Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

1 Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Περιεχόμενα

1 Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

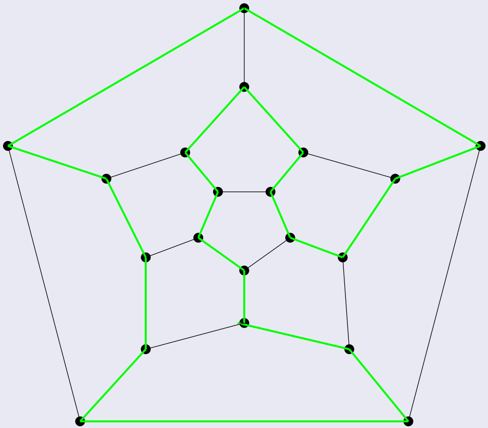
Ορισμός

Ένας κύκλος (μονοπάτι) σε ένα μη κατευθυνόμενο ή κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται κύκλος Hamilton (αντίστοιχα μονοπάτι Hamilton) αν περνάει μία ακριβώς φορά από κάθε κορυφή του G.

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλο (μονοπάτι) Hamilton, τότε το μήκος του κύκλου (μονοπατιού) αυτού είναι $|V|$ ($|V| - 1$).

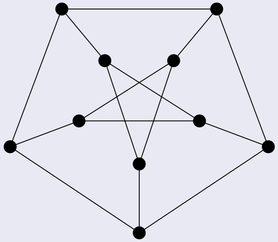
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα έχει κύκλο Hamilton οι ακμές του οποίου φαίνονται με πράσινο χρώμα.



Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα P (γράφημα του Petersen) δεν έχει κύκλο Hamilton.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει κύκλος Hamilton στο γράφημα P.

Παρατηρούμε αρχικά ότι κάθε κορυφή του γραφήματος έχει βαθμό 3.

Επίσης μπορεί να αποδειχτεί ότι δεν υπάρχει κύκλος μήκους 3 ή 4 στο P (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Ας υποθέσουμε ότι το P έχει έναν κύκλο Hamilton $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}, x_1$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)

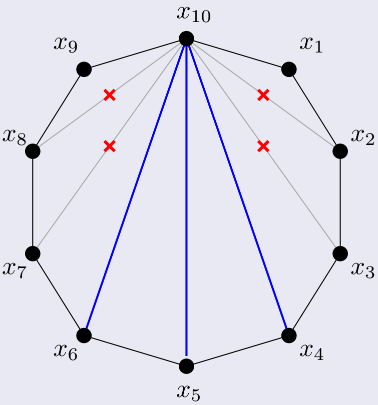
Η κορυφή x_{10} του κύκλου (η οποία μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις κορυφές του P) έχει βαθμό 3 και είναι γειτονική με τις x_9 και x_1.

Ο τρίτος γείτονας της x_{10} δεν μπορεί να είναι κάποια από τις x_2, x_8, επειδή σε αυτή την περίπτωση το P θα περιείχε κάποιον από τους κύκλους x_{10}, x_1, x_2, x_{10} ή x_8, x_9, x_{10}, x_8 που έχουν μήκος 3.

Αντίστοιχα, Ο τρίτος γείτονας της x_{10} δεν μπορεί να είναι κάποια από τις x_3, x_7, επειδή σε αυτή την περίπτωση το P θα περιείχε κάποιον από τους κύκλους $x_{10}, x_1, x_2, x_3, x_{10}$ ή $x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_7$ που έχουν μήκος 4.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς, ο τρίτος γείτονας της x_{10} είναι κάποια κορυφή x_a, όπου $a \in \{4, 5, 6\}$.



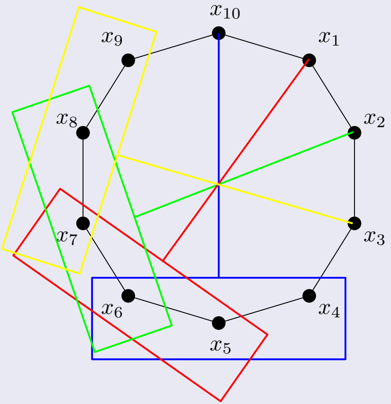
Παράδειγμα (συνέχεια)

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει ότι

- ο τρίτος γείτονας της x_1 είναι κάποια κορυφή x_b, όπου $b \in \{5, 6, 7\}$,
- ο τρίτος γείτονας της x_2 είναι κάποια κορυφή x_c, όπου $c \in \{6, 7, 8\}$ και
- ο τρίτος γείτονας της x_3 είναι κάποια κορυφή x_d, όπου $d \in \{7, 8, 9\}$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα πρέπει $a \neq b$, επειδή σε αντίθετη περίπτωση ο βαθμός της x_a θα ήταν 4. Συνεπώς $|b-a| \neq 0$.

Επίσης θα πρέπει $|b-a| \neq 1$ καθώς σε αντίθετη περίπτωση οι κορυφές x_a και x_b θα ήταν γειτονικές και το γράφημα θα περιείχε τον κύκλο $x_{10}, x_1, x_b, x_a, x_{10}$, ο οποίος έχει μήκος 4.

Συνεπώς $|b-a| \geq 2$. Αυτό συνεπάγεται ότι $b > a$. Πράγματι, υποθέσουμε ότι $a > b$ τότε $|b-a| = a-b < 6-5 = 1$, που αντίκειται στην ανισότητα $|b-a| \geq 2$.

Άρα $b \geq a+2$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $c \geq b + 2$ και $d \geq c + 2$.

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες έχουμε
$d \geq c + 2 \geq b + 4 \geq a + 6 \geq 4 + 6 = 10$ (άτοπο, καθώς $d \in \{7, 8, 9\}$).

Υποθέτοντας ότι το γράφημα P έχει κύκλο Hamilton και προσπαθώντας νο προσδιορίσουμε τις θέσεις των γειτόνων των κορυφών x_n, x_1, x_2, x_3 στο κύκλο αυτό οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Συνεπώς το γράφημα του Petersen δεν έχει κύκλο Hamilton.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Αρχικά θα δώσουμε ορισμένες αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton ή μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα.

Οι συνθήκες αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδείξουμε ότι ένα γράφημα δεν έχει κύκλο ή μονοπάτι Hamilton.

Τα γραφήματα που εξετάζουμε είναι μη κατευθυνόμενα.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλο Hamilton, τότε για κάθε κορυφή $v \in V$ ισχύει $d_G(v) \geq 2$.

Απόδειξη

Έστω $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ (όπου $n = |V|$) ένας κύκλος Hamilton στο G.

Έστω $v \in V$ μία κορυφή του γραφήματος. Επειδή ο κύκλος Hamilton περνάει από όλες τις κορυφές του γραφήματος, υπάρχει i, $1 \leq i \leq n$ τέτοιο ώστε $v = v_i$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $i = 1$ $(v = v_1)$ τότε οι κορυφές v_2, v_n είναι γείτονες της v (ισχύει $n > 2$ και άρα οι v_2 και v_n είναι διαφορετικές κορυφές του γραφήματος).

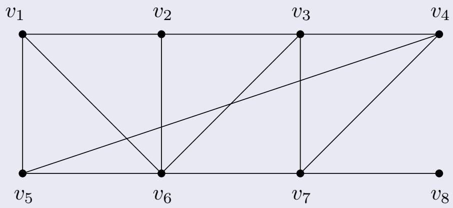
Αν $i = k$ $(v = v_k)$ τότε οι κορυφές v_1, v_{n-1} είναι γείτονες της v (ισχύει $n - 1 > 1$ και άρα οι v_1 και v_{n-1} είναι διαφορετικές κορυφές του γραφήματος).

Αν $1 < i < n$ τότε οι κορυφές v_{i-1}, v_{i+1} είναι δύο γείτονες της v (διαφορετικοί μεταξύ τους).

Σε κάθε περίπτωση η v έχει τουλάχιστον δύο γείτονες και άρα $d_G(v) \geq 2$. □

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα δεν έχει κύκλο Hamilton, καθώς ο βαθμός της κορυφής v_8 είναι 1.



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλο Hamilton ισχύουν τα παρακάτω:

- το G είναι συνεκτικό
- για κάθε ακμή $e \in E$ το γράφημα $V - e$ είναι συνεκτικό
- για κάθε κορυφή $v \in V$ το γράφημα $V - v$ είναι συνεκτικό

Απόδειξη

Έστω $c = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ (όπου $n = |V|$) ένας κύκλος Hamilton στο G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω δύο κορυφές $u, w \in V$, $u \neq w$. Επειδή ο κύκλος Hamilton περνάει από όλες τις κορυφές του γραφήματος, υπάρχουν i, j, με $1 \leq i, j \leq n$, τέτοια ώστε $u = v_i$ και $w = v_j$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $i < j$.

Τότε στο γράφημα G υπάρχουν δύο μονοπάτια $u, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, w$ και $w, v_{j+1}, \ldots, v_n, v_1, \ldots, v_{i-1}, u$ που συνδέουν τις u και w τα οποία δεν έχουν κοινές εσωτερικές κορυφές ούτε κοινές ακμές.

Συνεπώς το G είναι συνεκτικό, καθώς οποιεσδήποτε κορυφές $u, w \in V$ συνδέονται με μονοπάτι (αν $u = w$ τότε συνδέονται με μονοπάτι μήκους 0).

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $e \in E$ είναι μία ακμή του γραφήματος, τότε για οποιεσδήποτε κορυφές $u, w \in V$ με $u \neq w$, η e ανήκει το πολύ σε ένα από τα μονοπάτια που συνδέουν τις u και v στο G.

Συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτά μονοπάτια υπάρχει και στο γράφημα $G - e$.

Άρα οποιεσδήποτε κορυφές $u, w \in V$ συνδέονται με μονοπάτι στο $G - e$, και άρα το $G - e$ είναι και αυτό συνεκτικό.

Απόδειξη (συνέχεια)

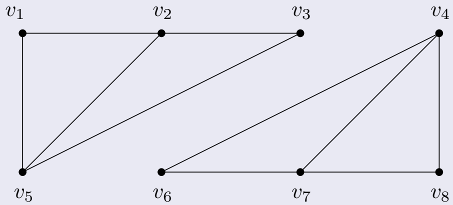
Ομοίως, αν $v \in V$ είναι μία ακμή του γραφήματος, τότε για οποιεσδήποτε κορυφές $u, w \in V - \{v\}$ με $u \neq w$, η v ανήκει το πολύ σε ένα από τα μονοπάτια που συνδέουν τις u και v στο G.

Συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτά μονοπάτια υπάρχει και στο γράφημα $G - v$.

Άρα οποιεσδήποτε κορυφές $u, w \in V - \{v\}$ συνδέονται με μονοπάτι στο $G - v$ και άρα το $G - v$ είναι επίσης συνεκτικό. $\square$

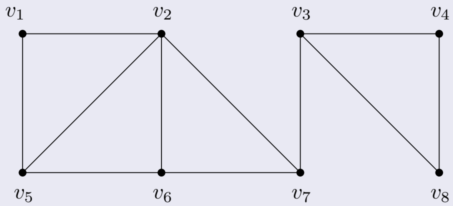
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Συνεπώς δεν έχει κύκλο Hamilton.



Παράδειγμα

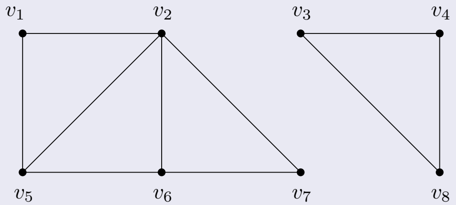
Το παρακάτω γράφημα $G = (V, E)$ είναι συνεκτικό.



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

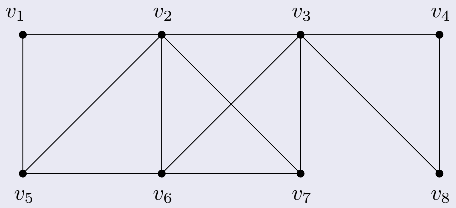
Παράδειγμα (συνέχεια)

Ωστόσο το $G - e$ όπου $e = \{v_3, v_7\}$ δεν είναι συνεκτικό. Συνεπώς το G δεν έχει κύκλο Hamilton.



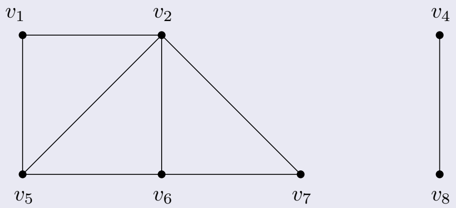
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα $G = (V, E)$ είναι συνεκτικό και για κάθε $e \in E$ το $G - e$ είναι επίσης συνεκτικό.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Ωστόσο το $G - \{v_3\}$ δεν είναι συνεκτικό. Συνεπώς το G δεν έχει κύκλο Hamilton.



Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει κύκλο Hamilton, τότε για κάθε σύνολο $S \subset V$, με $S \neq \emptyset$, το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος $G - S$ είναι το πολύ $|S|$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Απόδειξη

Έστω ότι το γράφημα G έχει έναν κύκλο Hamilton $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1$ $(n = |V|)$.

Αν το γράφημα $G - S$ είναι συνεκτικό, τότε ο ισχυρισμός ισχύει επειδή $S \neq \emptyset$ και άρα $|S| \geq 1$.

Σε αντίθετη περίπτωση, έστω k το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $i_1, i_2, \ldots, i_k$, τέτοιοι ώστε $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ και οι κορυφές $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - S$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για κάθε j, $1 \leq j \leq k-1$, οι κορυφές x_{i_j} και $x_{i_{j+1}}$ συνδέονται στο G με το μονοπάτι $x_{i_j}, x_{i_j+1}, \dots, x_{i_{j+1}}$.

Αντίθετα, στο γράφημα $G - S$ οι κορυφές x_{i_j} και $x_{i_{j+1}}$ δεν συνδέονται με μονοπάτι, καθώς ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

Συνεπώς θα πρέπει να υπάρχει κάποιο r_j, $i_j < r_j < i_{j+1}$ τέτοιο ώστε $x_{r_j} \in S$.

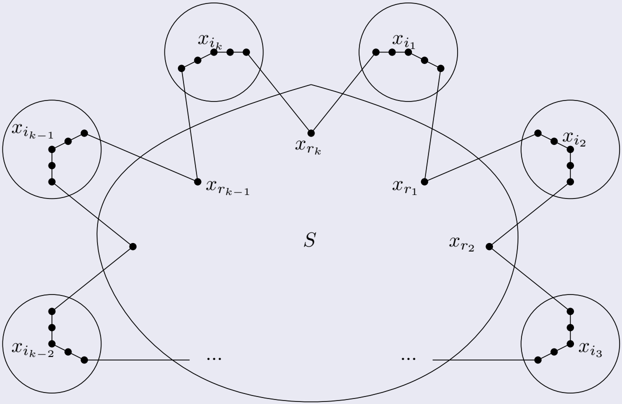
Απόδειξη (συνέχεια)

Αντίστοιχα, οι κορυφές x_{i_k} και x_{i_1} συνδέονται στο G με το μονοπάτι $x_{i_k}, x_{i_k+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots x_{i_1}$.

Αντίθετα, στο γράφημα $G - S$ οι κορυφές x_{i_k} και x_{i_1} δεν συνδέονται με μονοπάτι, καθώς ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες.

Συνεπώς θα πρέπει να υπάρχει κάποιο r_k, όπου $i_k < r_k \leq n$ ή $1 \leq r_k \leq i_1$ τέτοιο ώστε $x_{r_k} \in S$.

Απόδειξη (συνέχεια)



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς υπάρχουν ακέραιοι $r_1, r_2, \ldots, r_k$ τέτοιοι ώστε τα στοιχεία $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_k}$ να ανήκουν στο S.

Επιπλέον οι ακέραιοι αυτοί ικανοποιούν μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$1 \leq i_1 < r_1 < i_2 < r_2 < \cdots < i_k < r_k \leq n$$

ή

$$1 \leq r_k < i_1 < r_1 < i_2 < r_2 < \cdots < i_k \leq n$$

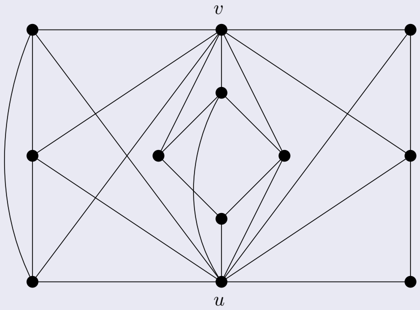
Απόδειξη (συνέχεια)

Σε κάθε περίπτωση οι ακέραιοι $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και επειδή ένας κύκλος Hamilton περνάει από κάθε κορυφή ακριβώς μία φορά, θα πρέπει οι κορυφές $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_k}$ να είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Συνεπώς $|S| \geq k$.

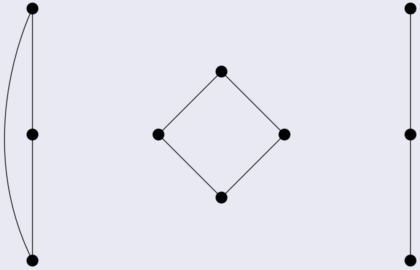
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα S δεν έχει κύκλο Hamilton.



Παράδειγμα

Πράγματι, το γράφημα $G - \{v, u\}$ έχει $3 > |\{v, u\}|$ συνεκτικές συνιστώσες και μπορεί να εφαρμοστεί το προηγούμενο θεώρημα.



Από τις αναγκαίες συνθήκες που έχουμε δώσει ώστε ένα γράφημα να έχει κύκλο Hamilton, καμία δεν είναι ικανή.

Παράδειγμα

Όπως έχουμε δείξει το γράφημα του Petersen δεν έχει κύκλο Hamilton.

Ωστόσο ικανοποιεί όλες τις αναγαίες συνθήκες που έχουμε δώσει μέχρι τώρα: είναι συνεκτικό, για κάθε ακμή e το $P - e$ είναι συνεκτικό, για κάθε κορυφή v το $P - v$ είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει βαθμό $3 \geq 2$.

Θα δείξουμε επίσης ότι για κάθε γνήσιο, μη κενο υποσύνολο κορυφών S το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $P - S$ είναι το πολύ $|S|$.

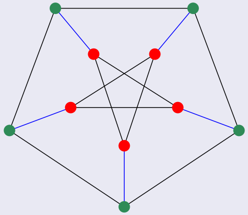
Παράδειγμα

Αν $|S| \geq 5$, τότε το γράφημα $P - S$ έχει το πολύ 5 κορυφές και άρα το πολύ 5 συνεκτικές συνιστώσες.

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει άμεσα ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $P - S$ είναι το πολύ $|S|$.

Παράδειγμα

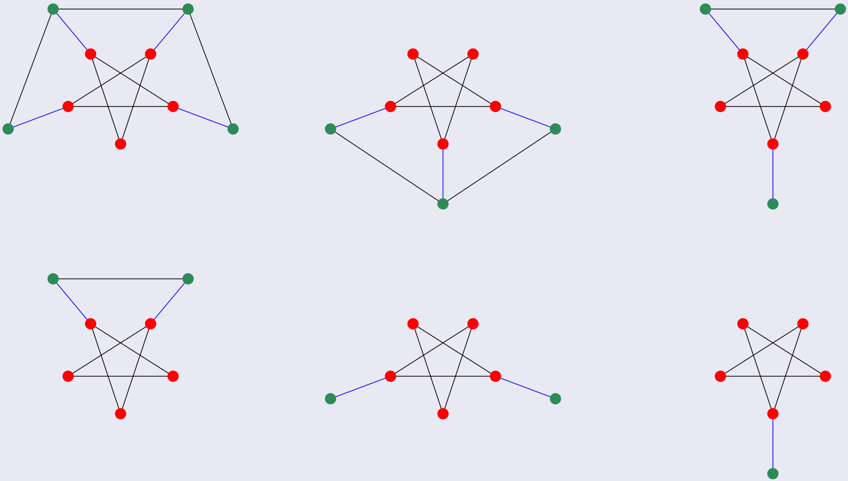
Αν $|S| \leq 4$ και όλες οι κορυφές του S είναι κάποιες από αυτές που εικονίζονται με πράσινο χρώμα, τότε το γράφημα $P - S$ είναι συνεκτικό, καθώς οι κόκκινες κορυφές στο $P - S$ σχηματιζουν έναν κύκλο και κάθε πράσινη κορυφή που έχει παραμείνει στο γράφημα αυτό συνδέται μέ κάποια κόκκινη κορυφή.



Σε αυτή την περίπτωση πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $P - S$ είναι $1 \leq |S|$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

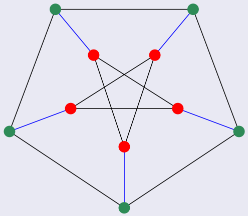
Παράδειγμα



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα

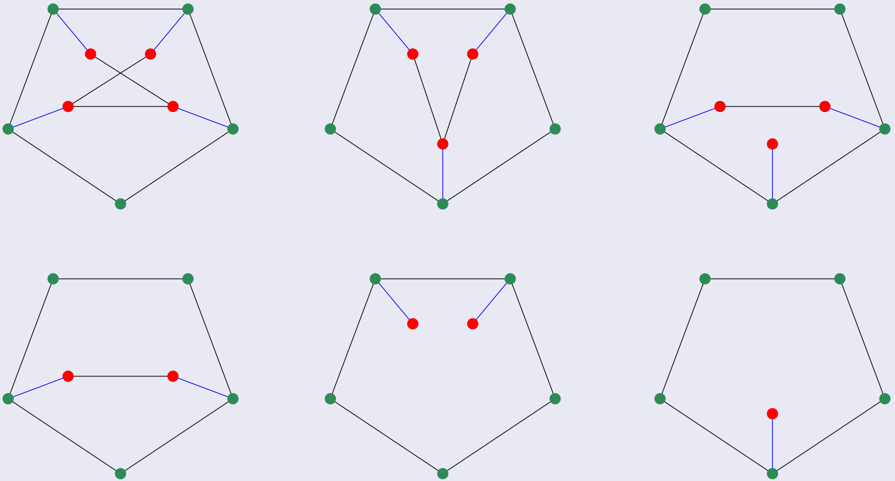
Αν $|S| \leq 4$ και όλες οι κορυφές του S είναι κάποιες από αυτές που εικονίζονται με κόκκινο χρώμα, τότε το γράφημα $P - S$ είναι συνεκτικό, καθώς οι πράσινες κορυφές στο $P - S$ σχηματιζουν έναν κύκλο και κάθε κόκκινη κορυφή που έχει παραμείνει στο γράφημα αυτό συνδέται μέ κάποια πράσινη κορυφή.



Σε αυτή την περίπτωση πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $P - S$ είναι $1 \leq |S|$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

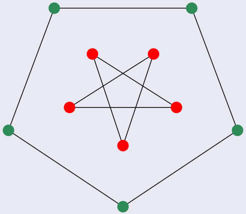
Παράδειγμα



Παράδειγμα

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $|S| \leq 4$ και το S περιέχει i πράσινες και j κόκκινες κορυφές, όπου $1 \leq i \leq 3$ και $1 \leq j \leq 3$.

Έστω F το σύνολο που αποτελείται από τις μπλές ακμές. Θεωρούμε το γράφημα $P - F$ το οποίο αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες ισομορφικές με το C_5:



Θα υπολογίσουμε το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $(P - F) - S$.

Παράδειγμα

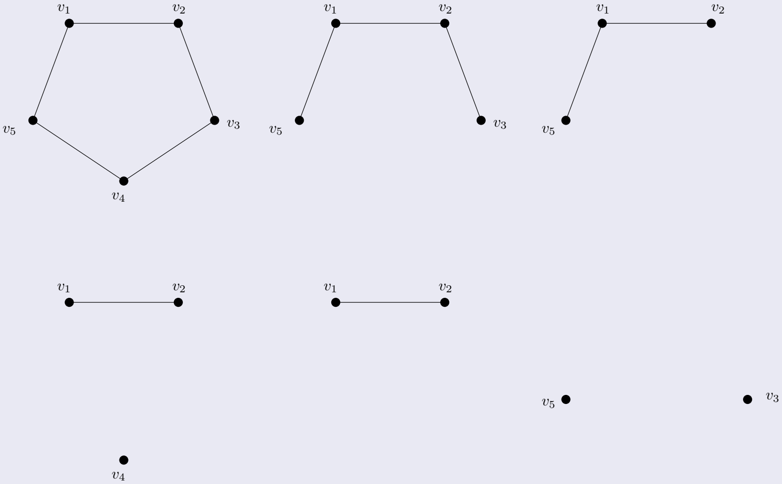
Αν σε ένα γράφημα ισομορφικό με το C_5 διαγράψουμε i κορυφές, τότε

- Αν $i = 1$, το γράφημα που προκύπτει είναι συνεκτικό.
- Αν $i = 2$ και οι κορυφές είναι γειτονικές, το γράφημα που προκύπτει είναι συνεκτικό.
- Αν $i = 2$ και οι κορυφές δεν είναι γειτονικές, το γράφημα που προκύπτει έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.
- Αν $i = 3$ το γράφημα που προκύπτει έχει το πολύ δύο κορυφές και άρα το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Σε κάθε περίπτωση το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών δεν υπερβαίνει το i.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα

Επειδή το γράφημα S περιέχει i πράσινες και j κόκκινες κορυφές, όπου $1 \leq i \leq 3$ και $1 \leq j \leq 3$, στο γράφημα $(G - F) - S$ οι πράσινες κορυφές βρίσκονται σε i το πολύ συνεκτικές συνιστώσες και οι κόκκινες σε j το πολύ συνεκτικές συνιστώσες.

Συνεπώς το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $(G - F) - S$ είναι το πολύ $i + j = |S|$.

Στο γράφημα $G - S$, πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από αυτό του $(G - F) - S$, καθώς αν δύο κορυφές συνδέονται με μονοπάτι στο $(G - F) - S$, τότε το ίσιο ισχύει και στο $G - S$.

Συνεπώς το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $G - S$ είναι το πολύ $|S|$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Τα παρακάτω θεωρήματα δίνουν αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα.

Οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν με παρόμοιο τρόπο, όπως οι αντίστοιχες συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $n \geq 2$ κορυφές έχει μονοπάτι Hamilton, τότε υπάρχουν $n - 2$ κορυφές στο G με βαθμό τουλάχιστον 2.

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει μονοπάτι Hamilton, τότε το G είναι συνεκτικό.

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα $G = (V, E)$ έχει μονοπάτι Hamilton, τότε για κάθε σύνολο $S \subset V$, με $S \neq \emptyset$, το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος $G - S$ είναι το πολύ $|S| + 1$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε ικανές συνθήκες για την ύπαρξη κύκλου Hamilton ή μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα.

Δίνουμε πρώτα ένα χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $n \geq 3$ κορυφές και $p = v_1, v_2, \ldots, v_n$ ένα μονοπάτι Hamilton στο G. Αν $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$, τότε υπάρχει κύκλος Hamilton στο G.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $d_G(v_1) + d_G(v_n) \geq n$.

Έστω $d_G(v_1) = k$ και $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$, όπου $i_1 = 2 < i_2 < \cdots < i_k$, οι γείτονες της v_1 (επειδή το μονοπάτι p είναι μονοπάτι Hamilton όλοι οι γείτονες της v_1 είναι κορυφές του p).

Θα πρέπει κάποια από τις κορυφές $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \ldots, v_{i_k-1}$ να είναι γείτονας της v_n, καθώς σε αντίθετη περίπτωση ο βαθμός της v_n θα ήταν το πολύ $n-1-k$ και άρα $d_G(v_1) + d_G(v_n) \leq k + (n-1-k) = n-1 < n$ (άτοπο, λόγω της υπόθεσης που έχουμε κάνει).

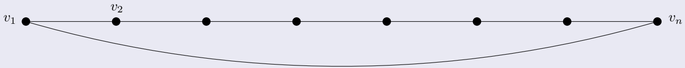
Έστω k ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε ότι η v_{i_k-1} να είναι γείτονας της v_n. Για απλούστευση θέτουμε $i_k = m$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Με βάση την επιλογή του m οι ακμές $\{v_1, v_m\}$ και $\{v_{m-1}, v_n\}$ ανήκουν στο E.

Αν $m = 2$, τότε οι κορυφές v_1 και v_m είναι γειτονικές. Μπορούμε να σχηματίσουμε έναν κύκλο Hamilton c στο G προσθέτοντας την ακμή $\{v_n, v_1\}$ στο μονοπάτι Hamilton p:

$$c = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$$

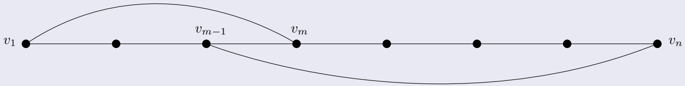


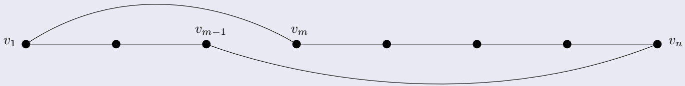
Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $m > 2$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε έναν κύκλο Hamilton c προσθέτοντας τις ακμές $\{v_1, v_m\}$ και $\{v_{m-1}, v_n\}$ στο p και διαγράφοντας την ακμή $\{v_{m-1}, v_m\}$:

$$c = v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_m, v_1$$





Συνεπώς υπάρχει κύκλος Hamilton στο G. □

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα τέτοιο ώστε $d_G(v) + d_G(u) \geq |V| - 1$ για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V$ με $v \neq u$. Τότε το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton.

Απόδειξη

Έστω $n = |V|$. Αν $n = 1$, τότε το γράφημα αποτελείται από μια μοναδική κορυφή v και το μονοπάτι μήκους 0 από τη v στον εαυτό της, είναι μονοπάτι Hamilton στο G.

Αν $n = 2$, τότε $V = \{v_1, v_2\}$. Επειδή $d_G(v_1) + d_G(v_2) \geq 1$, οι κορυφές v_1 και v_2 θα πρέπει να συνδέονται με ακμή. Συνεπώς το v_1, v_2 είναι ένα μονοπατι Hamilton στο G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για την περίπτωση όπου $n \geq 3$ θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία μονοπατιών $p_1, p_2, \ldots, p_n$, όπου το p_i θα περιλαμβάνει i κορυφές του γραφήματος και άρα το p_n θα είναι ένα μονοπάτι Hamilton.

Θα δείξουμε πρώτα ότι το G είναι συνεκτικό.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ας υποθέσουμε ότι ότι το G δεν είναι συνεκτικό.

Έστω v_1 μία κορυφή σε μία συνεκτική συνιστώσα G_1 με n_1 κορυφές και v_2 μία κορυφή σε μία συνεκτική συνιστώσα G_2 με n_2 κορυφές.

Τότε όπως $d_G(v_1) + d_G(v_2) = d_{G_1}(v_1) + d_{G_2}(v_2) \leq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2$ (άτοπο).

Αρα το G είναι συνεκτικό.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επιλέγουμε μία κορυφή w τέτοια ώστε $d_G(w) \geq 2$. Μία τέτοια κορυφή υπάρχει πάντα, λόγω της υπόθεσης $d_G(v) + d_G(u) \geq |V| - 1$ για κάθε ζεύγος κορυφών.

Έστω w', w'' δύο γείτονες της w. Θέτουμε

$$\begin{aligned} p_1 &= w' \\ p_2 &= w'w \\ p_3 &= w', w, w'' \end{aligned}$$

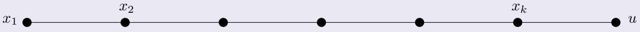
Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $k < n$, τότε το μονοπάτι p_{k+1} σχηματίζεται από το p_k με τον παρακάτω τρόπο:

Έστω $p_k = x_1, x_2, \ldots, x_k$ και $V_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Αν υπάρχει γείτονας u της x_k, τέτοιος ώστε $u \notin V_k$ τότε $p_{k+1} = x_1, x_2, \ldots, x_k, u$.



Αλλιώς, αν υπάρχει γείτονας t της x_1, τέτοιος ώστε $t \notin V_k$ τότε $p_{k+1} = t, x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Απομένει να ορίσουμε το p_k στην περίπτωση όπου όλοι οι γείτονες των x_1, x_k ανήκουν στο V_k.

Θεωρούμε το υπογράφημα H του G που παράγεται από το σύνολο κορυφών V_k.

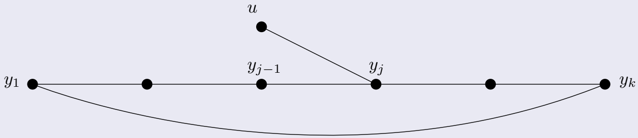
Το μονοπάτι p_k είναι ένα μονοπάτι Hamilton στο H. Επιπλέον, επειδή όλοι οι γείτονες των των x_1, x_k ανήκουν στο V_k και το H είναι το παραγόμενο υπογράφημα από το V_k, ισχύει
$d_H(x_1) + d_H(x_k) = d_G(x_1) + d_G(x_k) \geq n - 1 \geq k$.

Από το προηγούμενο λήμμα υπάρχει ένας κύκλος Hamilton
$y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1$ στο H.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή το γράφημα G είναι συνεκτικό, υπάρχει μία ακμή στο E που συνδέει μία κορυφή v στο V_k με μία κορυφή u στο $V - V_k$.

Επειδή $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_1$ είναι κύκλος Hamilton στο H ισχύει $v = y_j$, για κάποιο j, $1 \leq j \leq k$.



Απόδειξη (συνέχεια)

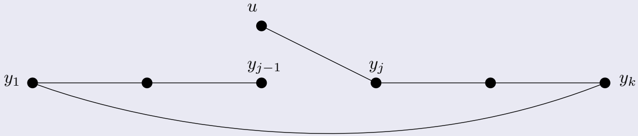
Αν $j = 1$, τότε το μονοπάτι p_{k+1} είναι το

$$u, y_1, y_2, \ldots, y_k$$

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $j > 1$, τότε το μονοπάτι p_{k+1} είναι το ακόλουθο:

$$u, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_k, y_1, y_2, \ldots, y_{j-1}$$



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Απόδειξη (συνέχεια)

Παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το p_{k+1} περιέχει $k+1$ διαφορετικές κορυφές (τις k κορυφές του p_k και μία ακόμα).

Το p_n είναι ένα μονοπάτι Hamilton στο G. □

Η συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος είναι ικανή, αλλά όχι αναγκαία.

Για παράδειγμα, για $n \geq 6$, στο γράφημα P_n για οποιεσδήποτε κορυφές v, u ισχύει $d_{P_n}(v) + d_{P_n}(u) \leq 4 < 5 \leq n-1$. Ωστόσο το P_n έχει μονοπάτι Hamilton (το επαγόμενο γράφημα του οποίου είναι το ίδιο το P_n).

Θεώρημα (Ore)

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές τέτοιο ώστε $d_G(v) + d_G(u) \geq n$ για κάθε ζεύγος κορυφών $v, u \in V$ με $v \neq u$. Τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα το G έχει ένα μονοπάτι Hamilton. Έστω v_1 και v_k τα άκρα του μονοπατιού.

Επειδή $n \geq 3$ και $d_G(n_1) + d_G(v_k) \geq n$, από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι το G έχει ένα κύκλο Hamilton. □

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα (Dirac)

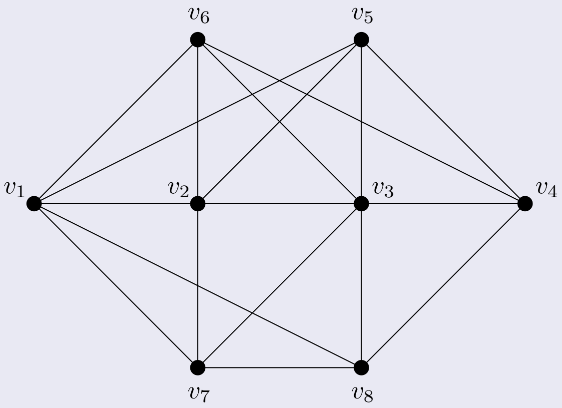
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές τέτοιο ώστε $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$ για κάθε κορυφή $v \in V$. Τότε το γράφημα έχει κύκλο Hamilton.

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα του Ore. □

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα κάθε κορυφή έχει βαθμό 4 και συνεπώς το άθροισμα των βαθμών δύο οποιονδήποτε κορυφών είναι 8, όσο και το πλήθος των κορυφών του.

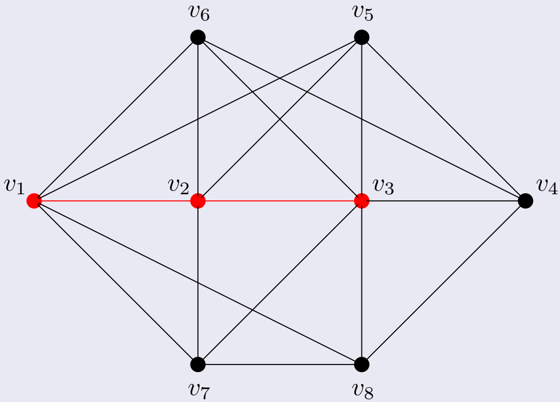


Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφονται στις αποδείξεις των προηγούμενων Θεωρημάτων ώστε να βρούμε έναν κύκλο Hamilton στο γράφημα αυτό.

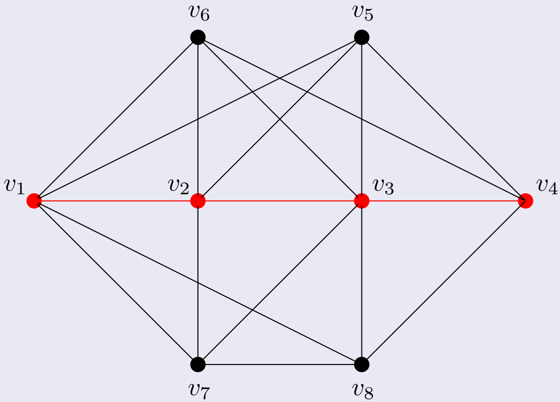
Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιλέγουμε αρχικά την κορυφή v_2 η οποία έχει βαθμό $5 \geq 2$ και σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_3 = v_1, v_2, v_3$.



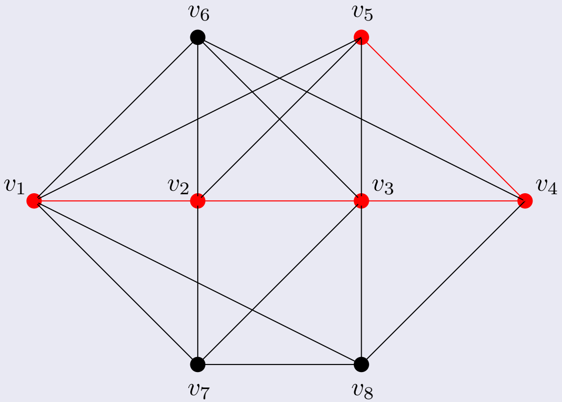
Παράδειγμα (συνέχεια)

Η κορυφή v_4 είναι γείτονας της v_3 και δεν ανήκει στο μονοπάτι p_3. Θέτουμε $p_4 = v_1, v_2, v_3, v_4$.



Παράδειγμα (συνέχεια)

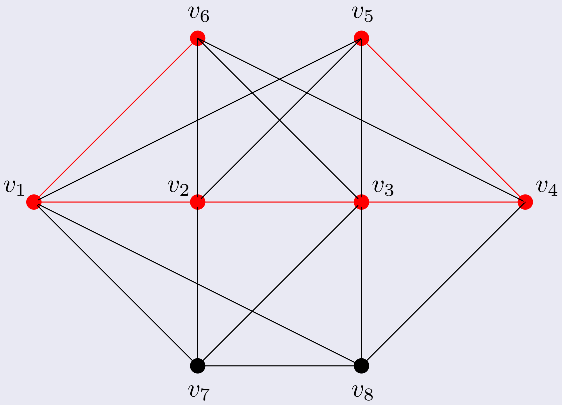
Η κορυφή v_5 είναι γείτονας της v_4 και δεν ανήκει στο μονοπάτι p_4. Θέτουμε $p_5 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

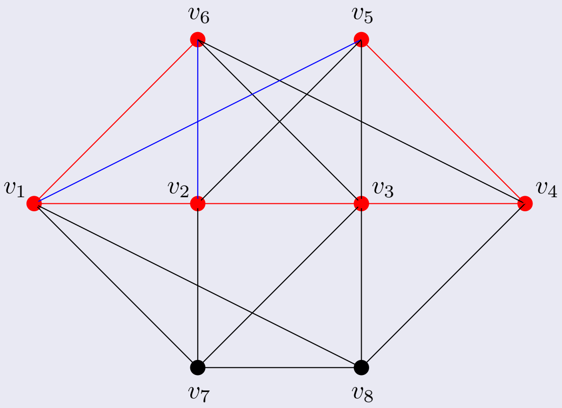
Παράδειγμα (συνέχεια)

Δεν υπάρχει γείτονας της v_5 που να μην ανήκει στο μονοπάτι p_5. Ωστόσο κορυφή v_6 είναι γείτονας της v_1 και δεν ανήκει στο μονοπάτι p_5. Θέτουμε $p_6 = v_6, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.



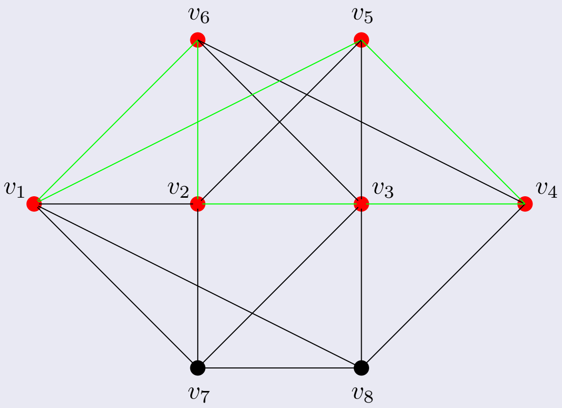
Παράδειγμα (συνέχεια)

Όλοι οι γείτονες των κορυφών v_5 και v_6 είναι κορυφές του μονοπατιού p_6. Οι v_5 και v_6 έχουν γειτονες τις v_1 και v_2 που είναι διαδοχικές κορυφές στο μονοπάτι p_6.



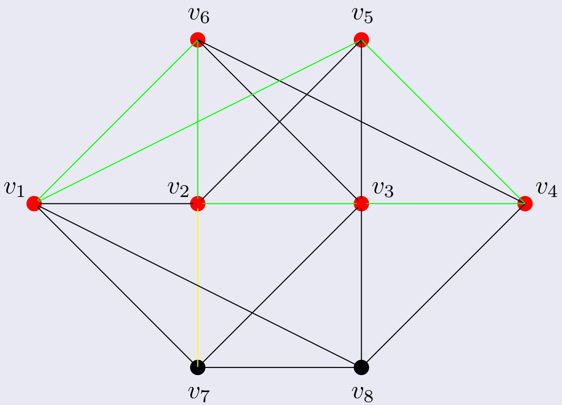
Παράδειγμα (συνέχεια)

Σχηματίζουμε τον κύκλο $v_6, v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_6$.



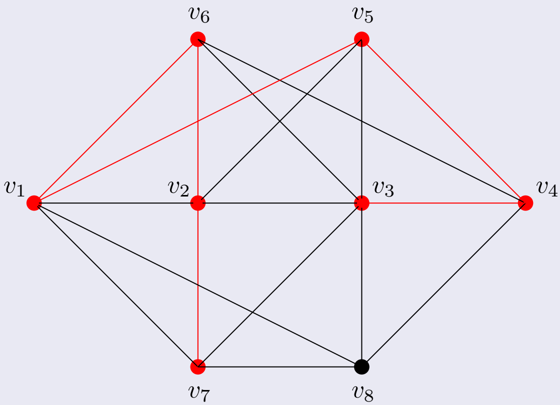
Παράδειγμα (συνέχεια)

Η κορυφή v_7 η οποία δεν ανήκει στο μονοπάτι p_6 είναι γειτονική με την v_2.



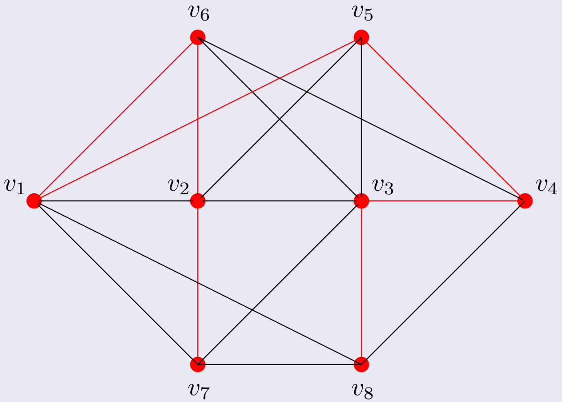
Παράδειγμα (συνέχεια)

Θέτουμε $p_7 = v_7, v_2, v_6, v_1, v_5, v_4, v_3$.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Η κορυφή v_8 είναι γείτονας της v_3 και δεν ανήκει στο μονοπάτι p_7.
Θέτουμε $p_8 = v_7, v_2, v_6, v_1, v_5, v_4, v_3, v_8$.

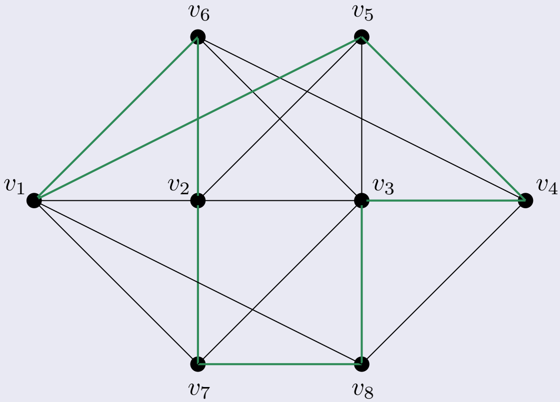


Παράδειγμα (συνέχεια)

Το p_8 είναι ένα μονοπάτι Hamilton.

Η κορυφές v_7 και v_8 είναι γειτονικές. Συνεπώς μπορούμε να σχηματίσουμε το κύκλο Hamilton $v_7, v_2, v_6, v_1, v_5, v_4, v_3, v_8, v_7$.

Παράδειγμα (συνέχεια)



Η συνθήκες των Θεωρημάτων Ore και Dirac είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες.

Για παράδειγμα, για $n \geq 5$, στο γράφημα C_n για οποιεσδήποτε κορυφές v, u ισχύει $d_{P_n}(v) + d_{P_n}(u) = 4 < 5 \leq n$ και $d_{P_n}(v) = 2 < 5/2 \leq n/2$. Ωστόσο το C_n έχει κύκλο Hamilton (το επαγόμενο γράφημα του οποίου είναι το ίδιο το C_n).

Όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα τα κάτω όρια $n - 1$ και n για το άθροισμα των βαθμών δύο κορυφών στα δύο προηγούμενα θεωρήματα δεν μπορούν να βελτιωθούν.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα

Έστω το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m(m+1)}$. Το γράφημα αυτό έχει $n = 2m + 1$ κορυφές.

Το άθροισμα των βαθμών δύο κορυφών u, v στο $K_{m(m+1)}$ είναι τουλάχιστον $2m = n - 1$.

Αν υπήρχε κύκλος Hamilton στο $K_{m(m+1)}$ θα είχε μήκος $2m + 1$ που είναι περιττός αριθμός. Όμως το $K_{m(m+1)}$ είναι διμερές γράφημα και δεν έχει κύκλους με περιττό μήκος.

Συνεπώς το γράφημα $K_{m(m+1)}$ δεν έχει κύκλο Hamilton.

Παράδειγμα

Έστω το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m(m+2)} = (U \cup V, E)$ όπου $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m+2}\}$ και $E = \{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m+2\}$. Το γράφημα αυτό έχει $n = 2m + 2$ κορυφές.

Το άθροισμα των βαθμών δύο κορυφών u, v στο $K_{m(m+2)}$ είναι τουλάχιστον $2m = n - 2$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μονοπάτι Hamilton $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο $K_{m(m+2)}$.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα

Αν $x_1 \in U$ τότε $x_2 \in V$, $x_3 \in U$, $x_4 \in V$, $\ldots x_{2m+1} \in U$, $x_{2m+2} \in V$.

Αν $x_1 \in V$ τότε $x_2 \in U$, $x_3 \in V$, $x_4 \in U$, $\ldots x_{2m+1} \in V$, $x_{2m+2} \in U$.

Σε κάθε περίπτωση θα πρέπει $|V| = |U| = m + 1$ (άτοπο)

Συνεπώς το γράφημα $K_{m(m+1)}$ δεν έχει κύκλο Hamilton.

Στη συνέχεια θα δώσουμε ένα αποτέλεσμα που σχετίζεται με την ύπαρξη μονοπατιού Hamilton σε μία ειδική κατηγορία κατευθυνόμενων γραφημάτων.

Ορισμός

Ενα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται τουρνουά αν για οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in V$ με $v \neq u$, ισχύει $|\{(u, v), (v, u)\} \cap E| = 1$.

Ένα τουρνουά προκύπτει να δώσουμε αυθαίρετη κατεύθυνση σε κάθε κορυφή ενός πλήρους μη κατευθυνόμενου γραφήματος.

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Θεώρημα

Σε κάθε τουρνουά υπάρχει μονοπάτι Hamilton.

Απόδειξη

Έστω ένα τουρνουά $G = (V, E)$ με $n = |V|$ κορυφές.

Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία μονοπατιών $p_1, p_2, \ldots, p_n$, όπου το p_i θα περιλαμβάνει i κορυφές του γραφήματος και άρα το p_n θα είναι ένα μονοπάτι Hamilton.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε κορυφή w του G και θέτουμε $p_1 = w$.

Αν $k < n$ το μονοπάτι p_{k+1} κατασκευάζεται από το p_k με την παρακάτω διαδικασία:

Έστω $p_k = x_1, x_2, \ldots, x_k$. Επιλέγουμε μία κορυφή u, η οποία δεν ανήκει στο μονοπάτι p_k.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $(u, x_1) \in E$, τότε θέτουμε $p_{k+1} = u, x_1, x_2, \ldots, x_k$.

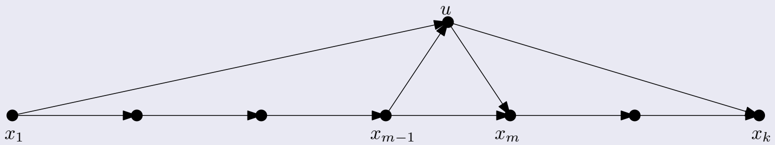
Αλλιώς αν $(x_k, u) \in E$, τότε θέτουμε $p_{k+1} = x_1, x_2, \ldots, x_k, u$.

Αλλιώς ισχύει $(u, x_1) \notin E$ και $(x_k, u) \notin E$ που συνεπάγεται $(x_1, u) \in E$ και $(u, x_k) \in E$, επειδή το G είναι τουρνουά. Έστω $m = \min\{i \mid 1 \leq i \leq k \text{ και } (u, x_i) \in E\}$.

Απόδειξη (συνέχεια)

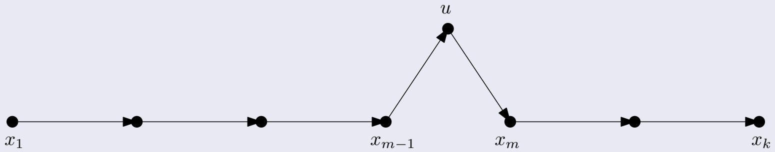
Επειδή $(u, x_1) \notin E$ και $(u, x_k) \in E$, ισχύει $1 < m \leq k$. Συνεπώς $m - 1 \geq 1$ και με βάση τον ορισμό του m θα πρέπει

- $(u, x_{m-1}) \notin E$, που συνεπάγεται $(x_{m-1}, u) \in E$
- $(u, x_m, u) \in E$.



Απόδειξη (συνέχεια)

Το p_{k+1} προκύπτει από το p_k παρεμβάλλοντας την u ανάμεσα στις x_{m-1} και x_m: $p_{k+1} = x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, u, x_m, \ldots x_k$.



Απόδειξη (συνέχεια)

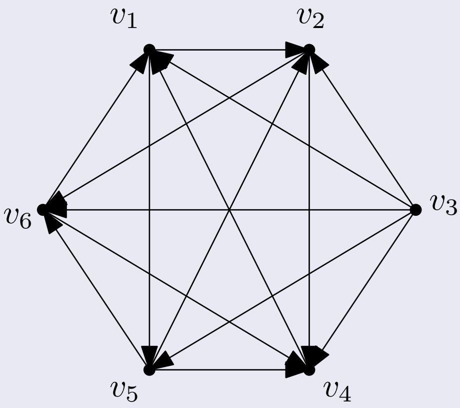
Σε κάθε περίπτωση το p_{k+1} περιέχει διαφορετικές $k+1$ κορυφές (τις k κορυφές του p_k και την u).

Το p_n είναι ένα μονοπάτι Hamilton στο G. □

Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

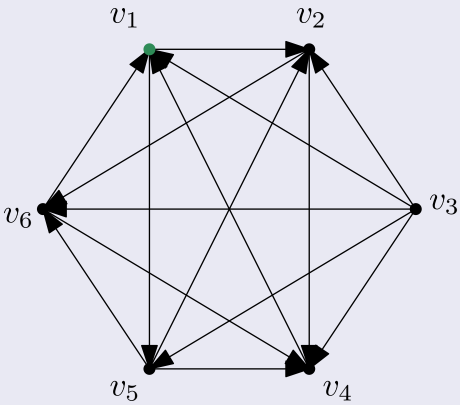
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι τουρνουά. Θα εφαρμόσουμε τα βήματα που περιγράφονται στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος ώστε να βρούμε έναν μονοπάτι Hamilton στο γράφημα αυτό.



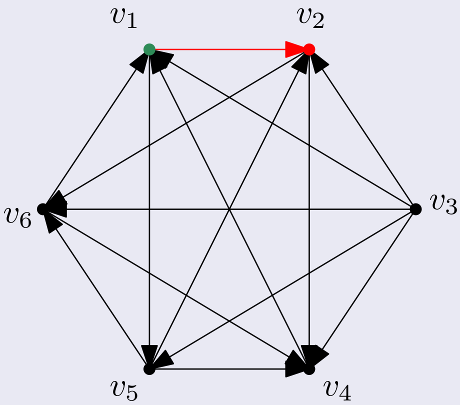
Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιλέγουμε την κορυφή v_1 και θέτουμε $p_1 = v_1$



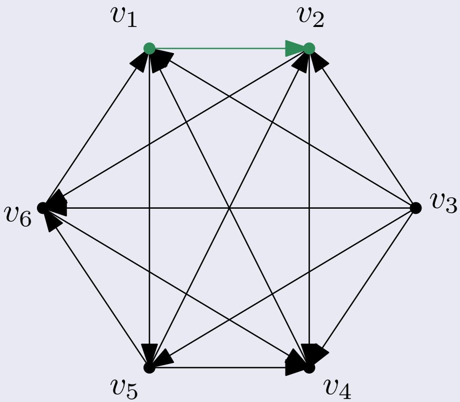
Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιλέγουμε την κορυφή v_2 που δεν ανήκει στο p_1. Το γράφημα G περιέχει την ακμή (v_1, v_2).



Παράδειγμα (συνέχεια)

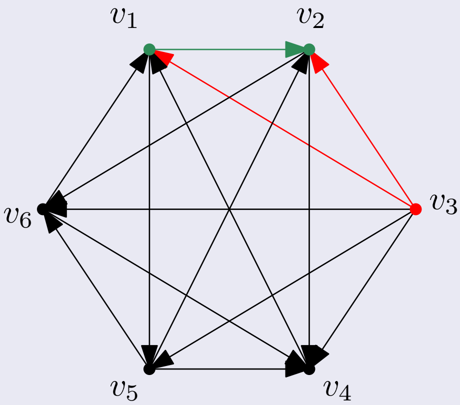
Σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_2 = v_1, v_2$, προσθέτοντας την κορυφή v_2 στο τέλος του p_1.



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

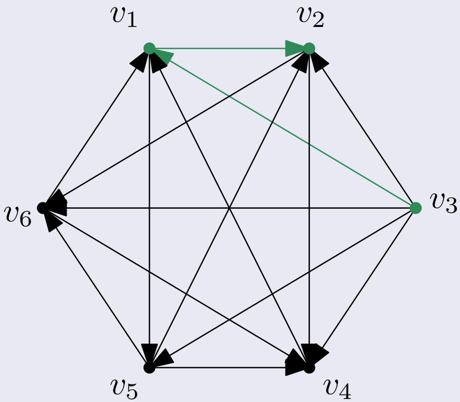
Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιλέγουμε την κορυφή v_3 που δεν ανήκει στο p_2. Το γράφημα G περιέχει τις ακμές (v_3, v_1) και (v_3, v_2).



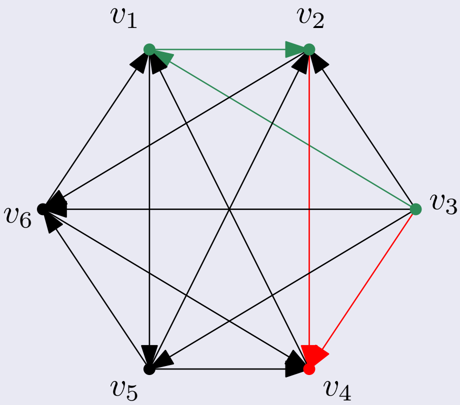
Παράδειγμα (συνέχεια)

Σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_3 = v_3, v_1, v_2$, προσθέτοντας την κορυφή v_3 στην αρχή του p_2.



Παράδειγμα (συνέχεια)

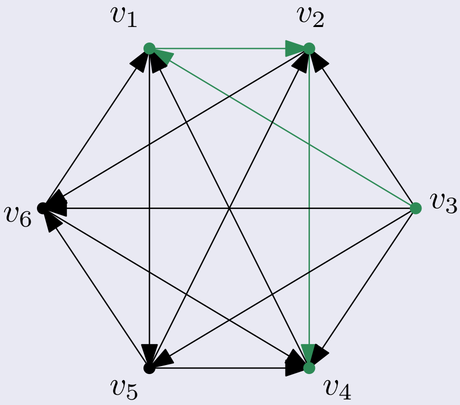
Επιλέγουμε την κορυφή v_4 που δεν ανήκει στο p_3. Το γράφημα G περιέχει τις ακμές (v_3, v_4) και (v_2, v_4).



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

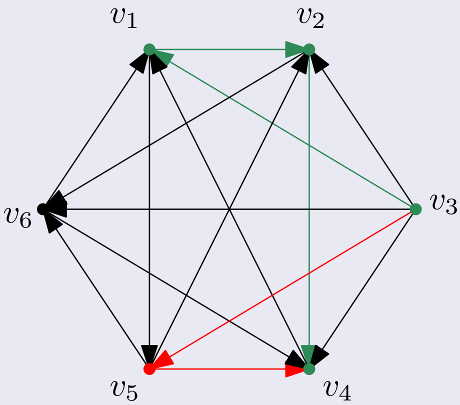
Παράδειγμα (συνέχεια)

Σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_4 = v_3, v_1, v_2, v_4$, προσθέτοντας την κορυφή v_4 στο τέλος του p_3.



Παράδειγμα (συνέχεια)

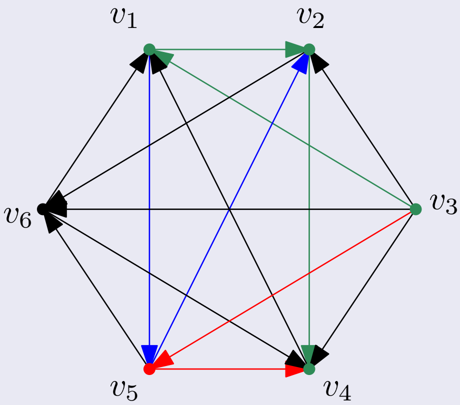
Επιλέγουμε την κορυφή v_5 που δεν ανήκει στο p_4. Το γράφημα G περιέχει τις ακμές (v_3, v_5) και (v_5, v_4).



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)

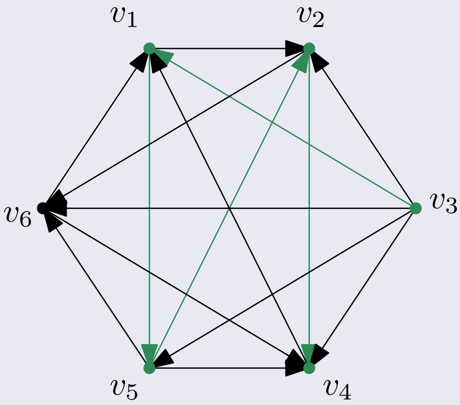
Το p_4 δεν μπορεί να επεκταθεί προσθέτοντας την v_5 σε κάποιο άκρο του. Το γράφημα G περιέχει επίσης τις ακμές (v_1, v_5) και (v_5, v_2).



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

Παράδειγμα (συνέχεια)

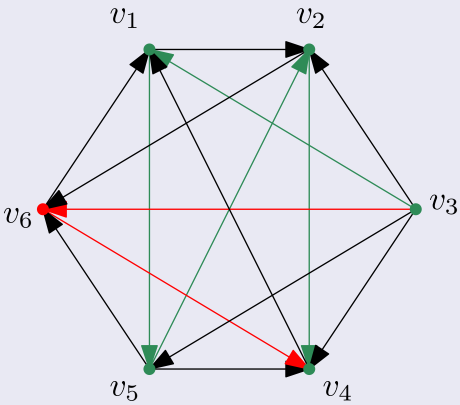
Σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_5 = v_3, v_1, v_5, v_2, v_4$, παρεμβάλλοντας την κορυφή v_5 ανάμεσα στις κορυφές v_1 και v_2 στο p_4.



Κύκλοι και Μονοπάτια Hamilton

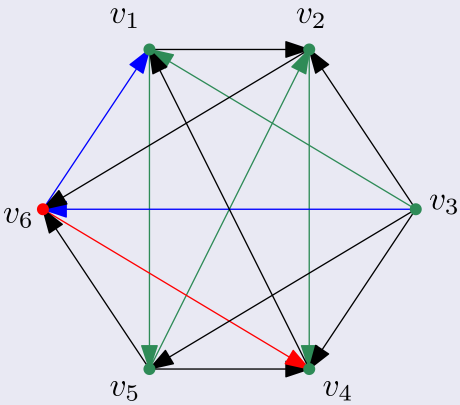
Παράδειγμα (συνέχεια)

Επιλέγουμε την κορυφή v_6 που δεν ανήκει στο p_5. Το γράφημα G περιέχει τις ακμές (v_3, v_6) και (v_6, v_4).



Παράδειγμα (συνέχεια)

Το p_5 δεν μπορεί να επεκταθεί προσθέτοντας την v_6 σε κάποιο άκρο του. Το γράφημα G περιέχει επίσης την (v_6, v_1).



Παράδειγμα (συνέχεια)

Σχηματίζουμε το μονοπάτι $p_6 = v_3, v_6, v_1, v_5, v_2, v_4$, παρεμβάλλοντας την κορυφή v_6 ανάμεσα στις κορυφές v_3 και v_1 στο p_5. Το p_6 είναι μονοπάτι Hamilton.