Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Ορισμός

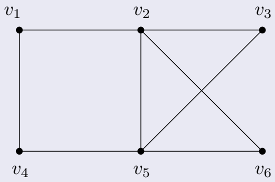
Ένα κύκλωμα (ίχνος) σε ένα μη κατευθυνόμενο ή κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται κύκλωμα Euler (αντίστοιχα ίχνος Euler) αν περνάει μία ακριβώς φορά από κάθε ακμή του G.

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα (ίχνος) Euler, τότε το μήκος του κυλώματος (ίχνους) αυτού είναι $|E|$.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

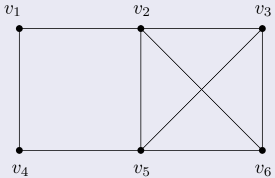
Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα, το κύκλωμα $v_1, v_2, v_6, v_5, v_3, v_2, v_5, v_4, v_1$ είναι κύκλωμα Euler.



Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα δεν έχει κύκλωμα Euler.



Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Στη συνέχεια θα δώσουμε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα γράφημα να έχει κύκλωμα Euler.

Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό και αποδεικνύουμε δύο λήμματα.

Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$ μία διαδρομή στο G. Το υπογράφημα του G που επάγεται από την w είναι το γράφημα (U, F), όπου $U = \bigcup_{i=1}^{k}\{x_i\}$ και $F = \bigcup_{i=1}^{k-1}\{\{x_i, x_i + 1\}\}$.

Το υπογράφημα που επάγεται από μία διαδρομή αποτελείται από τις κορυφές και τις ακμές που περιέχονται στη διαδρομή.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Λήμμα

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και c ένα κύκλωμα στο G. Στο υπογράφημα του G που επάγεται από το c ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη

Εστω $c = x_1, x_2, \ldots, x_k, q_1$ και $C = (U, F)$ το υπογράφημα του G που επάγεται από το c.

Έστω μία οποιδήποτε κορυφή $v \in U$ και έστω $i_1, i_2, \ldots, i_p$ όλες οι θέσεις της ακολουθίας $x_1, x_2, \ldots, x_k$ στις οποίες εμφανίζεται η v (δηλαδή ισχύει $v = x_{i_1} = x_{i_2} = \cdots = x_{i_p}$).

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $v \neq x_1$ (δηλαδή $i_1 \neq 1$), τότε οι ακμές του c με άκρο την v είναι οι $\{x_{i_1-1}, x_{i_1}\}, \{x_{i_1}, x_{i_1+1}\}, \{x_{i_2-1}, x_{i_2}\}, \{x_{i_2}, x_{i_2+1}\}, \ldots \{x_{i_p-1}, x_{i_p}\}, \{x_{i_p}, x_{i_p+1}\}$, οι οποίες είναι ανά δύο διαφορετικές.

Συνεπώς $N_C(v) = \{x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_p-1}, x_{i_p+1}\}$.

Άρα $d_C(v) = |N_C(v)| = 2p$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $v = x_1$ (δηλαδή $i_1 = 1$), τότε οι ακμές του c με άκρο την v είναι οι $\{x_k, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \{x_{i_2-1}, x_{i_2}\}, \{x_{i_2}, x_{i_2+1}\}, \ldots \{x_{i_p-1}, x_{i_p}\}, \{x_{i_p}, x_{i_p+1}\}$, οι οποίες είναι ανά δύο διαφορετικές.

Με τον ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι
$N_C(v) = \{x_2, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_{p-1}-1}, x_{i_{p-1}+1}, x_k\}$.

Άρα $d_C(v) = |N_C(v)| = 2p$.

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση ο βαθμός της V στο C είναι άρτιος αριθμός. □

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Λήμμα

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ στο οποίο ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος αριθμός και έστω $\{u, v\}$ μία ακμή από το E. Τότε υπάρχει κύκλωμα στο G που περνάει από την ακμή $\{u, v\}$.

Απόδειξη

Κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $(x_k = x_1)$ με τον παρακάτω τρόπο:

Θέτουμε $x_1 = u$ και $x_2 = v$. Για $i \geq 2$, αν $x_i \neq x_1$, επιλέγουμε μία ακμή $\{x_i, w\}$ διαφορετική από τις $\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{i-1}, x_i\}$ και θέτουμε $x_{i+1} = w$.

Αν $x_i = x_1$ η κατασκευή του κυκλώματος έχει ολοκληρωθεί $(k = i)$.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι αν $x_i \neq x_1$ η επιλογή της ακμής $\{x_i, w\}$ είναι πάντοτε εφικτή.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω η διαδρομή $x_1, x_2, \ldots, x_i$, όπου $x_i \neq x_1$ και έστω $j_1, j_2, \ldots, j_p$ όλες οι θέσεις της ακολουθίας $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ στις οποίες επανεμφανίζεται η x_i (δηλαδή ισχύει $x_i = x_{j_1} = x_{j_2} = \cdots = x_{j_p}$).

Οι ακμές της διαδρομής $x_1, x_2, \ldots, x_i$ με άκρο την x_i είναι οι $\{x_{j_1-1}, x_{j_1}\}, \{x_{j_1}, x_{j_1+1}\}, \{x_{j_2-1}, x_{j_2}\}, \{x_{j_2}, x_{j_2+1}\}, \ldots \{x_{j_p-1}, x_{j_p}\}, \{x_{j_p}, x_{j_p+1}\}$, $\{x_{i-1}, x_i\}$, οι οποίες είναι ανά δύο διαφορετικές.

Συνεπώς το συνολικό πλήθος ακμών στην $x_1, x_2, \ldots, x_i$ που προσπίπτουν στην x_i είναι $2p+1$, που είναι περιττός αριθμός.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή το συνολικό πλήθος των ακμών που προσπίπτουν στην x_i είναι άρτιος αριθμός, υπάρχει πάντα μία ακμή $\{x_i, w\}$ που προσπίπτει στην x_i, η οποία είναι διαφορετική από τις $\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{i-1}, x_i\}$.

Συνεπώς η κατασκευή του κυκλώματος $x_1, x_2, \ldots, x_k$, $(x_k = x_1)$ είναι πάντα εφικτή αν οι βαθμοί όλων των κορυφών είναι άρτιοι αριθμοί. □

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Θεώρημα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν $E \neq \emptyset$, ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι άρτιος και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη

Έστω ότι το G έχει κύκλωμα Euler. Επειδή κάθε κύκλωμα έχει μήκος τουλάχιστον 3, το σύνολο των ακμών του γραφήματος είναι μη κενό.

Επίσης, επειδή τα άκρα δύο οποιονδήποτε ακμών του κυκλώματος συνδέονται με μονοπάτι, όλες οι ακμές του κυκλώματος Euler ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Επειδή το κύκλωμα Euler περιέχει όλες τις ακμές του G, η παραπάνω πρόταση συνεπάγεται ότι όλες οι ακμές του G ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Απόδειξη (συνέχεια)

Επίσης κάθε κορυφή του γραφήματος είτε έχει βαθμό 0, που είναι άρτιος αριθμός είτε ανήκει στο σύνολο των κορυφών U του γραφήματος $C = (U, F)$ που επάγεται από το κύκλωμα Euler.

Επειδή το κύκλωμα Euler περιλαμβάνει όλες τις ακμές του γραφήματος, ισχύει $F = E$ και άρα για κάθε κορυφή $v \in U$ ισχύει $d_G(v) = d_C(v)$, το οποίο είναι άρτιος αριθμός, σύμφωνα με το πρώτο λήμμα.

Συνεπώς ο βαθμός κάθε κορυφής στο G είναι άρτιος.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αντίστροφα, έστω ότι $E \neq \emptyset$, ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι άρτιος και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα $G' = (V', E')$ του G.

Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία κυκλωμάτων $c_0, c_1, c_2, \dots, c_k$, όπου το c_k θα είναι ένα κύκλωμα Euler στο G.

Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε ακμή και κατασκευάζουμε έναν κύκλωμα c_0 σύμφωνα με το δεύτερο λήμμα.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ο σχηματισμός της ακολουθίας γίνεται με τον παρακάτω τρόπο:

Έστω $c_i = x_1, x_2, \ldots, x_\ell, x_1$.

Αν το c_i είναι κύκλωμα Euler, τότε η κατασκευή της ακολουθίας έχει ολοκληρωθεί ($k = i$).

Αν το c_i δεν είναι κύκλωμα Euler, τότε κατασκευάζουμε το c_{i+1} με την παρακάτω διαδικασία:

Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε το γράφημα (U_i, F_i), που επάγεται από το c_i και ορίζουμε το γράφημα $G_i = G - F_i$.

Επειδή στο G και στο (U_i, F_i) ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος αριθμός, ισχύει το ίδιο και στο G_i.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $U_i = V'$ τότε όλες οι ακμές του G_i έχουν προφανώς και τα δύο τους άκρα στο σύνολο U_i.

Αν $U_i \subset V'$, τότε επειδή η G' είναι συνεκτική συνιστώσα, υπάρχει μία ακμή που συνδέει μία κορυφή του U_i με μία κορυφή του $V' - U_i$. Η ακμή αυτή δεν μπορεί να ανήκει στο F_i και άρα είναι ακμή του G_i.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει μία ακμή του G_i που έχει το ένα άκρο της στο U_i. Επιλέγουμε μία τέτοια ακμή $\{y_0, y_1\}$, όπου $y_0 \in U_i$ και κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα $c_i' = y_0, y_1, \ldots, y_r, y_0$ στο G_i εφαρμόζοντας το δεύτερο λήμμα.

Απόδειξη (συνέχεια)

Με βάση την επιλογή της y_0 ισχύει $y_0 = x_j$, για κάποιο j, $1 \leq j \leq \ell$.

Ορίζουμε το κύκλωμα

$$c_{i+1} = x_1, x_2, \ldots, \underbrace{x_j}_{=y_0}, y_1, \ldots, y_r, \underbrace{y_0}_{=x_j}, x_{j+1}, \ldots, x_\ell, x_1.$$

Επειδή οι ακμές του c_i ανήκουν στο F_i και του c_i' ανήκουν στο $E - F_i$, το c_{i+1} περιέχει κάθε ακμή του E το πολύ μία φορά και άρα είναι πράγματι κύκλωμα.

Απόδειξη (συνέχεια)

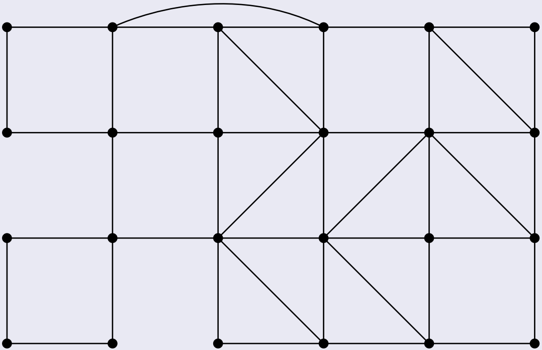
Επειδή το κύκλωμα c_{i+1} περιέχει περισσότερες ακμές από το c_i και οι ακμές του E χρησιμοποιούνται μία φορά η καθεμία, η κατασκευή της ακολουθίας ολοκληρώνεται σε πεπερασμένο πλήθος βήματων και το c_k είναι ένα κύκλωμα Euler στο γράφημα G.

Πόρισμα

Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν $E \neq \emptyset$ και ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι άρτιος.

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα είναι συνεκτικό και ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος αριθμός.



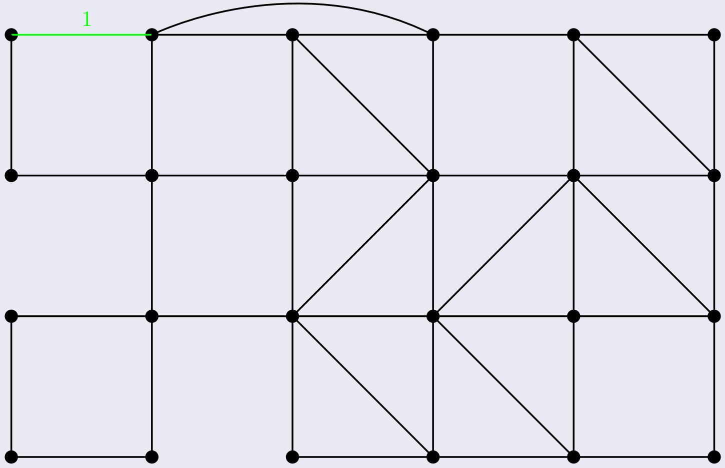
Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφονται στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος ώστε να βρούμε έναν κύκλωμα Euler στο γράφημα αυτό.

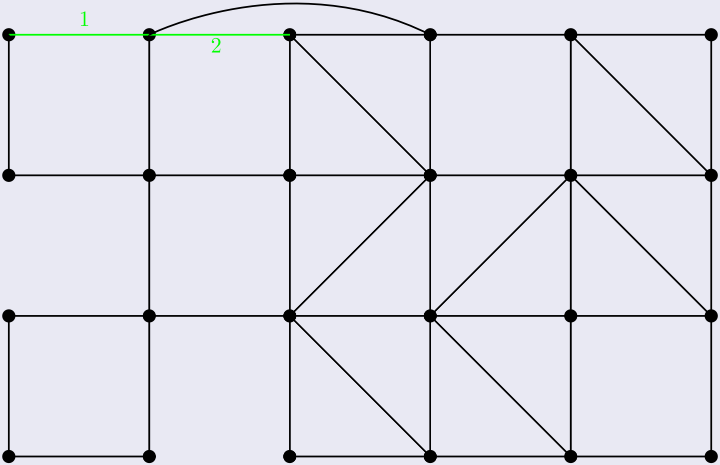
Επιλέγουμε μία ακμή (με αυθαίρετο τρόπο) και κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα c_0. Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα φαίνονται με πράσινο χρώμα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

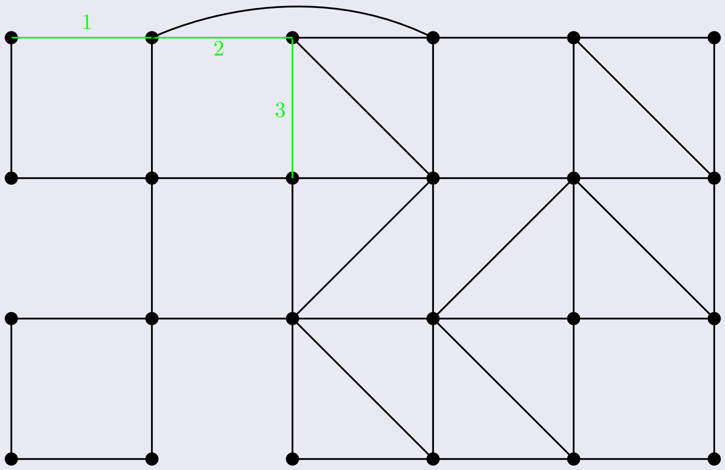
Παράδειγμα (συνέχεια)



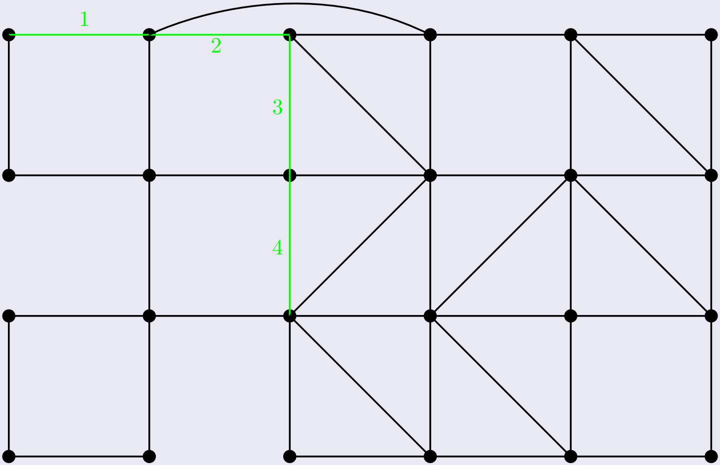
Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

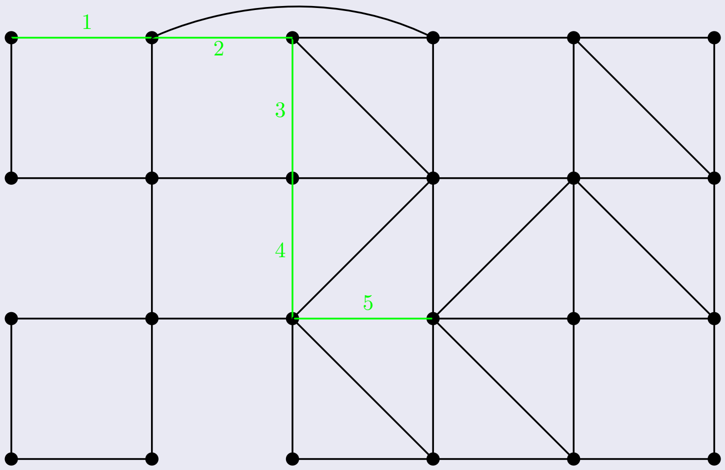


Παράδειγμα (συνέχεια)

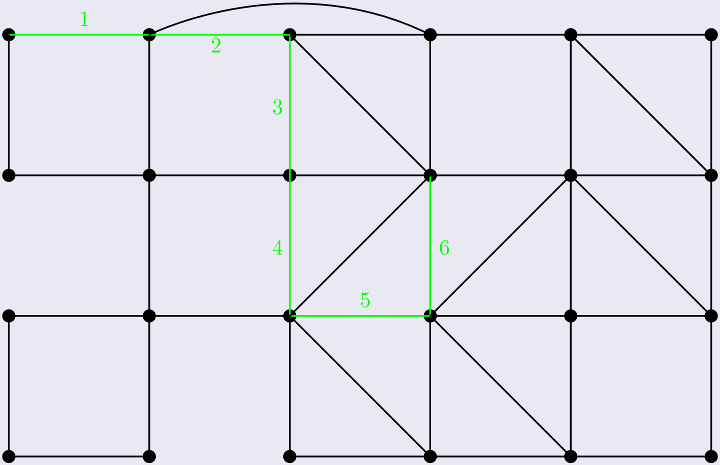


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

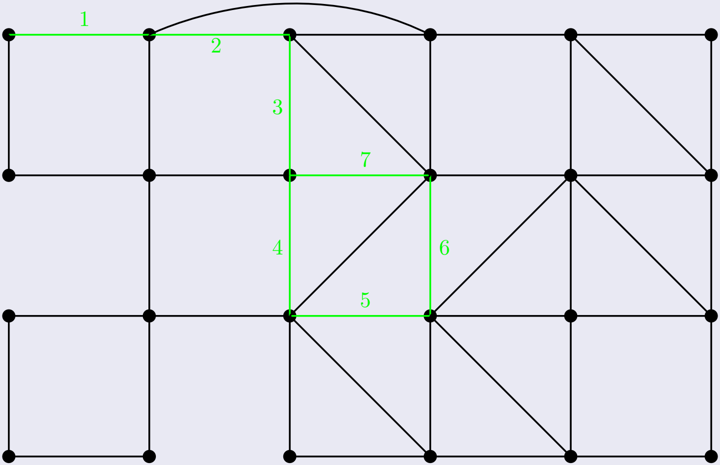
Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

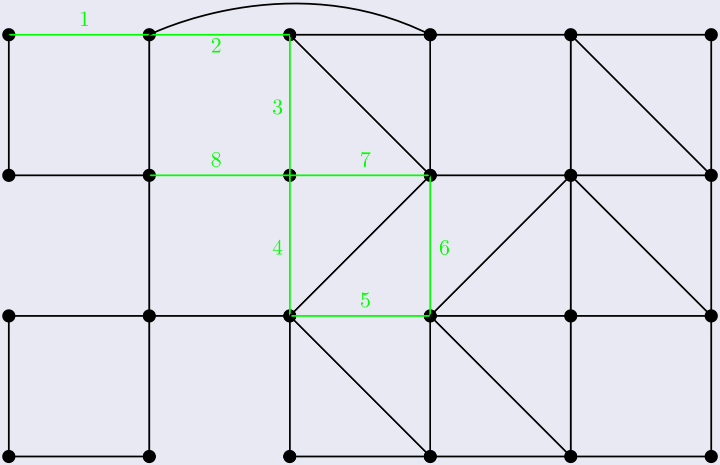


Παράδειγμα (συνέχεια)



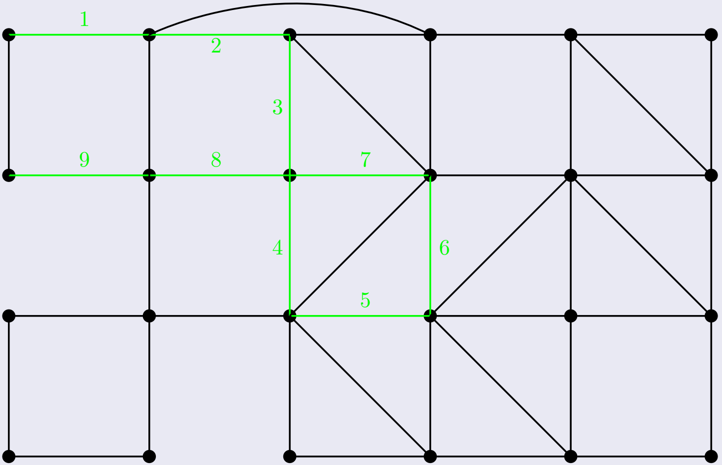
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

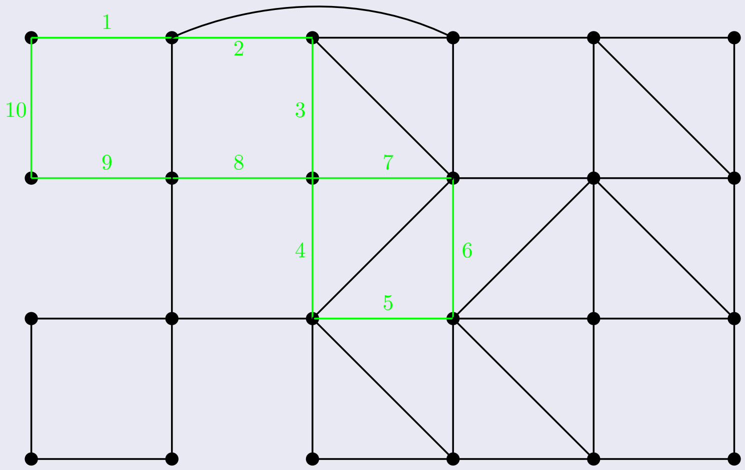


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)



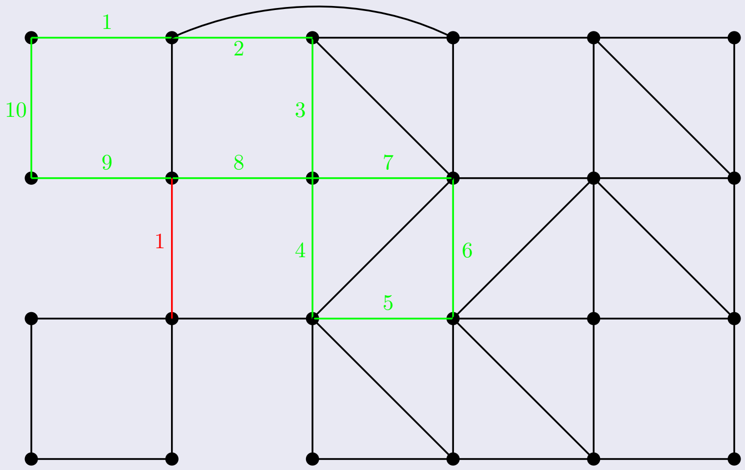
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στη συνέχεια επιλέγουμε μία ακμή που δεν ανήκει στο c_0 αλλά το ένα άκρο της ανήκει c_0 και κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα c_0'.

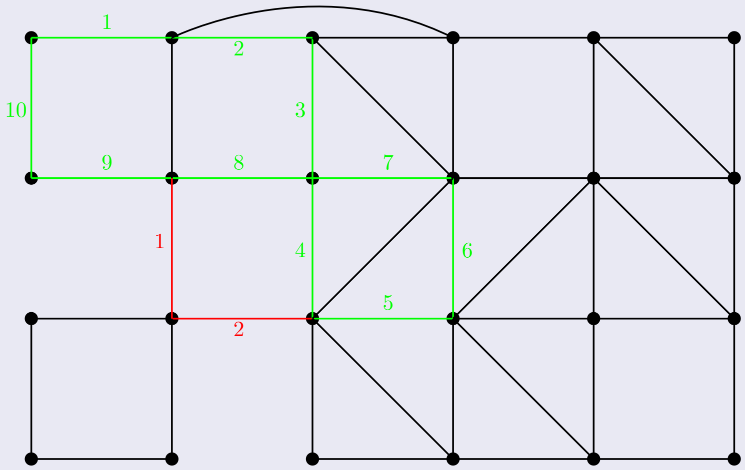
Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_0' φαίνονται με κόκκινο χρώμα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

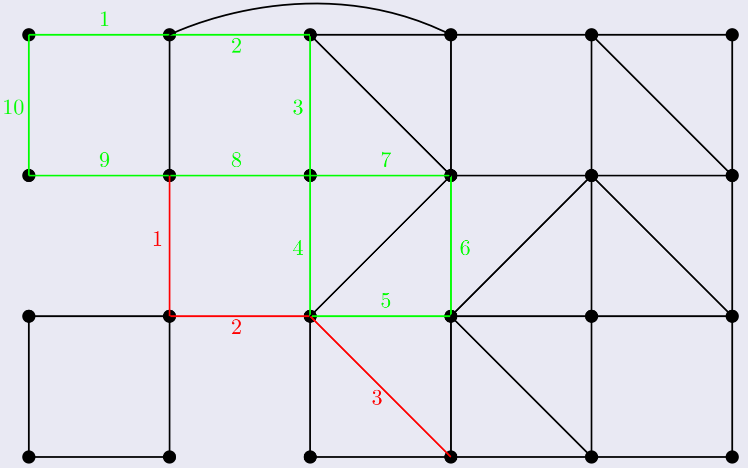


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

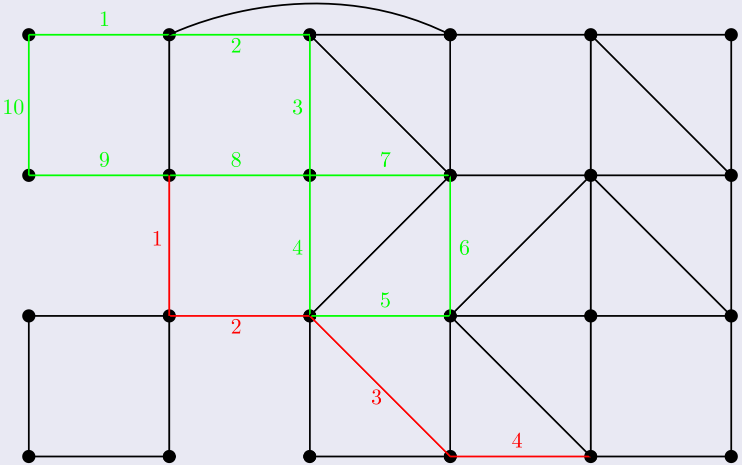
Παράδειγμα (συνέχεια)



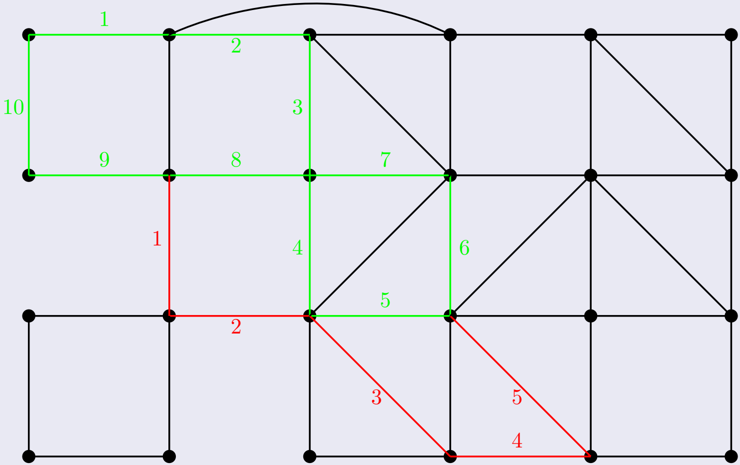
Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

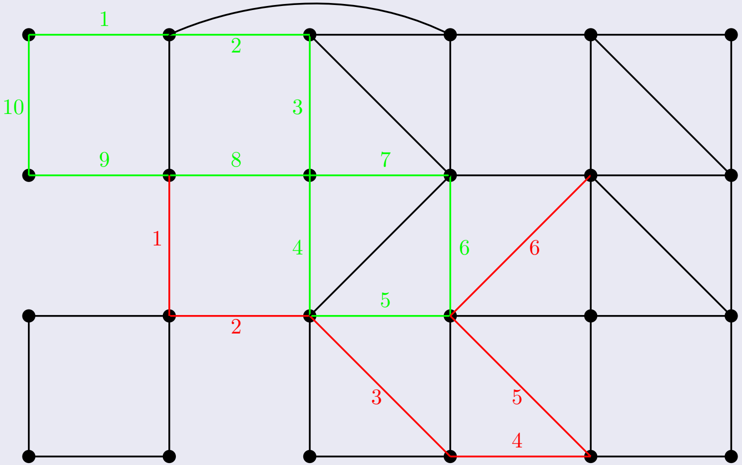


Παράδειγμα (συνέχεια)



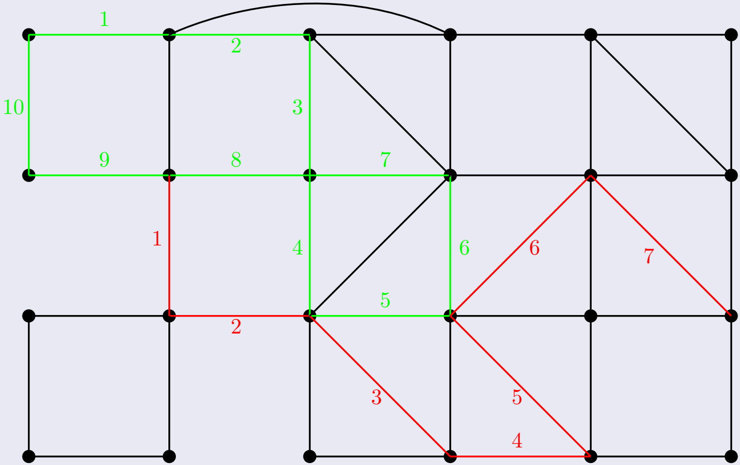
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



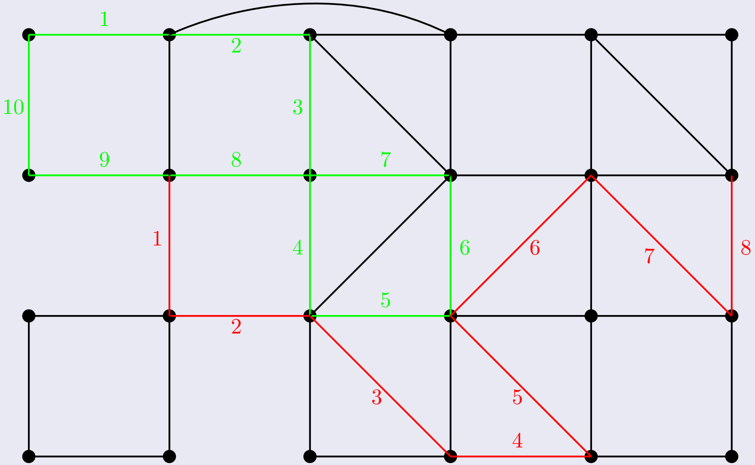
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



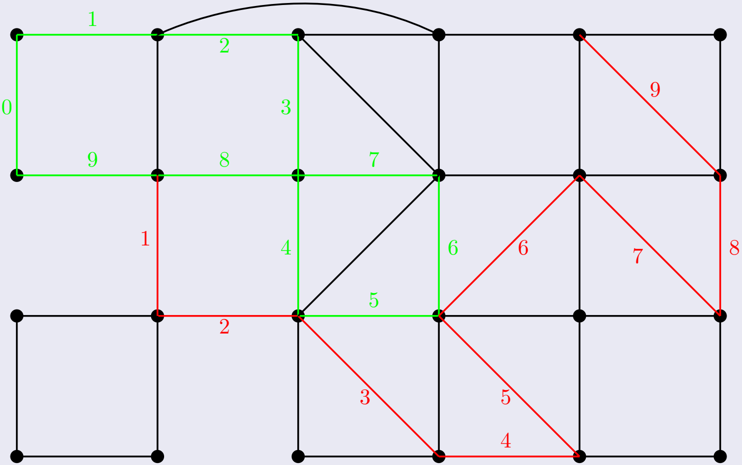
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



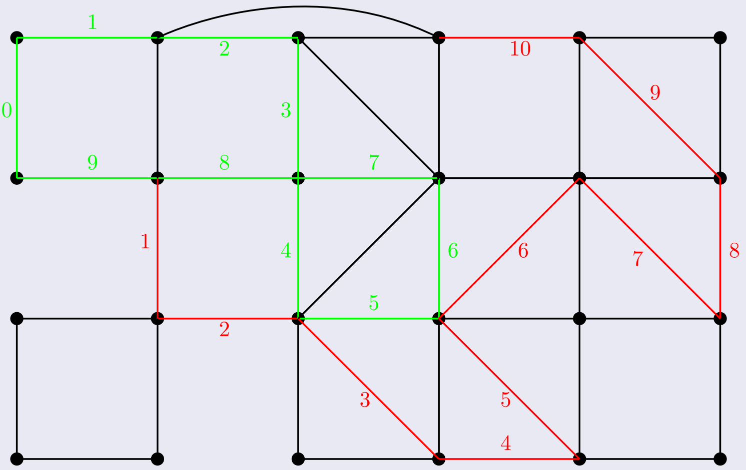
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



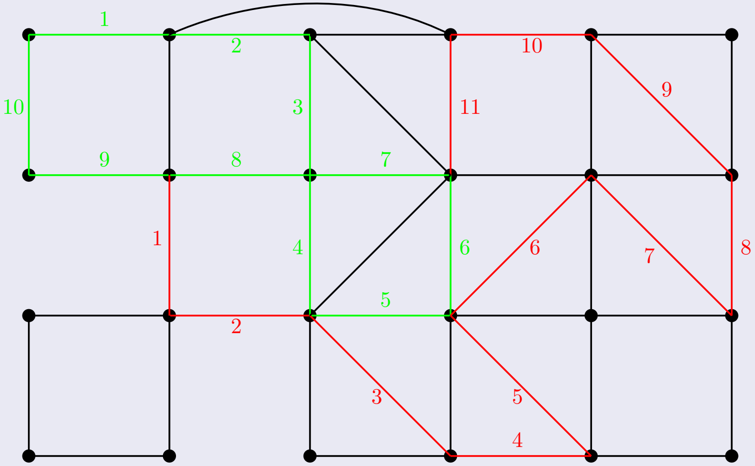
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

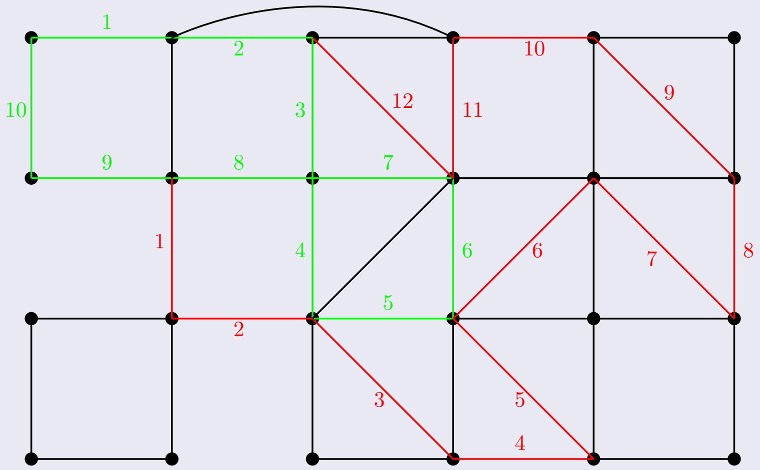


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

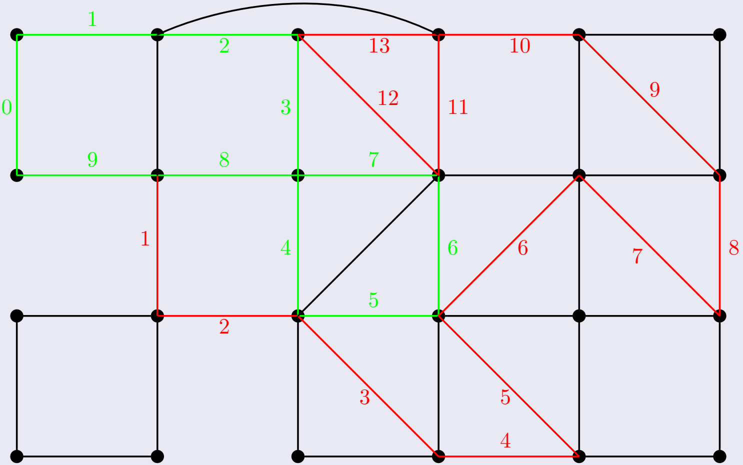


Παράδειγμα (συνέχεια)



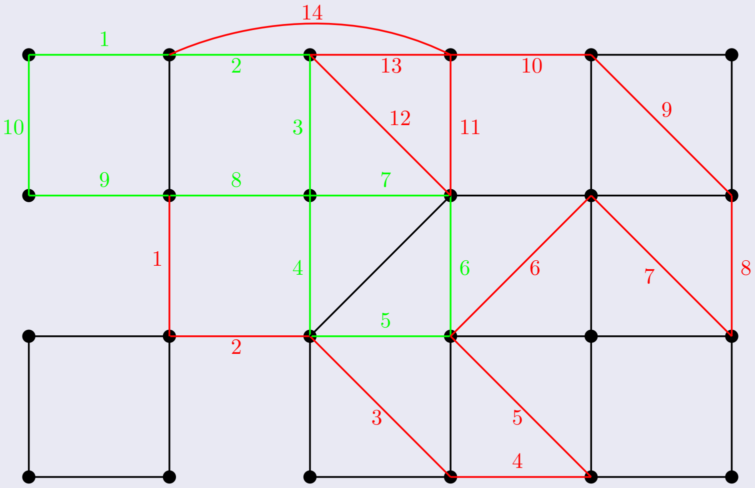
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

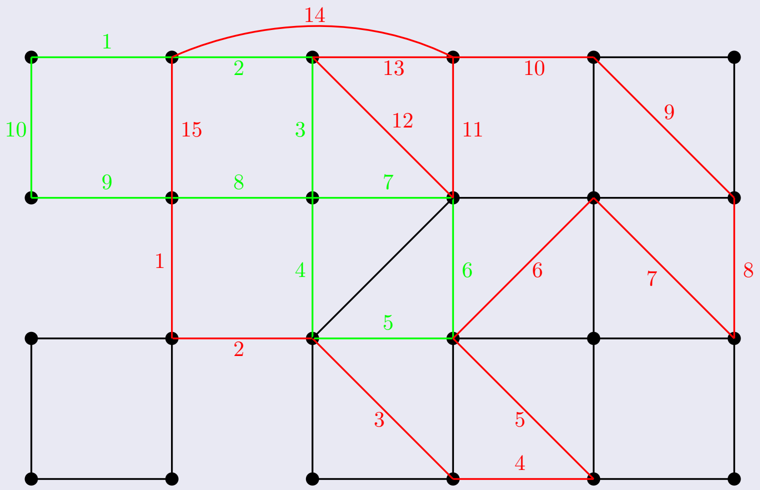


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)



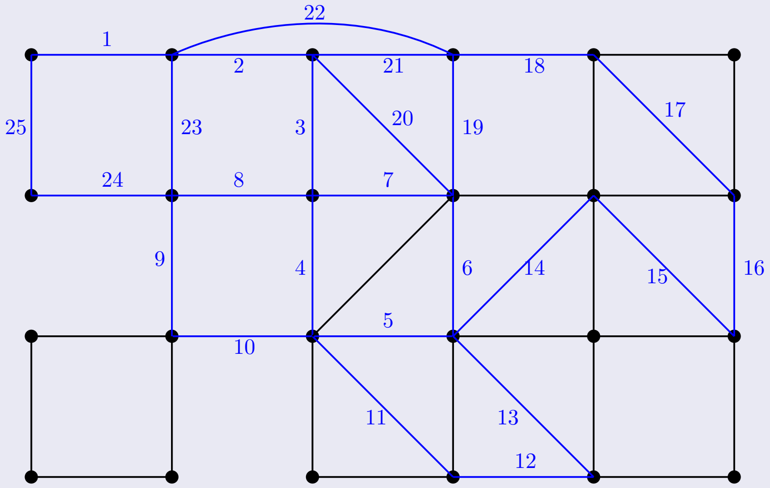
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνδυάζοντας τα κυκλώματα c_0 και c_0', σχηματίζουμε το κύκλωμα c_1.

Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_1 φαίνονται με μπλε χρώμα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

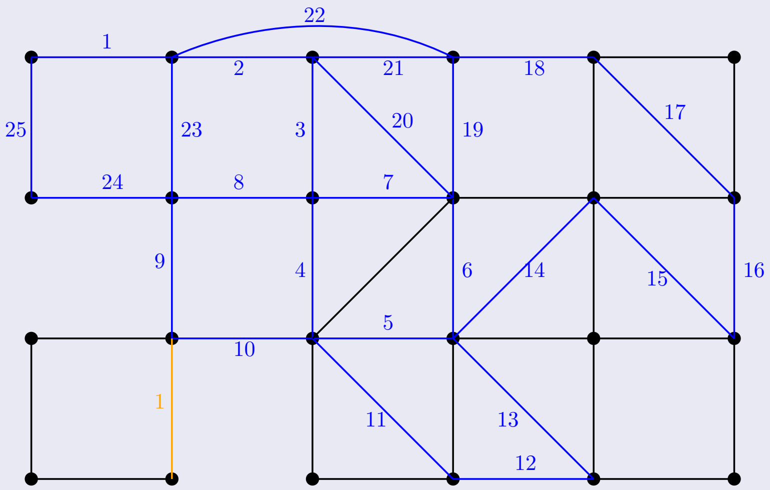


Παράδειγμα (συνέχεια)

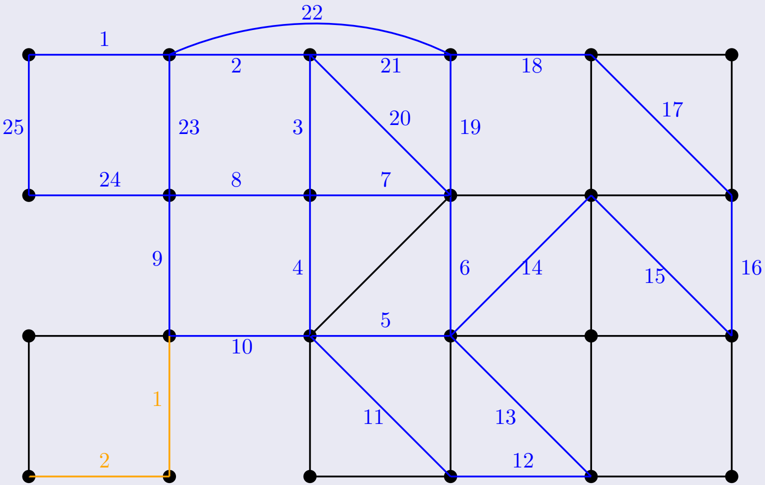
Στη συνέχεια επιλέγουμε μία ακμή που δεν ανήκει στο c_1 αλλά το ένα άκρο της ανήκει c_1 και κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα c_1'.

Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_1' φαίνονται με κίτρινο χρώμα.

Παράδειγμα (συνέχεια)

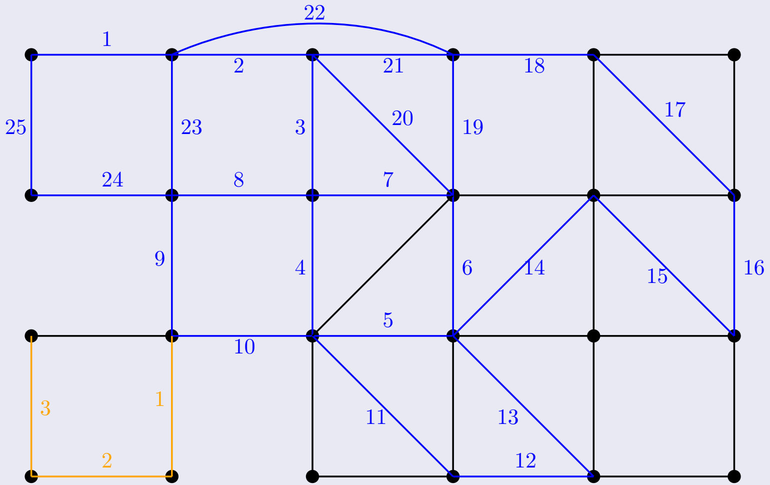


Παράδειγμα (συνέχεια)



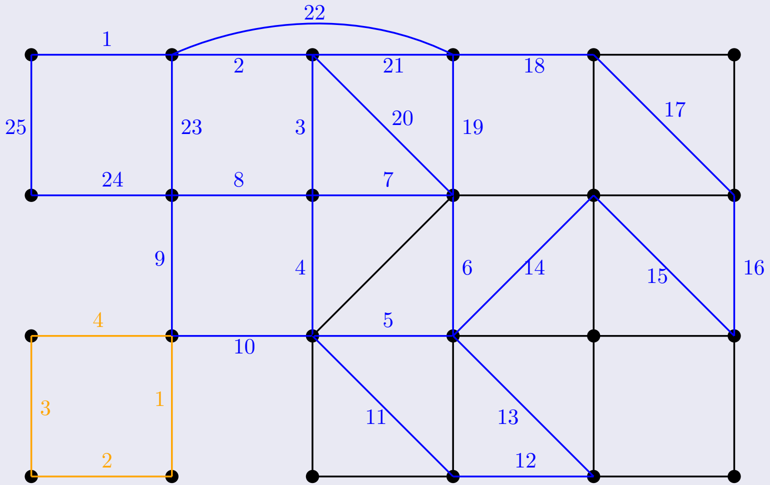
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



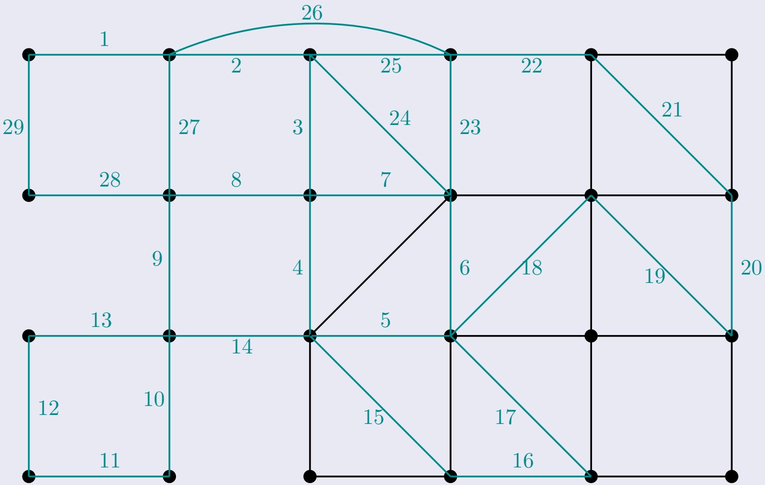
Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνδυάζοντας τα κυκλώματα c_1 και c_1', σχηματίζουμε το κύκλωμα c_2.

Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_2 φαίνονται με γαλαζοπράσινο χρώμα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



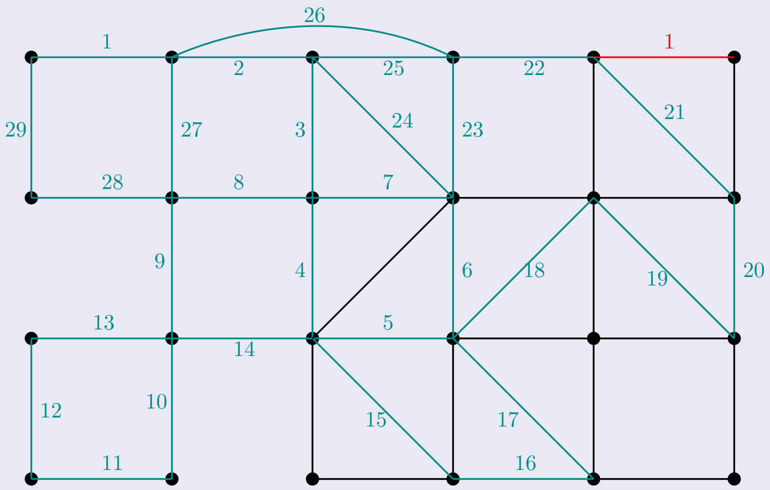
Παράδειγμα (συνέχεια)

Στη συνέχεια επιλέγουμε μία ακμή που δεν ανήκει στο c_2 αλλά το ένα άκρο της ανήκει c_2 και κατασκευάζουμε ένα κύκλωμα c_2'.

Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_2' φαίνονται με κόκκινο χρώμα.

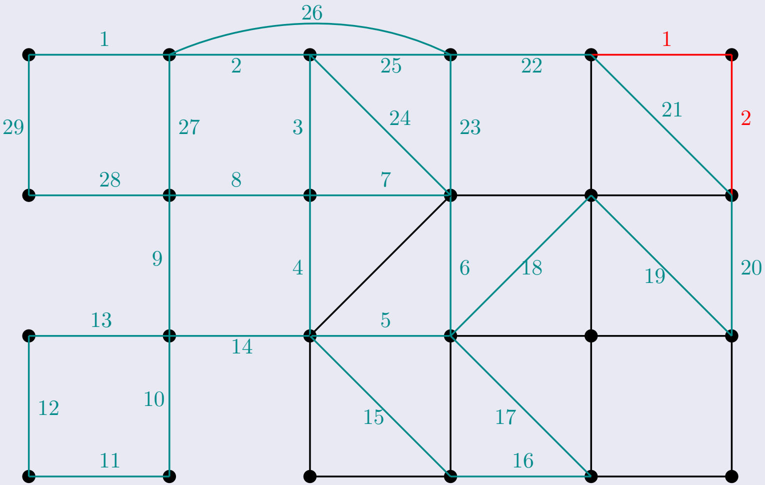
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



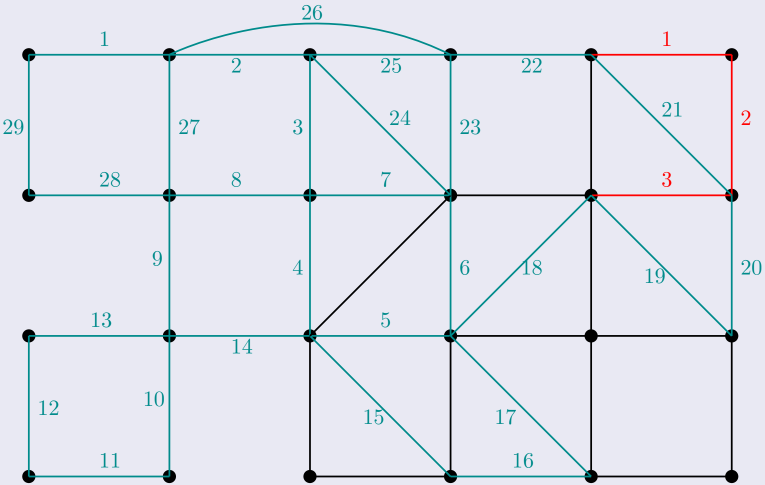
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



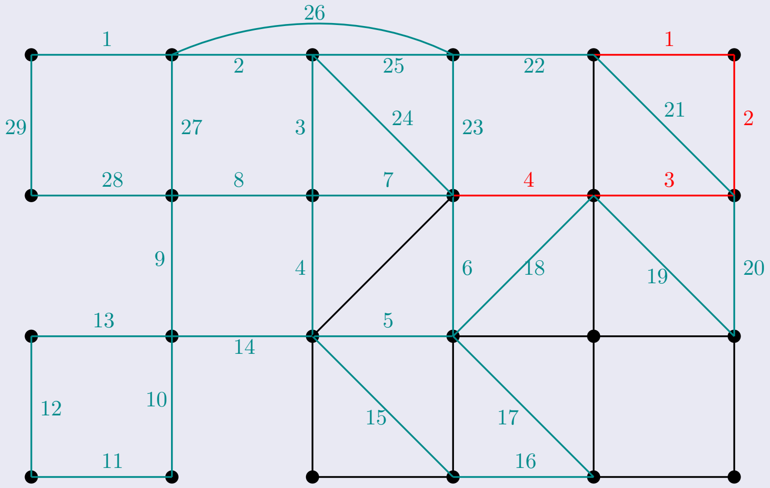
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



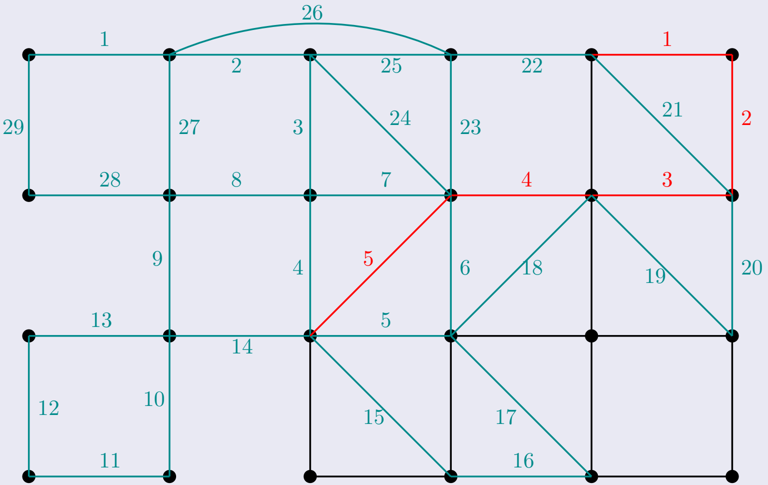
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

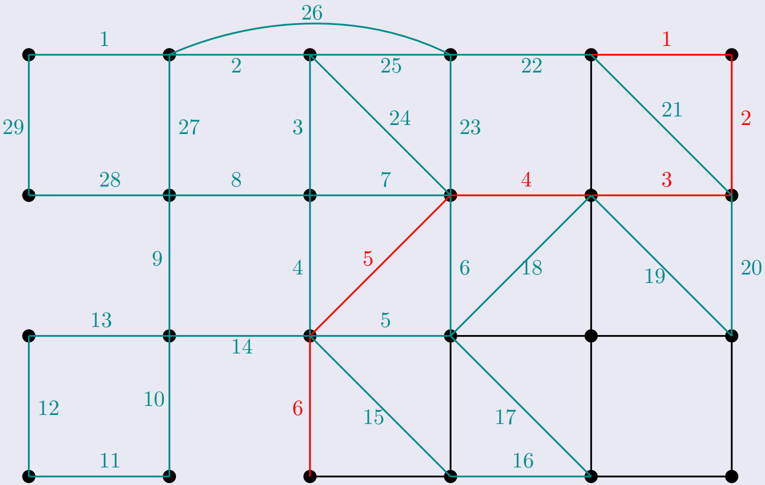


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

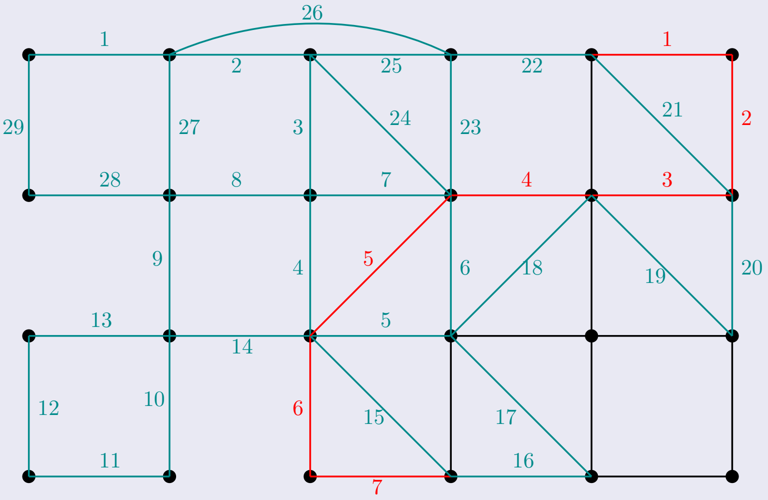


Παράδειγμα (συνέχεια)

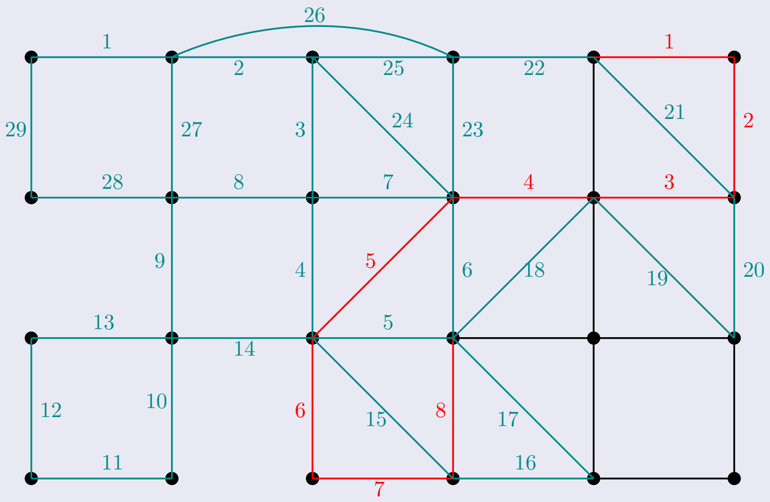


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

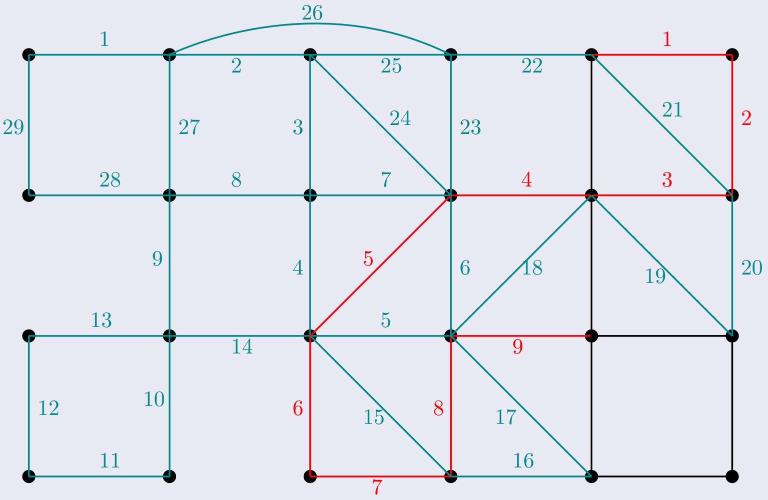


Παράδειγμα (συνέχεια)



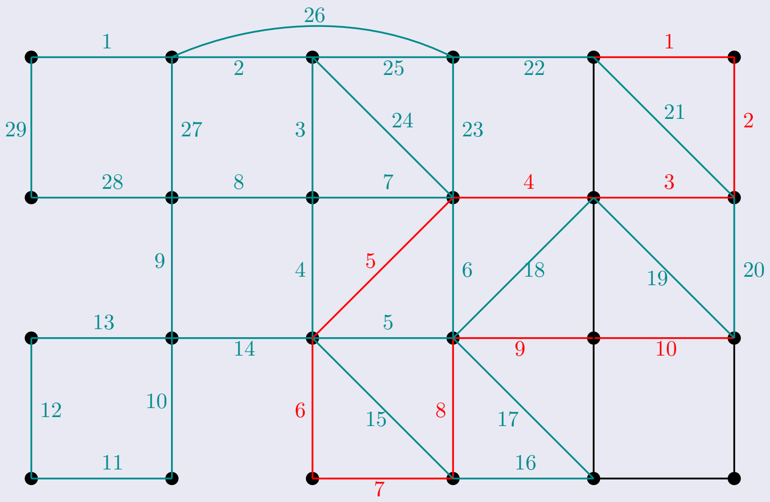
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



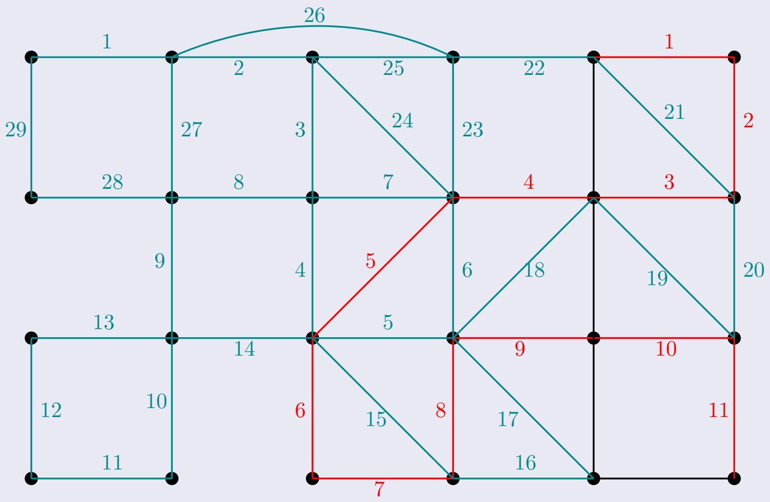
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



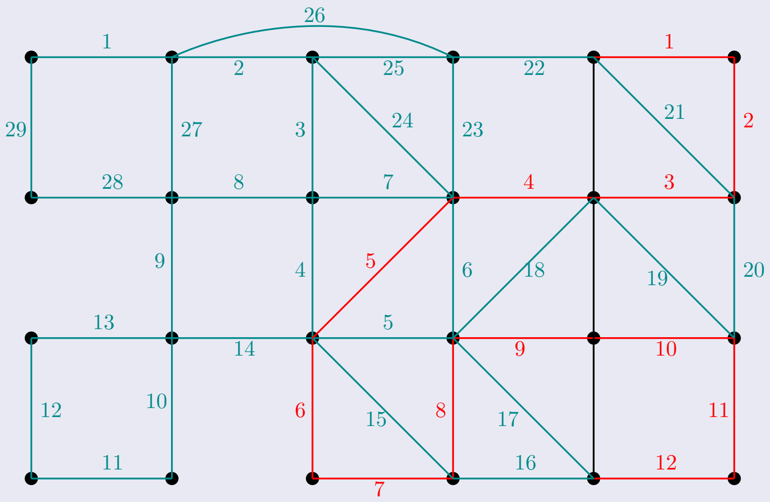
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



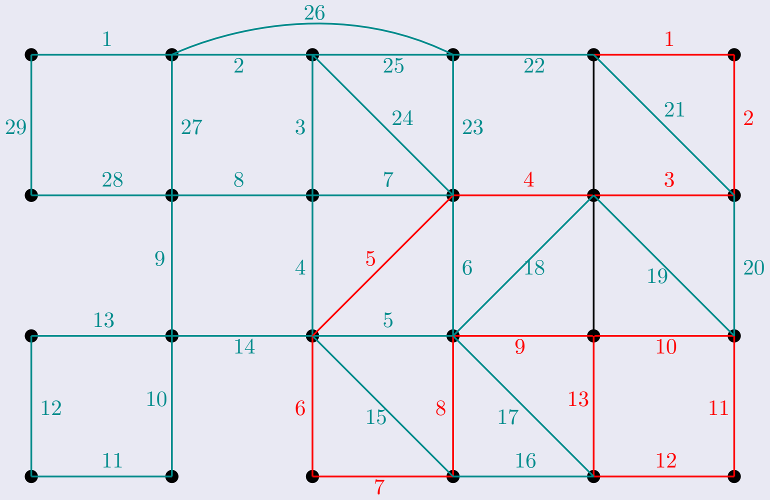
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



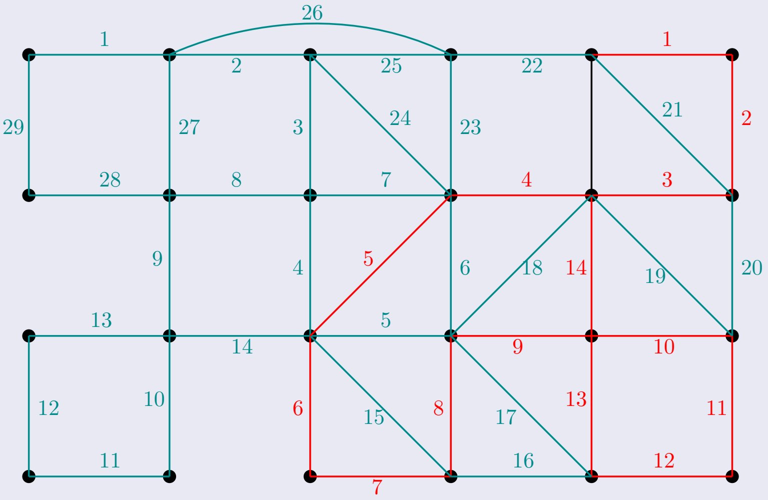
Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)

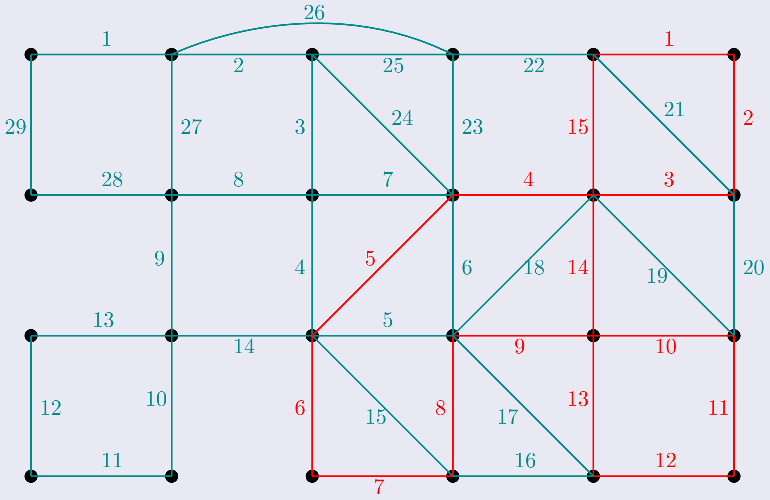


Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

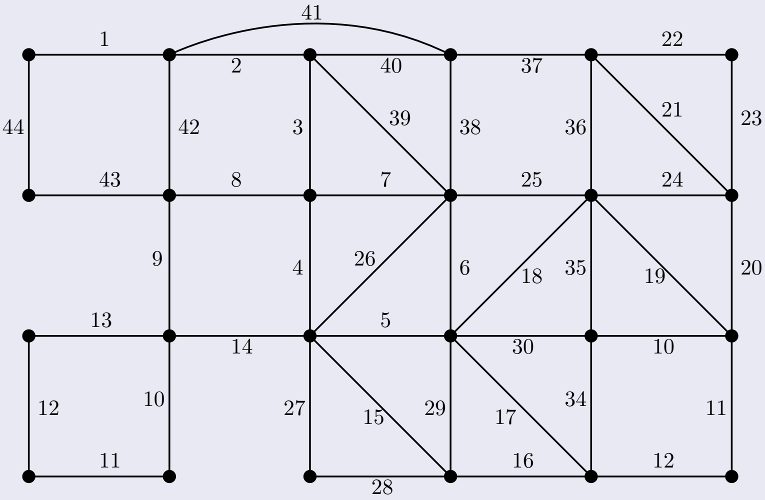


Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνδυάζοντας τα κυκλώματα c_2 και c_2', σχηματίζουμε το κύκλωμα c_3.

Οι ακμές που σχηματίζουν το κύκλωμα c_3, ο οποίος είναι ένα κύκλωμα Euler.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Θεώρημα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $E \neq \emptyset$ έχει ίχνος Euler αν και μόνο αν δύο ακριβώς κορυφές του έχουν περιττό βαθμό και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Απόδειξη

Έστω ότι το G έχει ίχνος Euler και έστω $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ένα τέτοιο ίχνος. Επειδή το γράφημα περιέχει τουλάχιστον μία ακμή, το ίχνος Euler έχει μήκος τουλάχιστον 1 και άρα $x_1 \neq x_k$ (επειδή το ίχνος είναι εξ ορισμού ανοικτή διαδρομή).

Κατασκευάζουμε το γράφημα $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{\{x_1, w\}, \{x_k, w\}\}$ το οποίο προκύπτει προσθέτοντας στο G μία νέα κορυφή και τις ακμές που ενώνουν αυτή την νέα κορυφή με τα δύο άκρα του ίχνους Euler.

Απόδειξη (συνέχεια)

Τότε η ακολουθία κορυφών $w, x_1, x_2, \ldots, x_k, w$ είναι ένα κύκλωμα Euler στο γράφημα G'.

Επειδή το G' έχει κύκλωμα Euler, ο βαθμός κάθε κορυφής του είναι άρτιος αριθμός.

Για τις δύο κορυφές x_1 και x_k που είναι τα άκρα του ίχνους Euler στο γράφημα G ισχύει $d_G(x_1) = d_{G'}(x_1) - 1$ και $d_G(x_k) = d_{G'}(x_k) - 1$.

Για κάθε κορυφή $v \in V - \{x_1, x_k\}$ ισχύει $d_G(v) = d_{G'}(v)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή για κάθε κορυφή $v \in V$ το $d_{G'}(v)$ είναι άρτιος αριθμός, από τα παραπάνω προκύπτει ότι $d_G(x_1)$ και $d_G(x_k)$ είναι περιττοί αριθμοί και για κάθε κορυφή $v \in V - \{x_1, x_k\}$ το $d_G(v)$ είναι άρτιος αριθμός.

Συνεπώς στο γράφημα G υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό. Επιπλέον, επειδή το ίχνος Euler περιέχει όλες τις ακμές του γραφήματος, οι ακμές αυτές βρίσκονται σε μία μοναδική συνεκτική συνιστώσα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Απόδειξη

Αντίστροφα, έστω ότι δύο ακριβώς κορυφές του G έχουν περιττό βαθμό και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Έστω t, u οι δύο κορυφές περιττού βαθμού στο G.

Κατασκευάζουμε το γράφημα $G' = (V \cup \{w\}, E \cup \{\{t, w\}, \{u, w\}\}$ το οποίο προκύπτει προσθέτοντας στο G μία νέα κορυφή και τις ακμές που ενώνουν αυτή την νέα κορυφή με τις δύο κορυφές που έχουν περιττο βαθμό στο G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ισχύει $d_{G'}(t) = d_G(t) + 1$, $d_{G'}(u) = d_G(u) + 1$ και $d_{G'}(v) = d_G(v)$ για κάθε $v \in V - \{x_1, x_k\}$.

Επειδή τα $d_G(t)$ και $d_G(u)$ είναι περιττοί αριθμοί και για κάθε $v \in V - \{x_1, x_k\}$ το $d_G(w)$ είναι άρτιος αριθμός, από τα παραπάνω προκύπτει ότι ο βαθμός κάθε κορυφής στο G' είναι άρτιος αριθμός.

Επιπλέον το σύνολο ακμών του G' είναι μη κενό και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς το γράφημα G' έχει ένα κύκλωμα Euler $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_1$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_1 = w$, $x_2 = t$ και $x_m = u$.

Τότε η ακουλουθία $x_2, \ldots, x_m$ είναι ένα ίχνος Euler στο G.

Συνεπώς το G έχει ίχνος Euler. $\square$

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Πόρισμα

Ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $E \neq \emptyset$ έχει ίχνος Euler αν και μόνο αν δύο ακριβώς κορυφές του έχουν περιττό βαθμό.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παρατηρούμε ότι κάθε γράφημε $G = (V, E)$ όπου $E = \emptyset$ έχει ίχνος Euler, παρότι κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό (ίσο με 0), καθώς κάθε ίχνος μήκους 0 σε αυτό το γράφημα είναι ίχνος Euler.

Για αυτό το λόγο το προηγούμενο θεώρημα αναφέρεται ρητά σε γραφήματα με σύνολα τα οποία είναι δεν είναι κενά.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Παρακάτω παραθέτουμε (χωρίς απόδειξη) τα θεωρήματα που δίνουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη κυκλωμάτων και ιχνών Euler σε κατευθυνόμενα γραφήματα.

Οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν με ανάλογο τρόπο, όπως για τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Θεώρημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν $E \neq \emptyset$, $d_G^-(v) = d_G^+(v)$ για κάθε κορυφή $v \in V$ και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα

Πόρισμα

Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν $E \neq \emptyset$ και $d_G^-(v) = d_G^+(v)$ για κάθε κορυφή $v \in V$.

Κυκλώματα και Ίχνη Euler

Θεώρημα

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με $E \neq \emptyset$ έχει ίχνος Euler αν και μόνο αν υπάρχουν κορυφές $t, u \in V$ τέτοιες ώστε $d_G^-(t) = d_G^+(t) - 1$ και $d_G^-(u) = d_G^+(u) + 1$, για κάθε κορυφή $v \in V - \{t, u\}$ ισχύει $d_G^-(v) = d_G^+(v)$ και όλες οι ακμές του ανήκουν στην ίδια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.

Πόρισμα

Ένα ισχυρά συνεκτικό κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με $E \neq \emptyset$ έχει ίχνος Euler αν και μόνο αν υπάρχουν κορυφές $t, u \in V$ τέτοιες ώστε $d_G^-(t) = d_G^+(t) - 1$ και $d_G^-(u) = d_G^+(u) + 1$, για κάθε κορυφή $v \in V - \{t, u\}$ ισχύει $d_G^-(v) = d_G^+(v)$.