Διακριτά Μαθηματικά II

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κατευθυνόμενα γραφήματα

Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου:

- V είναι ένα πεπερασμένο, μη κενό σύνολο κορυφών
- E είναι ένα υποσύνολο του V^2, τέτοιο ώστε αν $(v, u) \in E$ να ισχύει $v \neq u$, το οποίο ονομάζεται σύνολο ακμών.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Αν $e = (u, v) \in E$ τότε:

- Η e λέμε ότι είναι μια ακμή από τη u στη v ή αλλιώς ότι ξεκινάει από τη u και καταλήγει στη v.
- Οι κορυφές u και v ονομάζονται άκρα της e.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παρατηρήσεις:

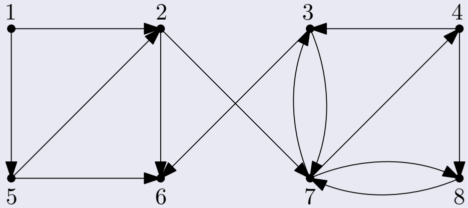
- Κάθε ακμή ενός κατευθυνόμενου γραφήματος είναι ένα ζεύγος αποτελούμενο από δύο διαφορετικές κορυφές. Επειδή τα στοιχεία ενός ζεύγους έχουν προκαθορισμένη διάταξη, οι ακμές έχουν κατεύθυνση.
- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν επιτρέπεται μία κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της. Μία κατευθυνόμενη ακμή που συνδέει μία κορυφή με τον εαυτό της ονομάζεται κατευθυνόμενος βρόχος και η παραλλαγή της έννοιας του κατευθυνόμενου γραφήματος που επιτρέπει τέτοιες ακμές ονομάζεται κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

- Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα δύο κορυφές ενδέχεται να συνδέονται με δύο ακμές που έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
- Τα κατευθυνόμενα γραφήματα τα σχεδιάζουμε όπως και τα μη κατευθυνόμενα, με τη διαφορά ότι οι ακμές σχεδιάζονται σαν βέλη ώστε να φαίνεται η κατεύθυνσή τους.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονόζεται το κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (4, 3), (4, 8), (5, 2), (5, 6), (7, 3), (7, 4), (7, 8), (8, 7)\}$



Ορισμός

Εισερχόμενος (εξερχόμενος) βαθμός μίας κορυφής v σε ένα γράφημα G, ο οποίος συμβολίζεται με $d_G^-(v)$ ($d_G^+(v)$), ονομάζεται το πλήθος των ακμών του G που καταλήγουν στη (ξεκινούν από την) v.

Αν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα σε ποιο γράφημα αναφερόμαστε, τότε συμβολίζουμε τον ειεσχόμενο και τον εξερχόμενο βαθμό με $d^-(v)$ και $d^+(v)$.

Αν $G = (V, E)$, τότε $d_G^-(v) = |\{u \in V \mid (u, v) \in E\}|$ και $d_G^+(v) = |\{u \in V \mid (v, u) \in E\}|$.

Ορισμός

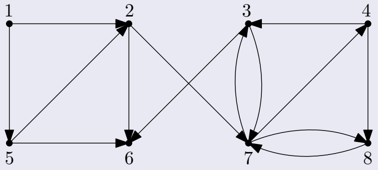
Εισερχόμενη (εξερχόμενη) γειτονιά μίας κορυφής v σε ένα γράφημα G, η οποίο συμβολίζεται με $N_G^-(v)$ ($N_G^+(v)$), ονομάζεται το σύνολο των κορυφών του G από τις οποίες υπάρχει ακμή προς τη v (προς τις οποίες υπάρχει ακμή από τη v).

Αν $G = (V, E)$, τότε $N_G^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ και $N_G^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα G έχουμε
$d_G^-(1) = 0$, $d_G^+(1) = 2$, $d_G^-(2) = 2$, $d_G^+(2) = 2$,
$d_G^-(6) = 3$, $d_G^+(6) = 0$, $d_G^-(7) = 3$, $d_G^+(7) = 3$.
Επίσης $N_G^-(7) = \{2, 3, 8\}$, $N_G^+(7) = \{3, 4, 8\}$.



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παρατηρούμε ότι για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ και κάθε κορυφή $v \in V$ ισχύουν τα παρακάτω:

- $d_G^-(v) \leq |V| - 1$ και $d_G^+(v) \leq |V| - 1$
- $|N_G^-(v)| = d_G^-(v)$ και $|N_G^+(v)| = d_G^+(v)$
- $N_G^-(v) = \{u \mid v \in N_G^+(u)\}$ και $N_G^+(v) = \{u \mid v \in N_G^-(u)\}$

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Θεώρημα

Σε κάθε κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, ισχύει

$$\sum_{v \in V} d_G^-(v) = \sum_{v \in V} d_G^+(v) = |E|.$$

Απόδειξη

Σε κάθε κορυφή v εισέρχονται $d_G^-(v)$ ακμές. Επειδή κάθε ακμή εισέρχεται σε κάποια κορυφή, $\sum_{v \in V} d_G^-(v) = |E|$.

Αντίστοιχα, από κάθε κορυφή v εξέρχονται $d_G^+(v)$. Επειδή κάθε ακμή εξέρχεται από κάποια κορυφή, $\sum_{v \in V} d_G^+(v) = |E|$.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας πινάκες.

Στους παρακάτω ορισμούς θεωρούμε ότι για κάθε κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, με $n = |V|$ κορυφές και $m = |E|$ ακμές, μας δίνεται μία διάταξη $v_1, v_2, \ldots, v_n$ των κορυφών του και μία διάταξη $e_1, e_2, \ldots, e_m$ των ακμών του.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

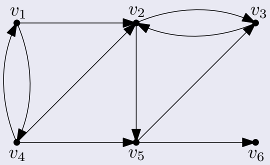
Ο πίνακας γειτνίασης A του κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ο πίνακας διάστασης $n \times n$, όπου:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα G:



Ο πίνακας γειτνίασης του G είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης κατευθυνόμενου γραφήματος:

- όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι 0.
- στη περίπτωση δεν είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο.
- το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ο εξερχόμενος βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι ο εισερχόμενος βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- Το συνολικό πλήθος των 1 είναι $|E|$.

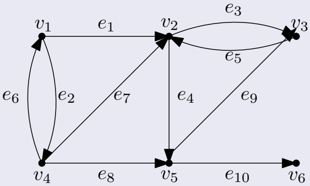
Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ο πίνακα πρόσπτωσης B του κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι ο πίνακας διάστασης $n \times m$, όπου:

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{αν } e_j = (v_i, v_k) \text{ για κάποιο } k \\ 1 & \text{αλλιώς αν } e_j = (v_k, v_i) \text{ για κάποιο } k \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα G:



Ο πίνακας προσπτωσης του G είναι ο

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του πίνακα πρόσπτωσης κατευθυνόμενου γραφήματος:

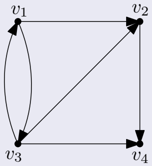
- Το πλήθος των στοιχείων κάθε γραμμής που είναι ίσα με -1 είναι ο εξερχόμενος βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- Το πλήθος των στοιχείων κάθε γραμμής που είναι ίσα με 1 είναι ο εισερχόμενος βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 0.
- Το συνολικό πλήθος των 1 είναι $|E|$.
- Το συνολικό πλήθος των -1 είναι $|E|$.

Ορισμός

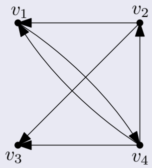
Οι έννοιες του υπογραφήματος, του συνδετικού υπογραφήματος, του παραγόμενου υπογραφήματος, του $G - E'$ για κάποιο σύνολο κορυφών E', του $G - V'$ για κάποιο σύνολο κορυφών V', του συμπληρώματος και του ισομορφισμού που έχουν οριστεί για μη κατευθυνόμενα γραφήματα, ορίζονται με ανάλογο τρόπο και για κατευθυνόμενα γραφήματα.

Παράδειγμα

Κατευθυνόμενο Γράφημα G:



Το συμπλήρωμα $\overline{G}$ του G.



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός

Ονομάζουμε διαδρομή ή περίπατο στο κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ μία ακολουθία κορυφών $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$, όπου $k \geq 1$, τέτοια ώστε $(x_i, x_{i+1}) \in E$, για κάθε i με $1 \leq i \leq k - 1$.

Ο αριθμός $k - 1$ ονομάζεται μήκος της διαδρομής. Η κορυφή x_1 ονομάζεται αρχή της διαδρομής, η κορυφή x_k ονομάζονται τέλος της διαδρομής και οι κορυφές $x_2, \ldots x_{k-1}$ ονομάζονται εσωτερικές κορυφές της διαδρομής.

Λέμε ότι η διαδρομή w αρχίζει από την x_1 και καταλήγει στην x_k και ότι περνάει από τις κορυφές $x_2, \ldots x_{k-1}$ και από τις ακμές (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{k-1}, x_k).

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Οι έννοιες της ανοικτής και της κλειστής διαδρομής, του ίχνους, του μονοπατιού και του κυκλώματος σε κατευθυνόμενα γραφήματα ορίζονται με παρόμοιο τρόπο όπως για τα μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Μία κλειστή διαδρομή της μορφής u, v, u είναι κύκλωμα, καθώς οι (u, v) και (v, u) είναι διαφορετικές ακμές του γραφήματος (αντίθετα σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα μία διαδρομή της μορφής u, v, u δεν είναι κύκλωμα, καθώς χρησιμοποιεί την ακμή $\{u, v\} = \{v, u\}$ δύο φορές).

Συνεπώς το ελάχιστο μήκος κυκλώματος σε κατευθυνόμενα γραφήματα είναι 2.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ο ορισμός του κύκλου για κατευθυνόμενα γραφήματα επιτρέπει επίσης την ύπαρξη κύκλων μήκους 2.

Ορισμός

Μία κλειστή διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1$ με $k \geq 2$ σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G ονομάζεται κύκλος αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k$, ισχύει $x_i \neq x_j$.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύεται όπως το αντίστοιχο θεώρημα για μη κατευθυνόμενα γραφήματα:

Θεώρημα

Αν σε ένα καταθυνόμενο γράφημα G υπάρχει διαδρομή με άκρα τις κορυφές v και u τότε υπάρχει και μονοπάτι με άκρα τις v και u.

Πόρισμα

Αν δύο κορυφές σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα G συνδέονται με διαδρομή, τότε συνδέονται και με διαδρομή μήκους $n-1$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Το παρακάτω θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί με παρόμοιο τρόπο και είναι πιο ισχυρό από το αντίστοιχο θεώρημα για μη κατευθυνόμενα γραφήματα:

Θεώρημα

Αν σε ένα καταθυνόμενο γράφημα G υπάρχει κλειστή διαδρομή τότε υπάρχει και κύκλος.

Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται ισχυρά συνεκτικό αν για οποιεσδήποτε κορυφές $v, u \in V$ υπάρχει μονοπάτι από την u προς τη v.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

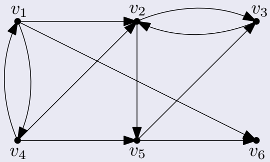
Ορισμός

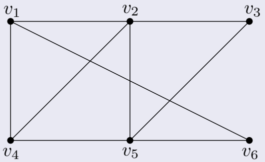
Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$. Το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του G είναι το γράφημα $G' = (V, E')$, όπου $E' = \{\{v, u\} \mid (v, u) \in E\}$.

Διαισθητικά το υποκείμενο μη κατεθυνόμενο γράφημα ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G είναι το γράφημα που προκύπτει από το G αν αγνοήσουμε τις κατευθύνσεις των ακμών του.

Παράδειγμα

Το γράφημα στα δεξιά είναι το υποκείμενο μη κετευθυνόμενο γράφημα του κατευθυνόμενου γραφήματος στα αριστερά.





Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Ορισμός

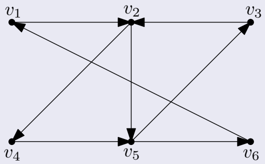
Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται ασθενώς συνεκτικό (ή απλά συνεκτικό) αν το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του G είναι συνεκτικό.

Παρατηρούμε ότι κάθε μονοπάτι στο G είναι και μονοπάτι στο υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του G (χωρίς ωστόσο να ισχύει το αντίστροφο). Συνεπώς κάθε ισχυρά συνεκτικό γράφημα είναι και ασθενώς συνεκτικό.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

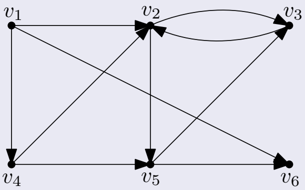
Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό:



Παράδειγμα

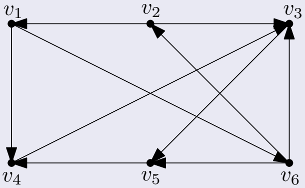
Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό (η κορυφή v_1 δεν έχει εισερχόμενες ακμές και άρα δεν υπάρχει μονοπάτι από κάποια άλλη κορυφή προς αυτή και αντίστοιχα η κορυφή v_6 δεν έχει εξερχόμενες ακμές και άρα δεν υπάρχει μονοπάτι από αυτή προς κάποια άλλη κορυφή), είναι ωστόσο ασθενώς συνεκτικό:



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

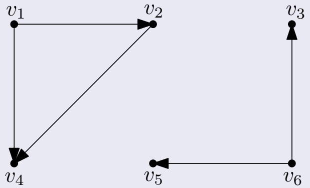
Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό (δεν υπάρχει για παράδειγμα μονοπάτι από την v_3 προς στην v_2), είναι ωστόσο ασθενώς συνεκτικό:



Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό ούτε ασθενώς συνεκτικό:



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Το σύνολο των κορυφών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος το οποίο δεν είναι ισχυρά συνεκτικό μπορεί να διαμεριστεί σε σύνολα τα οποία παράγουν υπογραφήματα τα οποία είναι ισχυρά συνεκτικά.

Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα και $V' \subseteq V$ ένα υποσύνολο των κορυφών του. Το υπογράφημα $G' = (V', E')$ του G το οποίο παράγεται από το σύνολο κορυφών V' ονομάζεται ισχυρά συνεκτική συνιστώσα του G αν

- το G' είναι ισχυρά συνεκτικό
- για κάθε υποσύνολο κορυφών V'' του G τέτοιο ώστε $V' \subset V''$ το υπογράφημα του G που παράγεται από το V'' δεν είναι ισχυρά συνεκτικό.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

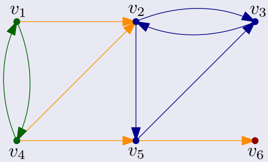
Με βάση τον παραπάνω ορισμό τα σύνολα κορυφών που παράγουν ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, είναι τα μεγιστικά σύνολα, ανάμεσα σε αυτά που παράγουν ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.

Ένα γράφημα είναι ισχυρά συνεκτικό αν αποτελείται από μία μόνο ισχυρά συνεκτική συνιστώσα.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παράδειγμα

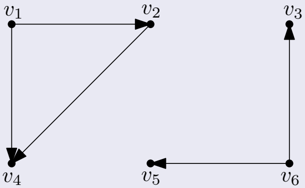
Οι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες του παρακάτω γραφήματος φαίνονται με διαφορετικό χρώμα (πράσινο, μπλε, κόκκινο). Οι ακμές χρώματος πορτοκαλί συνδέουν κορυφές σε διαφορετικές ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες.



Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα περιέχει έξι ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες, καθεμία από τις οποίες έχει μία κορυφή.



Το παρακάτω θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί εύκολα και περιγράφει τη βασική ιδιότητα των ισχυρά συνεκτικών συνιστωσών (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση).

Θεώρημα

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Τότε κάθε κορυφή στο σύνολο V ανήκει σε μία ακριβώς συνεκτική συνιστώσα του G και κάθε ακμή στο σύνολο E ανήκει σε μία το πολύ συνεκτική συνιστώσα του G.

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

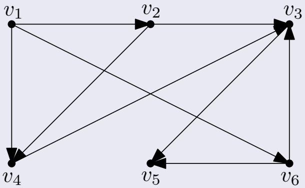
Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα δεν υπάρχει κύκλος στο G.

Παρατηρούμε ότι ενδέχεται το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα ενός ακυκλικού κατευθυνόμενου γραφήματος να περιέχει κύκλους.

Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα είναι ακυκλικό κατευθυνόμενο γράφημα.



Μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των διαδρομών μήκους ℓ, για κάποιο $\ell \geq 0$, μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών ενός γραφήματος (κατευθυνόμενου ή μη κατευθυνόμενου), με τη βοήθεια του πίνακα γειτνίασης.

Το παρακάτω θεώρημα δίνεται για κατευθυνόμενα γραφήματα, Μπορεί ωστόσο με παρόμοιο τρόπο να αποδειχτεί και για μη κατευθυνόμενα γραφήματα.

Θεώρημα

Έστω $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ ένα κατευθυνόμενο γραφημα και έστω A ο πίνακας γειτνίασης του G. Το πλήθος των διαδρομών μήκους ℓ, για $\ell \geq 0$ από την v_i στη v_j είναι το στοιχείο s_{ij} του πίνακα $S = A^{\ell}$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο ℓ.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για $\ell = 0$, ισχύει $S = A^0 = I_n$.

Αν $i \neq j$, τότε δεν υπάρχει διαδρομή μήκους 0 μεταξύ της v_i και της v_j. Επίσης επειδή $S = I_n$, ισχύει $s_{ij} = 0$.

Αν $i = j$, τότε υπάρχει μία μοναδική διαδρομή μήκους 0 μεταξύ της v_i και της v_j, που είναι η $w = v_i$. Επίσης, ισχύει $s_{ij} = 1$.

Συνεπώς για $\ell = 0$ ο ισχυρισμός ισχύει.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $\ell = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\ell = k + 1$.

Έστω $R = A^k$ και $S = A^\ell = A^{k+1} = R \times A$. Συνεπώς

$$s_{ij} = \sum_{m=1}^{n} r_{im} \cdot a_{mj}$$

Κατευθυνόμενα Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

Μία οποιαδήποτε διαδρομή μήκους $k+1$ από την κορυφή v_i προς την κορυφή v_j, μπορεί να προκύψει επεκτείνοντας μία διαδρομή μήκους k από την v_i προς κάποιον εισερχόμενο γείτονα της v_j.

Αντίστροφα, κάθε διαδρομή μήκους k από την v_i προς κάποιον εισερχόμενο γείτονα της v_j μπορεί να επεκταθεί σε μία διαδρομή μήκους $k+1$ από τη v_i στη v_j.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των διαδρομών από την v_i προς τη v_j και των διαδρομών από την v_i προς τους εισερχόμενους γείτονες της v_j.

Για να μετρήσουμε το πλήθος των διαδρομών μήκους $k+1$ από τη v_i στη v_j, αρκεί να αθροίσουμε τα πλήθη των διαδρομών μήκους k από τη v_i προς κάθε εισερχόμενο γείτονα της v_j.

Απόδειξη (συνέχεια)

Από την επαγωγική υπόθεση το πλήθος των διαδρομών μήκους k από τη v_i προς κάποια κορυφή v_m είναι r_{im}.

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι το συνολικό πλήθος διαδρομών μήκους $k+1$ από την v_i στην v_j είναι

$$\sum_{m: v_m \in N^-(v_j)} r_{im}$$

Απόδειξη (συνέχεια)

Όμως από τον ορισμό του πίνακα γειτνίασης έχουμε $a_{mj} = 1$ αν $v_m \in N^-(v_j)$ και $a_{mj} = 0$ σε αντίθετη περίπτωση.

Άρα

$$\sum_{m: v_m \in N^-(v_j)} r_{im} = \sum_{m=1}^{n} r_{im} \cdot a_{mj} = s_{ij}$$

Άρα ο ισχυρισμός ισχύει και για $\ell = k + 1$ και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε. □

Περιεχόμενα

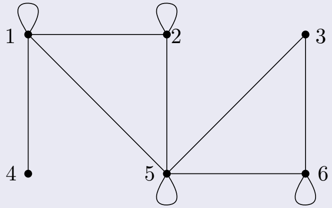
Γραφήματα με βρόχους

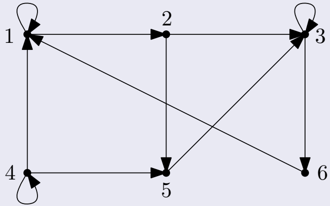
Ένα γράφημα (κατευθυνόμενο γράφημα) στο οποίο υπάρχει ακμή που συνδέει μία κορυφή με τον εαυτό της, ονομάζεται γράφημα με βρόχους (αντίστοιχα κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους) και μιά τέτοια ακμή ονομάζεται βρόχος.

Γραφήματα με βρόχους

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρακάτω εικονίζονται ένα γράφημα με βρόχους (αριστερά) και ένα κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους (δεξιά).





Γραφήματα με βρόχους

Οι διάφορες έννοιες που έχουμε ορίσει για γραφήματα μπορούν να επεκταθούν στις περισσότερες περιπτώσεις άμεσα και για γραφήματα με βρόχους.

Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις.

Γραφήματα με βρόχους

- Ένας βρόχος σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να θεωρηθεί ως σύνολο που περιέχει μία μόνο κορυφή: $e = \{v\}$. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την ακμή ως πολυσύνολο: $e = \{v, v\}$ (πολυσύνολο ονομάζεται η παραλλαγη της έννοιας του συνόλου, όπου ένα στοιχείο επιτρέπεται να περιέχεται περισσότερες από μία φορές).
- Ένας βρόχος σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος: $e = (v, v)$.

Γραφήματα με βρόχους

Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους G:

- Αν υπάρχει βρόχος στην κορυφή v, τότε $v \in N_G(v)$.
- Ένας βρόχος συνεισφέρει 2 στο βαθμό της κορυφής την οποία συνδέει με τον εαυτό της.
- Η σχέση $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$ εξακολουθεί να ισχύει.
- Αν υπάρχει βρόχος σε μία κορυφή v του G, τότε $|N_G(v)| \neq d_G(v)$ (ισχύει $|N_G(v)| = d_G(v) - 1$).

Γραφήματα με βρόχους

Σε ένα κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους G:

- Αν υπάρχει βρόχος στην κορυφή v, τότε $v \in N_G^-(v)$ και $v \in N^+G(v)$.
- Ένας βρόχος προσμετράται και στον εισερχόμενο και στον εξερχόμενο βαθμό της κορυφής την οποία συνδέει με τον εαυτό της.
- Οι σχέσεις $\sum_{v \in V} d_G^-(v) = \sum_{v \in V} d_G^+(v) = |E|$, $|N_G^-(v)| = d_G^-(v)$ και $|N_G^+(v)| = d_G^+(v)$ εξακολουθούν ισχύουν.

Γραφήματα με βρόχους

- Αν ένα γράφημα (μη κατευθυνόμενο ή κατευθυνόμενο) περιέχει βρόχο στην κορυφή v_i τότε το στοιχείο του a_{ii} του πίνακα γειτνίασης A είναι 1.
- Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα με βρόχους $G = (V, E)$, το πλήθος των 1 στον πίνακα γειτνίασης είναι $2|E| - m$, όπου m το πλήθος των βρόχων.
- Αν εργαζόμαστε σε γραφήματα (μη κατευθυνόμενα ή κατευθυνόμενα) με βρόχους, τότε η πράξη του συμπληρώματος θα πρέπει να γίνεται ως προς το σύνολο ακμών στο οποίο συμπεριλαμβάνονται και οι βρόχοι.

Γραφήματα με βρόχους

Σε ένα γράφημα (μη κατευθυνόμενο ή κατευθυνόμενο) με βρόχους:

- Μια διαδρομή επιτρέπεται να περιέχει βρόχους (δηλαδή να μεταβαίνει από μία κορυφή στον εαυτό της, μέσω ενός βρόχου).
- Ένα ίχνος ή ένα κύκλωμα επιτρέπεται να περιέχει βρόχους, το πολύ μία φορά τον καθέναν.
- Ένα μονοπάτι δεν επιτρέπεται να περιέχει βρόχους
- Αν υπάρχει βρόχος στην κορυφή v, τότε η ακολουθία v, v αποτελεί κύκλο μήκους 1.
- Κανένας κύκλος με μήκος μεγαλύτερο του 1 δεν επιτρέπεται να περιέχει βρόχους.

Περιεχόμενα

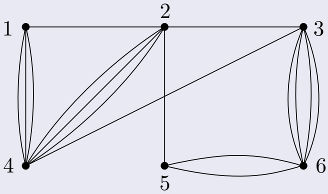
Πολυγραφήματα

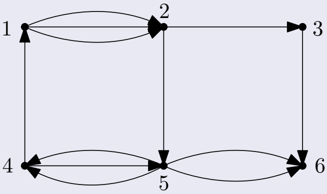
Ένα (μη κατευθυνόμενο) γράφημα στο οποίο επιτρέπεται ένα ζεύγος κορυφών να συνδέεται με περισσότερες από μία ακμές ονομάζεται πολυγράφημα και ακμές που συνδέουν το ίδιο ζεύγος κορυφών ονομάζονται παράλληλες ακμές.

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα στο οποίο επιτρέπεται να υπάρχουν περισσότερες από μία ακμές από μία κορυφή προς μία άλλη ονομάζεται κατευθυνόμενο πολυγράφημα και ακμές αυτές ονομάζονται παράλληλες ακμές.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρακάτω εικονίζονται ένα πολυγράφημα (αριστερά) και ένα κατευθυνόμενο πολυγράφημα (δεξιά).





Πολυγραφήματα

Οι διάφορες έννοιες που έχουμε ορίσει για γραφήματα μπορούν να επεκταθούν στις περισσότερες περιπτώσεις άμεσα και για πολυγραφήματα.

Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις.

Πολυγραφήματα

- Οι ακμές ενός πολυγραφήματος (κατευθυνόμενου γραφήματος) μπορούν να θεωρηθούν ως αντικείμενα πιο σύνθετα από το διμελές σύνολο (αντίστοιχα ζεύγος) που αποτελείται από τα δύο τους άκρα. Με αυτό τον τρόπο το σύνολο ακμών μπορεί να περιέχει ακμές που έχουν τα ίδια άκρα.

Πολυγραφήματα

Σε ένα μη κατευθυνόμενο πολυγράφημα G:

- Αν υπάρχουν παράλληλες ακμές μεταξύ δύο κορυφών, τότε καθεμία προσμετράται χωριστά στους βαθμούς των δύο κορυφών.
- Η σχέση $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$ εξακολουθεί να ισχύει.
- Ισχύει $|N_G(v)| \leq d_G(v)$. Η ισότητα ισχύει για μια κορυφή v αν και μόνο αν δεν υπάρχουν παράλληλες ακμές που να συνδέουν αυτή την κορυφή με κάποιο γείτονά της.

Πολυγραφήματα

Σε ένα κατευθυνόμενο πολυγράφημα G

- Αν υπάρχουν παράλληλες ακμές από τη v στη u, τότε καθεμία προσμετράται χωριστά στον εξερχόμενο βαθμό της v και στον εισερχόμενο βαθμό της u.
- Η σχέση $\sum_{v \in V} d_G^-(v) = \sum_{v \in V} d_G^+(v) = |E|$ εξακολουθεί να ισχύει.
- Ισχύει $|N_G^-(v)| \leq d_G^-(v)$ και $|N_G^+(v)| \leq d_G^+(v)$. Η ισότητα $|N_G^-(v)| = d_G^-(v)$ ισχύει για μια κορυφή v αν δεν υπάρχουν παράλληλες εισερχόμενες ακμές στην v. Αντίστοιχα, η ισότητα $|N_G^+(v)| = d_G^+(v)$ ισχύει για μια κορυφή v αν δεν υπάρχουν παράλληλες εξερχόμενες ακμές από τη v.

Πολυγραφήματα

- Αν ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει m παράλληλες ακμές μεταξύ των κορυφών v_i και v_j τότε τα στοιχεία a_{ij} και a_{ji} του πίνακα γειτνίασης A έχουν τιμη m.
- Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει m παράλληλες ακμές από την κορυφή v_i προς τη v_j τότε το στοιχείο του a_{ij} του πίνακα γειτνίασης A έχει τιμή m.
- Η έννοια του συμπληρώματος δεν ορίζεται για πολυγραφήματα.

Πολυγραφήματα

- Η διαδρομή σε μη κατευθυνόμενο πολυγράφημα δεν μπορεί να οριστεί απλά ως ακολουθία κορυφών, καθώς θα πρέπει να φαίνεται ποιά από τις παράλληλες ακμές που ενδεχομένως υπάρχουν ανάμεσα σε δύο κορυφές χρησιμοποιείται κάθε φορά. Συνεπώς η διαδρομή ορίζεται ως μία εναλλασσόμενη ακολουθία κορυφών και ακμών που αρχίζει και τελειώνει σε κορυφή. Πιο αυστηρά μία διαδρομή στο πολυγράφημα $G = (V, E)$ είναι μία ακολουθία $w = x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}, x_k$, όπου $k \geq 1$, τέτοια ώστε $x_i \in V$, $1 \leq i \leq k$, $y_i \in E$, $1 \leq i \leq k-1$ και η ακμή y_i να συνδέει τις κορυφές x_i και x_{i+1}, για κάθε i, $1 \leq i \leq k-1$.
- Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η έννοια της διαδρομής για κατευθυνόμενα πολυγραφήματα.

Πολυγραφήματα

- Σε ένα μη κατευθυνόμενο πολυγράφημα ένα ίχνος ή ένα κύκλωμα δεν επιτρέπεται να περάσει από την ίδια ακμή δύο φορές, επιτρέπεται ωστόσο να περνάει από δύο παράλληλες ακμές που συνδέουν δυο κορυφές. Συνεπώς σε ένα μη κατευθυνόμενο πολυγράφημα μπορεί να υπάρχει κύκλωμα μήκους 2.
- Ο ορισμός του κύκλου για μη κατευθυνόμενα πολυγραφήματα επιτρέπει επίσης ένας κύκλος να έχει μήκος δύο: Μία κλειστή διαδρομή $x_1, y_1, x_2, y_2 \ldots, x_{k-1}, y_{k-1}, x_k, y_k, x_1$ σε ένα μη κατευθυνόμενο πολυγράφημα γράφημα G ονομάζεται κύκλος αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k$, ισχύει $x_i \neq x_j$ και $y_i \neq y_j$.
- Αντίστοιχες παρατηρήσεις ισχύουν και για τα κατευθυνόμενα πολυγραφήματα.

Περιεχόμενα

Γραφήματα με βάρη

Γραφήματα με βάρη

Ένα γράφημα (ενδεχομένως κατευθυνόμενο, με βρόχους, με παράλληλες ακμές) μπορεί να φέρει βάρη στις ακμές του, στις κορυφές του, ή και στα δύο.

Τα βάρη είναι αριθμητικές τιμές (ακέραιες, ρητές ή ακόμα και πραγματικές).

Οι φυσική σημασία των βαρών σχετίζεται με το πεδίο εφαρμογής των γραφημάτων.

Γραφήματα με βάρη

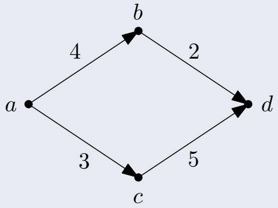
Για παράδειγμα το βάρος μίας ακμής μπορεί να δηλώνει την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών κορυφών ή τη χωρητικότητα της ακμής (το ρυθμό με τον οποίο μπορούν να μετακινηθούν ποσότητες από ένα αγαθό από το ένα άκρο της ακμής στο άλλο).

Το βάρος μίας κορυφής μπορεί να δηλώνει το δυναμικό της (π.χ. το υψόμετρο, την αποθηκευμένη ποσότητα καποιου αγαθού κ.λ.π.)

Γραφήματα με βάρη

Παράδειγμα (συνέχεια)

Παρακάτω εικονίζεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα με βάρη στις ακμές του. Αν οι ακμές δηλώνουν απόσταση, τότε το συντομότερο μονοπάτι από την a στη d έχει μήκος $\min(4+2, 3+5)$. Αν οι ακμές δηλώνουν χωρητικότητα, τότε η μέγιστη ροή από την a στη d είναι $\min(4, 2) + \min(3, 5)$.



Γραφήματα με βάρη

Τυπικά ένα γράφημα με ακέραια βάρη στις ακμές του είναι μία τριάδα (V, E, w), όπου V είναι το σύνολο κορυφών, E είναι το σύνολο ακμών και w είναι μία συνάρτηση από το E στο $\mathbb{Z}$.

Αντίστοιχα μπορεί να οριστεί η έννοια του γραφήματος με βάρη στις κορυφές του καθώς και γραφήματα με βάρη που ανήκουν σε άλλο σύνολο αριθμών.

Γραφήματα με βάρη

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές του με έναν πίνακα βαρών W, ο οποίος αποτελεί παραλλαγή του πίνακα γειτνίασης.

Το στοιχείο w_{ij} του πίνακα είναι το βάρος της ακμής $\{v_i, v_j\}$.

Αν οι κορυφές v_i και v_j $(i \neq j)$ δεν είναι γειτονικές, τότε η τιμή του στοιχείου w_{ij} του πίνακα εξαρτάται από τη φυσική σημασία του βάρους. Για παράδειγμα, αν το βάρος δηλώνει απόσταση, τότε θα πρέπει $w_{ij} = \infty$, ενώ αν δηλώνει ροή θα πρέπει $w_{ij} = 0$.

Αντίστοιχα, από τη φυσική σημασία του βάρους καθορίζεται και η τιμή των στοιχειων στη διαγώνιο του πίνακα.

Γραφήματα με βάρη

Γενικότερα η ακμές ενός γραφήματος ενδέχεται να φέρουν κάποια μη αριθμητική πληροφορία. Αυτά τα γραφήματα ονομάζονται γραφήματα με ετικέτες.