε $W \subseteq V$ να ισχύει $|W| \leq |N_G(A)|$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Απόδειξη (συνέχεια)

1η περίπτωση: Υπάρχει $A \subset V$, $A \neq \emptyset$, τέτοιο ώστε $|A| = |N_G(A)|$.

Εστω $G_1 = (A, N_G(A), E_1)$ το υπογράφημα του G που παράγεται από το σύνολο κορυφών $A \cup N_G(A)$.

Εστω $G_2 = (V - A, U - N_G(A), E_2)$ το υπογράφημα του G που παράγεται από το σύνολο κορυφών $(V - A) \cup (U - N_G(A))$.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Ισχύει $|A| \leq k$.

Επίσης για κάθε $B \subseteq A$ ισχύει

$$|B| \leq |N_G(B)| = |N_{G_1}(B)|$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει επειδή όλο το $N_G(A)$ (άρα και το $N_G(B)$) έχει συμπεριληφθεί στο G_1.

Από επαγωγική υπόθεση το G_1 έχει ταίριασμα M_1 με $|M_1| = |A|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ισχύει $|V - A| \leq k$.

Επίσης για κάθε $C \subseteq V - A$ ισχύει

$$|C| \leq |N_{G_2}(C)|$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επειδή

$$|A|+|C| = |A \cup C| \leq |N_G(A \cup C)| = |N_G(A)|+|N_{G_2}(C)| = |A|+|N_{G_2}(C)|$$

Από επαγωγική υπόθεση το G_2 έχει ταίριασμα M_2 με $|M_2| = |V - A|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Το $M_1 \cup M_2$ είναι ένα ταίριασμα στο G με $|A| + |V - A| = |V|$.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

2η περίπτωση: Για κάθε $A \subset V$, $A \neq \emptyset$, ισχύει $|A| < |N_G(A)|$.

Διαλέγουμε μία ακμή $\{v, u\}$, όπου $v \in V$ και $u \in U$. Εστω $G' = (V - v, U - u, E')$ το γράφημα που προκύπτει αν από το G διαγραφούν οι κορυφές v, u.

Ισχύει $|V - \{v\}| = k$.

Επίσης για κάθε $A \subseteq V - \{v\}$ ισχύει $|A| \leq |N_G(A)| - 1 \leq |N_{G'}(A)|$.

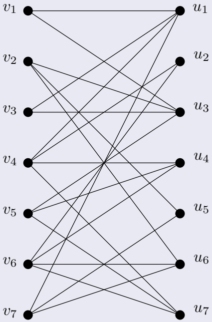
Απόδειξη (συνέχεια)

Από επαγωγική υπόθεση το G' έχει ταίριασμα M' με $|M'| = |V| - 1$.

Το $M' \cup \{\{u, v\}\}$ είναι ένα ταίριασμα στο G με
$|M' \cup \{\{u, v\}\}| = |V|$. □

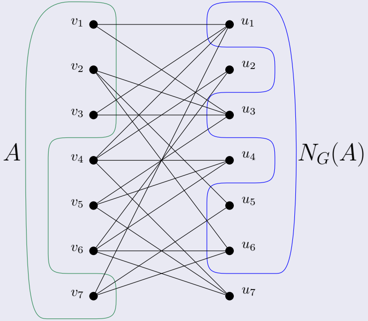
Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω το παρακάτω διμερές γράφημα $G = (V, U, E)$, για το οποίο ισχύει $|W| \leq |N_G(A)|$ για κάθε $W \subseteq V$. Θα βρούμε ένα ταίριασμα M με $|M| = |V| = 7$ ακμές ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος του Hall.



Παράδειγμα (συνέχεια)

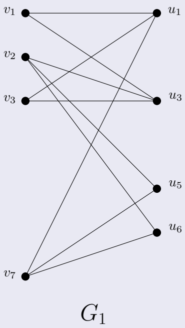
Για το σύνολο κορυφών $A = \{v_1, v_2, v_3, v_7\}$ ισχύει $|A| = |N_G(A)|$.

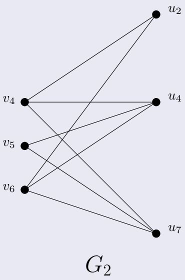


Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

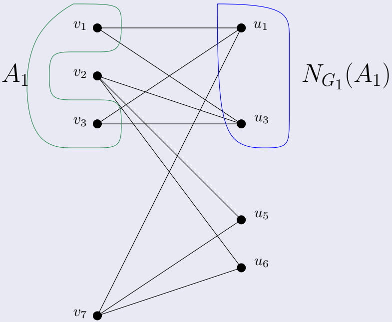
Θα βρούμε δυο ταιριάσματα M_1 και M_2 με $|M_1| = 4$ και $|M_2| = 3$ στα υπογραφήματα G_1 και G_2 του G που παράγονται από τα σύνολα κορυφών $A \cup N_G(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_7, u_1, u_3, u_5, u_6\}$ και $(V - A) \cup (U - N_G(A)) = \{v_4, v_5, v_6, u_2, u_4, u_7\}$.





Παράδειγμα (συνέχεια)

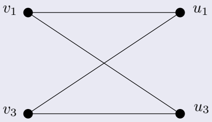
Στο γράφημα G_1 για το σύνολο κορυφών $A_1 = \{v_1, v_3\}$ ισχύει $|A_1| = |N_{G_1}(A_1)|$.



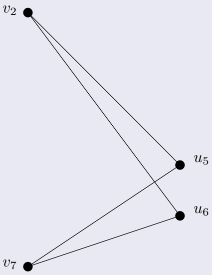
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα βρούμε δυο ταιριάσματα M_{11} και M_{12} με $|M_{11}| = |M_{12}| = 2$ στα υπογραφήματα G_{11} και G_{12} του G_1 που παράγονται από τα σύνολα κορυφών $\{v_1, v_3, u_1, u_3\}$ και $\{v_3, v_7, u_5, u_6\}$.



G_{11}



G_{12}

Παράδειγμα (συνέχεια)

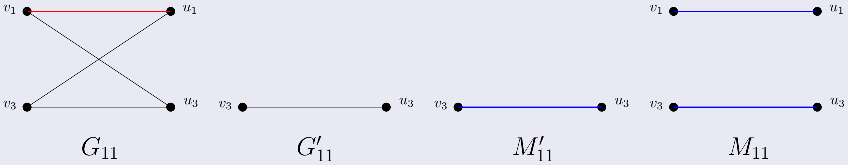
Στο γράφημα G_{11} για τα δύο γνήσια, μη κενά υποσύνολα του συνόλου κορυφών $\{v_1, v_3\}$ ισχύει $N_{G_{11}}(\{v_1\}) = N_{G_{11}}(\{v_3\}) = \{u_1, u_3\}$ και άρα $|\{v_1\}| < |N_{G_{11}}(\{v_1\})|$ και $|\{v_3\}| < |N_{G_{11}}(\{v_3\})|$.

Επιλέγουμε την ακμή $\{v_1, u_1\}$ και θεωρούμε το γράφημα G'_{11} που προκύπτει αν διαγράψουμε τις κορυφές v_1 και u_1 από το G_{11}.

Το G'_{11} έχει μία κορυφή σε κάθε μεριά της διαμέρισης και έχει ένα ταίριασμα M'_{11} που αποτελείται από τη μοναδική ακμή του G'_{11}.

Το M_{11} προκύπτει προσθέτοντας την ακμή $\{v_1, u_1\}$ στο M'_{11}.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο γράφημα G_{12} για τα δύο γνήσια, μη κενά υποσύνολα του συνόλου κορυφών $\{v_2, v_7\}$ ισχύει $N_{G_{12}}(\{v_2\}) = N_{G_{12}}(\{v_7\}) = \{u_5, u_6\}$ και άρα $|\{v_2\}| < |N_{G_{12}}(\{v_2\})|$ και $|\{v_7\}| < |N_{G_{12}}(\{v_7\})|$.

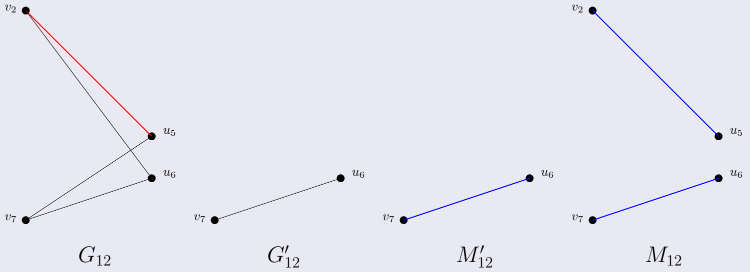
Επιλέγουμε την ακμή $\{v_2, u_5\}$ και θεωρούμε το γράφημα G'_{12} που προκύπτει αν διαγράψουμε τις κορυφές v_2 και u_5 από το G_{12}.

Το G'_{12} έχει μία κορυφή σε κάθε μεριά της διαμέρισης και έχει ένα ταίριασμα M'_{12} που αποτελείται από τη μοναδική ακμή του G'_{12}.

Το M_{12} προκύπτει προσθέτοντας την ακμή $\{v_2, u_5\}$ στο M'_{12}.

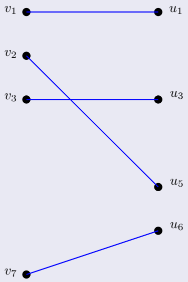
Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

Το ταίριασμα M_1 στο γράφημα G_1 προκύπτει από την ένωση των M_{11} και M_{12}.



M_1

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στο γράφημα G_2 για κάθε γνήσιο, μη κενό υποσύνολα B του συνόλου κορυφών $\{v_4, v_5, v_6\}$ ισχύει $|B| < |N_{G_2}(B)|$.

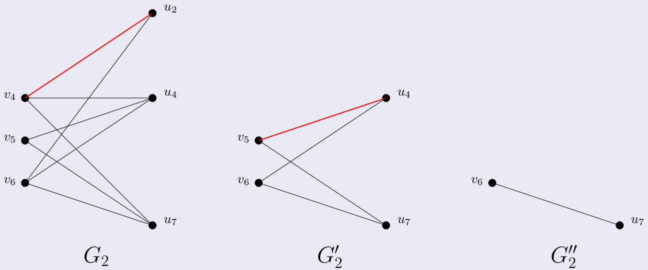
Επιλέγουμε την ακμή $\{v_4, u_2\}$ και θεωρούμε το γράφημα G_2' που προκύπτει αν διαγράψουμε τις κορυφές v_4 και u_2 από το G_2.

Στο γράφημα G_2' για κάθε γνήσιο, μη κενό υποσύνολα C του συνόλου κορυφών $\{v_5, v_6\}$ ισχύει $|C| < |N_{G_2'}(C)|$.

Επιλέγουμε την ακμή $\{v_5, u_4\}$ και θεωρούμε το γράφημα G_2'' που προκύπτει αν διαγράψουμε τις κορυφές v_5 και u_4 από το G_2'.

Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

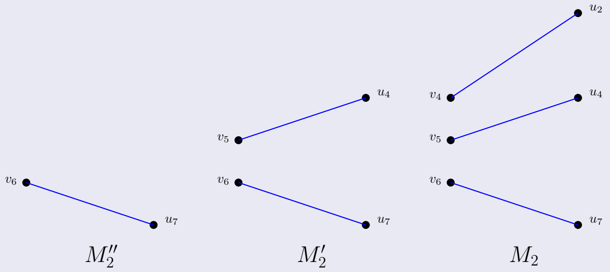


Παράδειγμα (συνέχεια)

Το G_2'' έχει μία κορυφή σε κάθε μεριά της διαμέρισης και έχει ένα ταίριασμα M_2'' που αποτελείται από τη μοναδική ακμή του G_2''.

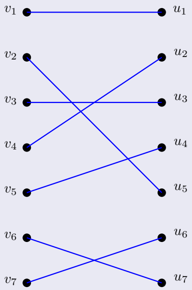
Το M_2' προκύπτει προσθέτοντας την ακμή $\{v_5, u_4\}$ στο M_2'' και το M_2 προκύπτει προσθέτοντας την ακμή $\{v_4, u_2\}$ στο M_2'.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

Το ταίριασμα M στο γράφημα G προκύπτει από την ένωση των M_1 και M_2.



M

Χρωματισμοί

Η κατασκευή που περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος του Hall δεν οδηγεί σε αποδοτικό αλγόριθμο, καθώς δεν υπάρχει αποδοτικός τρόπος για να αποφασιστεί αν υπάρχει σύνολο $A \subset V$ τέτοιο ώστε $|A| = |N_G(A)|$.

Υπάρχουν άλλοι γνωστοί αποδοτικοί αλγόριθμοι για την εύρεση ταιριασμάτων με το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών.

Ωστόσο το θεώρημα του Hall μπορεί να εφαρμοστεί για να αποδείξουμε ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Ένα από αυτά σχετίζεται με το χρωματικό δείκτη ενός διμερούς γραφήματος.

Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται k-κανονικό αν για κάθε κορυφή $v \in V$, $d_G(v) = k$.

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Κάθε k-κανονικό διμερές γράφημα, όπου $k > 0$, έχει τέλειο ταίριασμα.

Απόδειξη

Έστω $G = (V, U, E)$ ένα k-κανονικό διμερές γράφημα.

Έστω S ένα σύνολο κορυφών το οποίο είναι υποσύνολο του V ή υποσύνολο του U.

Επειδή σε κάθε κορυφή του S προσπίπτουν k ακμές και δεν υπάρχει ακμή που να προσπίπτει σε δύο κορυφές του S, το συνολικό πλήθος ακμών που προσπίτουν σε κορυφές του S είναι $k \cdot |S|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή κάθε ακμή του G προσπίπτει σε κάποια κορυφή του V, έχουμε $k \cdot |V| = |E|$.

Ομοίως, $k \cdot |U| = |E|$.

Συνεπώς $|V| = |U| = \frac{|E|}{k}$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ένα σύνολο κορυφών $W \subseteq V$. Τότε στο W προσπίπτουν $k \cdot |W|$ ακμές, οι οποίες είναι κάποιες από τις $k \cdot |N_G(W)|$ που προσπίπτουν στη γειτονιά $N_G(W)$ της W.

Συνεπώς θα πρέπει $k \cdot |W| \leq k \cdot |N_G(W)|$ που συνεπάγεται $|W| \leq |N_G(W)|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Απο το θεώρημα του Hall υπάρχει ένα ταίριασμα M με $|M| = |V|$.

Κάθε κορυφή του V είναι άκρο μίας ακμής του $|M|$ και επειδή $|U| = |V|$ θα πρέπει να ισχύει το ίδιο και για τις κορυφές του U.

Συνεπώς το M είναι τέλειο ταίριασμα. $\square$

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Για κάθε k-κανονικό διμερές γράφημα G με $k > 0$, ισχύει $\chi'(G) = k$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε θεώρημα με επαγωγή στο k.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για $k = 1$ δεν υπάρχουν στο G ακμές που να προσπίπτουν στην ίδια κορυφή. Άρα όλες οι ακμές μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα.

Συνεπώς $\chi'(G) = 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $k = r$.

Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε $(r+1)$-κανονικό διμερές γράφημα $G = (V, U, E)$.

Το G έχει ένα πλήρες ταίριασμα M, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Στο γράφημα $G' = (V, U, E - M)$ ο βαθμός κάθε κορυφής $x \in V \cup U$ είναι $d_G(x) - 1 = r$ (επειδή το M είναι τέλειο ταίριασμα και άρα περιέχει μία ακριβώς ακμή που προσπίπτει στη v).

Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $\chi'(G') = r$.

Έστω c' ένας χρωματισμός των ακμών του G' με χρώματα από ένα σύνολο χρωμάτων C με $|C| = r$ και έστω z ένα νέο χρώμα που δεν ανήκει στο C.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Η ανάθεση χρωμάτων c στις ακμές του G όπου

- $c(e) = c'(e)$ αν $e \in E - M$
- $c(e) = z$ αν $e \in M$

είναι ένας χρωματισμός των ακμών του G με $|C \cup \{z\}| = r + 1$ χρώματα.

Συνεπώς $\chi'(G) \leq r + 1$. Επιπλέον $\chi'(G) \geq \Delta(G) = r + 1$.

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι $\chi'(G) = r + 1$. $\square$

Χρωματισμοί

Θεώρημα

Κάθε διμερές γράφημα G είναι υπογράφημα ενός $\Delta(G)$-κανονικού διμερούς γραφήματος.

Απόδειξη

Έστω $G = (V, U, E)$ ένα διμερές γράφημα και έστω $k = \Delta(G)$.

Θα κατασκευάσουμε ένα k-κανονικό διμερές γράφημα H τέτοιο ώστε το G να είναι υπογράφημα του H, προσθέτοντας ένα κατάλληλο πλήθος κορυφών και ακμών στο G.

Περιγράφουμε στη συνέχεια τα βήματα της κατασκευής του H από το G.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Βήμα 1: Αν $|V| \neq |U|$, τότε επεκτείνουμε το σύνολο από τα V και U που έχει τα λιγότερα στοιχεία, με $||V| - |U||$ κορυφές.

Έστω $V' \supseteq V$ και $U' \supseteq U$ τα σύνολα κορυφών που προκύπτουν μετά την παραπάνω προσθήκη (ισχύει $V' = V$ ή $U' = U$).

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Βήμα 2: Κατασκευάζουμε μία ακολουθία γραφημάτων G_0, G_1, ..., G_m με τον παρακάτω τρόπο:

Θέτουμε $G_0 = (V', U', E)$.

Αν στο γράφημα $G_i = (V', U', E_i)$ υπάρχουν κορυφές $v \in V'$, $u \in U'$ τέτοιες ώστε $d_{G_i}(v) < k$, $d_{G_i}(u) < k$, και $\{v, u\} \notin E_i$, θέτουμε $G_{i+1} = (V', U', E_i \cup \{\{v, u\}\})$.

Σε αντίθετη περίπτωση η κατασκευή της ακολουθίας έχει ολοκληρωθεί $(m = i)$.

Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Βήμα 3: Για κάθε κορυφή $x \in V' \cup U'$ ορίζουμε $r(x) = k - d_{G_m}(x)$. Το $r(x)$ είναι το πλήθος των ακμών που πρέπει να προστεθούν ώστε η κορυφή x να αποκτήσει βαθμό k.

Δεν είναι δυνατό να προσθέσουμε στο G_m μία ακμή που να συνδέει μία κορυφή $v \in V'$ όπου $r(v) > 0$ με μία κορυφή $u \in U'$ όπου $r(u) > 0$, καθώς για κάθε τέτοιο ζύγος κορυφών v, u η ακμή $\{v, u\}$ υπάρχει ήδη στο σύνολο E_m.

Για να μπορέσουμε να προσθέσουμε το απαραίτητο πλήθος προσπιπτουσών ακμών στις κορυφές $x \in V' \cup U'$ με $r(x) > 0$, θα προσθέσουμε νέες κορυφές στο γράφημα G_m.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ο συνολικός αριθμός προσπιτουσών ακμών στις κορυφές του V' που πρέπει να προστεθούν είναι

$$\begin{aligned} a &= \sum_{v \in V'} r(v) \\ &= \sum_{v \in V'} (k - d_{G_m}(v)) \\ &= k \cdot |V'| - \sum_{v \in V'} d_{G_m}(v) \\ &= k \cdot |V'| - |E_m| \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει καθώς κάθε κορυφή του E_m προσπίπτει σε κάποια κορυφή του V'.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ο αντίστοιχος συνολικός αριθμός προσπιτουσών ακμών στις κορυφές του U' που πρέπει να προστεθούν προκύπτει ότι είναι επίσης a:

$$\begin{aligned}
\sum_{u \in U'} r(u) &= \sum_{u \in U'} (k - d_{G_m}(u)) \\
&= k \cdot |U'| - \sum_{u \in U'} d_{G_m}(u) \\
&= k \cdot |U'| - |E_m| \\
&= k \cdot |V'| - |E_m| \\
&= a
\end{aligned}$$

Απόδειξη (συνέχεια)

Θέτουμε $\ell = \max(a, k)$ και κατασκευάζουμε το διμερές γράφημα $G' = (V' \cup S, U' \cup T, E_m \cup F \cup F')$ όπου:

$$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{\ell-1}\}$$

$$T = \{t_0, t_1, \ldots, t_{\ell-1}\}$$

$$F = \{\{s_i, t_{(i+j) \mod \ell}\} \mid 0 \leq i \leq \ell - 1, 1 \leq j \leq k - 1\}$$

$$F' = \{\{s_i, t_i\} \mid 0 \leq i \leq k - a - 1\}$$

Το G' προκύπτει προσθέτοντας δύο σύνολα κορυφών S και T με ℓ κορυφές το καθένα (ένα σε κάθε μεριά του διμερούς γραφήματος) και προσθέτοντας ακμές που συνδέουν κάθε κορυφή του S με $k-1$ κορυφές του T και αντίτροφα. Επιπλέον αν $a < k$, τότε $k - a$ κορυφές S συνδέονται με αντίστοιχες κορυφές του T.

Απόδειξη (συνέχεια)

Σε καθένα από τα σύνολα S και T υπάρχουν a κορυφές βαθμού $k-1$, ενώ οι υπόλοιπες κορυφές τους έχουν βαθμό k.

Το k-κανονικό διμερές γράφημα H προκύπτει από το G' αν προσθέσουμε ένα σύνολο ακμών F'', τέτοιο ώστε

- κάθε κορυφή $v \in V'$ με $r(v) > 0$ να συνδεεται με $r(v)$ κορυφές του συνόλου T, έτσι ώστε διαφορετικές κορυφές του V' να συνδέονται με διαφορετικές κορυφές του T.
- κάθε κορυφή $u \in U'$ με $r(u) > 0$ να συνδεεται με $r(u)$ κορυφές του συνόλου S, έτσι ώστε διαφορετικές κορυφές του U' να συνδέονται με διαφορετικές κορυφές του S.

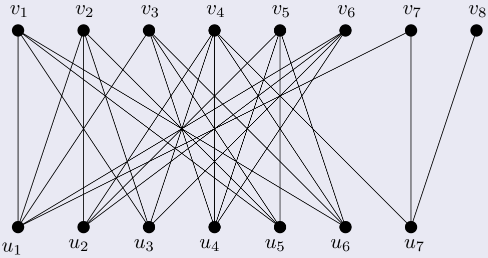
Χρωματισμοί

Απόδειξη (συνέχεια)

Το γράφημα $H = (V' \cup S, U' \cup T, E_m \cup F \cup F' \cup F'')$ είναι k-κανονικό και περιέχει το G ως υπογράφημα. $\square$

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G έχει βαθμό $\Delta(G) = 5$.



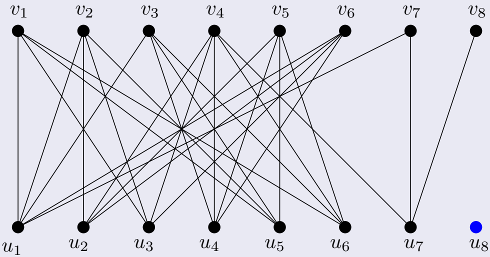
Παράδειγμα (συνέχεια)

Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος θα κατασκευάσουμε ένα γράφημα H το οποίο θα έχει ως υπογράφημα το G.

Οι κορυφές και οι ακμές που προσθέτονται σε κάθε βήμα φαίνονται με μπλε χρώμα.

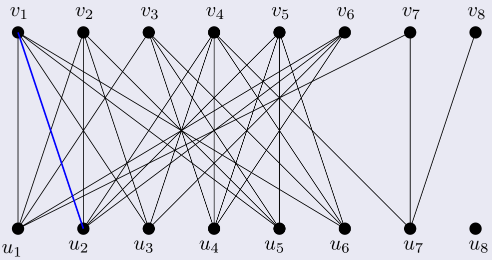
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_0:



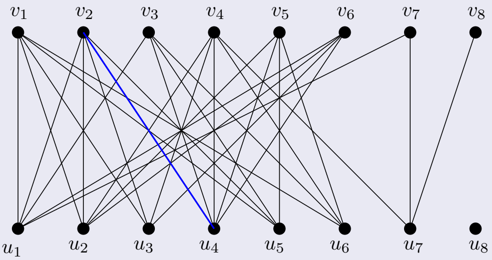
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_1:



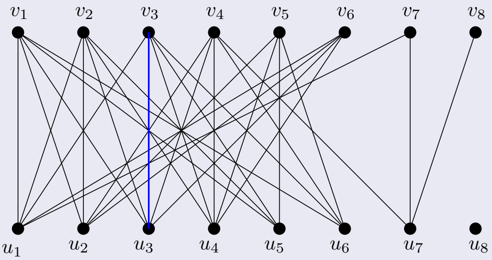
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_2:



Παράδειγμα (συνέχεια)

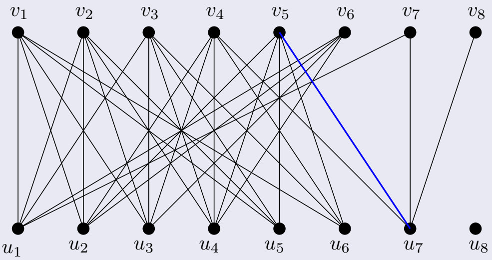
Γράφημα G_3:



Χρωματισμοί

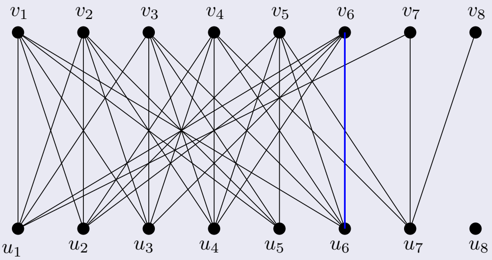
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_4:



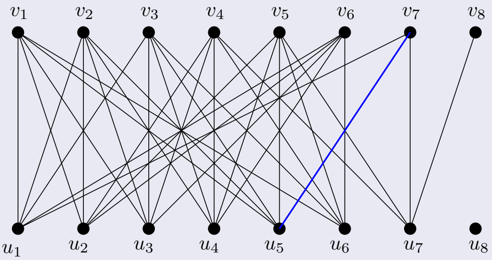
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_5:



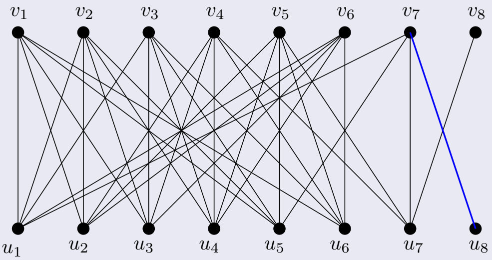
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_6:



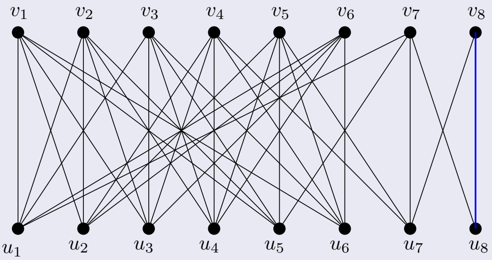
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_7:



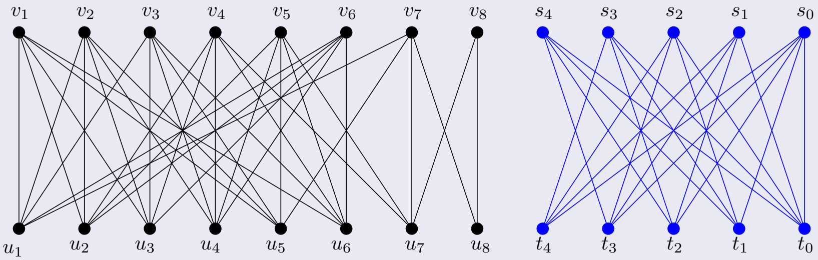
Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα G_8:



Παράδειγμα (συνέχεια)

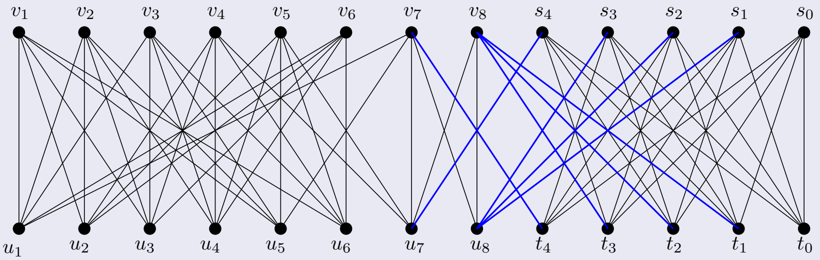
Γράφημα G_9:



Χρωματισμοί

Παράδειγμα (συνέχεια)

Γράφημα H:



Θεώρημα

Για κάθε διμερές γράφημα G, ισχύει $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Απόδειξη

Έστω G ένα διμερές γράφημα και έστω $k = \Delta(G)$.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει ένα k-κανονικό διμερές γράφημα H τέτοιο ώστε το G να είναι υπογράφημα του H.

Επειδή το H είναι k-κανονικό, ισχύει $\chi'(H) = \Delta(H) = k$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω c ένας χρωματισμός του H με k χρώματα.

Ο περιορισμός c' του c στις ακμές του G είναι ένα χρωματισμός των ακμων του G με k το πολύ χρώματα και άρα $\chi'(G) \leq k$.

Επιπλέον $\chi'(G) \geq \Delta(G) = k$.

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει ότι $\chi'(G) = k$. □