Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Γραφήματα

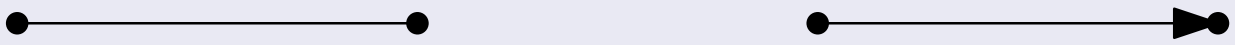
Ένα γράφημα είναι μια δομή που αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών (ή κόμβων) οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με ακμές.

Ένα γράφημα είναι στην ουσία ένα σύνολο μαζί με μία διμελή σχέση επί του συνόλου αυτού.

Ο όρος ‘γράφημα’ οφείλεται στο ότι συνήθως η απεικόνιση της σχέσης γίνεται με γραφικό τρόπο (σχεδιάζεται σε μορφή διαγράμματος).

Γραφήματα

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες γραφημάτων, τα μη κατευθυνόμενα, στα οποία οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση και τα κατευθυνόμενα, στα οποία οι ακμές έχουν κατεύθυνση.



Σε κάθε κατηγορία υπάρχουν διάφορες παραλλαγές, οι οποίες επιτρέπουν βρόχους, παράλληλες ακμές, ανάθεση βαρών ή ετικετών στις ακμές, στις κορυφές ή και στα δύο κλπ.

Γραφήματα

Στη συνέχεια ο όρος γράφημα χωρίς άλλο προσδιορισμό θα αναφέρεται σε μη κατευθυνόμενο γράφημα

Μη κατευθυνόμενα γραφήματα

Ορισμός

Ένα (μη κατευθυνόμενο) γράφημα είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$ όπου:

- V είναι ένα πεπερασμένο, μη κενό σύνολο κορυφών
- E είναι ένα σύνολο διμελών υποσυνόλων του V που ονομάζεται σύνολο ακμών.

Γραφήματα

Αν $e = \{u, v\} \in E$ τότε:

- Οι κορυφές u και v ονομάζονται γειτονικές
- Η e λέμε ότι προσπίπτει στη u και στη v και ότι συνδέει τις u και v.
- Οι κορυφές u και v ονομάζονται άκρα της e

Μία κορυφή v που δεν είναι άκρο καμίας ακμής ονομάζεται μεμονωμένη.

Γραφήματα

Παρατηρήσεις:

- Κάθε ακμή ενός γραφήματος είναι ένα σύνολο αποτελούμενο από δύο κορυφές. Επειδή τα στοιχεία ενός συνόλου δεν έχουν προκαθορισμένη διάταξη, οι ακμές δεν έχουν κατεύθυνση.
- Σε ένα γράφημα δεν επιτρέπεται μία κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της. Μία ακμή που συνδέει μία κορυφή με τον εαυτό της ονομάζεται βρόχος και η παραλλαγή της έννοιας του γραφήματος που επιτρέπει τέτοιες ακμές ονομάζεται γράφημα με βρόχους.

Γραφήματα

- Συνήθως ένα γράφημα το σχεδιάζουμε, αναπαριστώντας τις κορυφές του με μικρούς κύκλους (ή τετράγωνα ή αλλά σχήματα) και τις ακμές του με ευθύγραμμα τμηματα (ή τεθλασμένες γραμμές ή καμπυλόγραμμα τμήματα) που συνδέουν τις κορυφές.
- Οι θέσεις των κορυφών στο επίπεδο και η μορφή των ακμών μπορεί να είναι οποιεσδήποτε, έτσι ώστε ο σχεδιασμός να αποτυπώνει όσο το δυνατόν καλύτερα τη δομή του γραφήματος. Συνεπώς υπάρχουν άπειρες διαφορετικές απεικονίσεις για το ίδιο γράφημα.

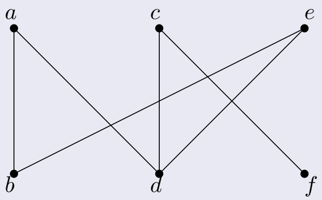
Γραφήματα

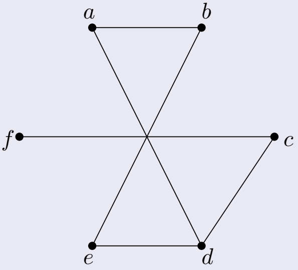
Υπάρχουν οι εξείς περιορισμοί κατά το σχεδιασμό ενος γραφήματος:

- Διαφορετικές κορυφές αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία του επιπέδου.
- Η γραμμή που αναπαριστά μία ακμή ενώνει τα σημεία που αντιστοιχούν στα δύο άκρα τη ακμής και δεν επιτρέπεται να περιέχει σημεία που αντιστοιχούν σε άλλες κορυφές του γραφήματος.
- Οι γραμμές που αναπαριστούν δύο ακμές επιτρέπεται να τέμνονται, ωστόσο αν αυτό συμβαίνει θα πρέπει να έχουν ένα μόναδικό κοινό σημείο.

Παράδειγμα

Το γράφημα $G = (V, E)$ με $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ και $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{c, f\}, \{e, d\}, \{e, b\}\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί μέ οποιονδήποτε από τους παρακάτω τρόπους





Γραφήματα

Ορισμός

Βαθμός μίας κορυφής v σε ένα γράφημα G, ο οποίος συμβολίζεται με $d_G(v)$, ονομάζεται το πλήθος των ακμών του G που προσπίπτουν στη v.

Αν είναι σαφές από τα συμφραζόμενα σε ποιο γράφημα αναφερόμαστε, τότε συμβολίζουμε το βαθμό της v απλά με $d(v)$.

Αν $G = (V, E)$, τότε $d_G(v) = |\{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}|$.

Ορισμός

Βαθμός ενός γραφήματος G, ο οποίος συμβολίζεται με $\Delta(G)$, ονομάζεται ο μέγιστος βαθμός ανάμεσα σε όλες τις κορυφές του.

Γραφήματα

Ορισμός

Γειτονιά μίας κορυφής v σε ένα γράφημα G, η οποία συμβολίζεται με $N_G(v)$, ονομάζεται το σύνολο των κορυφών του G που συνδέονται με ακμή με τη v.

Αν $G = (V, E)$ τότε $N_G(v) = \{u \in V \mid \{v, u\} \in E\}$.

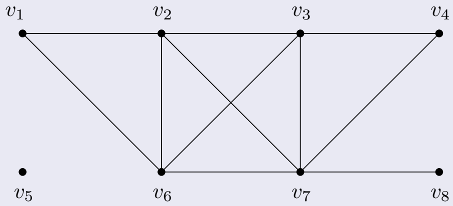
Ορισμός

Κλειστή γειτονιά μίας κορυφής v σε ένα γράφημα G, η οποίο συμβολίζεται με $N_G[v]$, ονομάζεται το σύνολο κορυφών $N_G(v) \cup \{v\}$.

Γραφήματα

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα G έχουμε
$d_G(v_1) = 2$, $d_G(v_5) = 0$, $d_G(v_7) = 5$, $d_G(v_8) = 1$
$\Delta(G) = 5$.
$N_G(v_1) = \{v_2, v_6\}$, $N_G(v_5) = \emptyset$, $N_G(v_7) = \{v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}$,
$N_G(v_8) = \{v_7\}$
$N_G[v_1] = \{v_1, v_2, v_6\}$, $N_G[v_5] = \{v_5\}$



Γραφήματα

Παρατηρούμε ότι για κάθε γράφημα $G = (V, E)$ και κάθε κορυφή $v \in V$ ισχύουν τα παρακάτω:

- $d_G(v) \leq |V| - 1$
- $|N_G(v)| = d_G(v)$ και $|N_G[v]| = d_G(v) + 1$
- $N_G(v) = \{u \mid v \in N_G(u)\}$

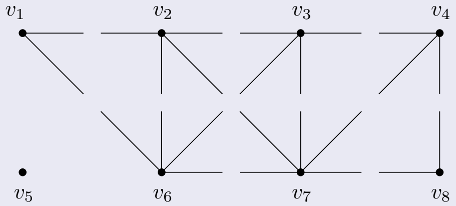
Θεώρημα

Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$, ισχύει

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε την παραπάνω ισότητα, ας θεωρήσουμε ότι κόβουμε κάθε ακμή σε δύο κομμάτια, έτσι ώστε το κάθε ένα από αυτά να παραμείνει συνδεδεμόνο με διαφορετικό άκρο της ακμής, όπως φαίνεται στο πρακάτω σχήμα:



Απόδειξη (συνέχεια)

Μετράμε τα κομμάτια εξετάζοντας τις κορυφές. Το πλήθος των κομματιών που είναι συνδεδεμένα με μία κορυφή v είναι $d_G(v)$. Συνεπώς το συνολικό πλήθος των κομματιών είναι $\sum_{v \in V} d_G(v)$.

Στη συνέχεια μετράμε τα κομμάτια εξετάζοντας τις ακμές. Επειδή κάθε ακμή χωρίζεται σε δύο κομμάτια το πλήθος των κομματιών είναι $2|E|$.

Επειδή το πλήθος των κομματιών είναι μονοσήμαντα ορισμένο και ανεξάρτητο από τον τρόπο μέτρησης θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|$$

$\square$

Γραφήματα

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα γράφημα με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους, χρησιμοποιώντας πίνακες.

Στους παρακάτω ορισμούς θεωρούμε ότι για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, με $n = |V|$ κορυφές και $m = |E|$ ακμές, μας δίνεται μία διάταξη $v_1, v_2, \ldots, v_n$ των κορυφών του και μία διάταξη $e_1, e_2, \ldots, e_m$ των ακμών του.

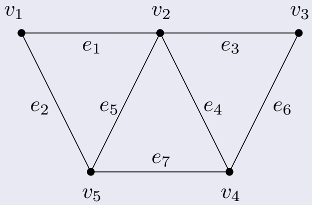
Ο πίνακας γειτνίασης A του γραφήματος G είναι ο πίνακας διάστασης $n \times n$, όπου:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Γραφήματα

Παράδειγμα

Έστω το παρακάτω γράφημα G:



Ο πίνακας γειτνίασης του G είναι ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Γραφήματα

Ιδιότητες του πίνακα γειτνίασης

- είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο.
- όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι 0.
- το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής ή στήλης του είναι ο βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- Το συνολικό πλήθος των στοιχείων του πίνακα που έχουν τιμή 1 είναι $2|E|$.

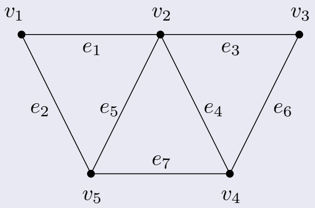
Γραφήματα

Ο πίνακα πρόσπτωσης B του γραφήματος G είναι ο πίνακας διάστασης $n \times m$, όπου:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \in e_j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω το παρακάτω γράφημα G:



Ο πίνακας πρόσπτωσης του G είναι ο $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Γραφήματα

Ιδιότητες του πίνακα πρόσπτωσης

- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ο βαθμός της αντίστοιχης κορυφής.
- Το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι 2.
- Το συνολικό πλήθος των στοιχείων του πίνακα που έχουν τιμή 1 είναι $2|E|$.

Θεώρημα

Έστω A και B οι πίνακες γειτνίασης και πρόσπτωσης ενός γραφήματος G. Τότε ισχύει $BB^T = A + C$ όπου

$$c_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Απόδειξη

Έστω $S = BB^T$. Συνεπώς $s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot b_{jk}$.

Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $i \neq j$ και οι κορυφές v_i και v_j είναι γειτονικές, τότε υπάρχει κάποια ακμή e_ℓ τέτοια ώστε $e_\ell = \{v_i, v_j\}$ και άρα $b_{i\ell} = b_{j\ell} = 1$.

Οποιαδήποτε άλλη ακμή του γραφήματος θα πρέπει να μην έχει ως άκρο τουλάχιστον μία από τις v_i, v_j και άρα για κάθε $k \neq \ell$ ισχύει $b_{ik} = 0$ ή $b_{jk} = 0$.

Άρα σε αυτή την περίπτωση

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot b_{jk} = (\sum_{k=1}^{\ell-1} b_{ik} \cdot b_{jk}) + b_{i\ell} \cdot b_{j\ell} + (\sum_{k=\ell+1}^{m} b_{ik} \cdot b_{jk}) = 0+1+0 = 1.$$

Επιπλέον, $a_{ij} = 1$ επειδή οι v_i και v_j είναι γειτονικές και $c_{ij} = 0$ επειδή $i \neq j$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $i \neq j$ και οι κορυφές v_i και v_j δεν είναι γειτονικές, τότε για κάθε k ισχύει $b_{ik} = 0$ ή $b_{jk} = 0$.

Άρα σε αυτή την περίπτωση

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot b_{jk} = 0.$$

Επιπλέον, $a_{ij} = 0$ επειδή οι v_i και v_j δεν είναι γειτονικές και $c_{ij} = 0$ επειδή $i \neq j$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $i = j$ τότε

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot b_{ik} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} = d_G(v_i)$$

(όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή $b_{ik} \in \{0, 1\}$ και ισχύει $0 \cdot 0 = 0$ και $1 \cdot 1 = 1$).

Επιπλέον, $a_{ij} = 0$ και $c_{ij} = d_G(v_i)$ επειδή $i = j$.

Συνεπώς σε για κάθε i, j ισχύει $s_{ij} = a_{ij} + c_{ij}$. Άρα $BB^T = S = A + C$. $\square$

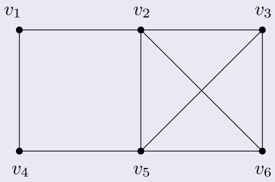
Ορισμός

Το γράφημα $G' = (V', E')$ ονομάζεται υπογράφημα του $G = (V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

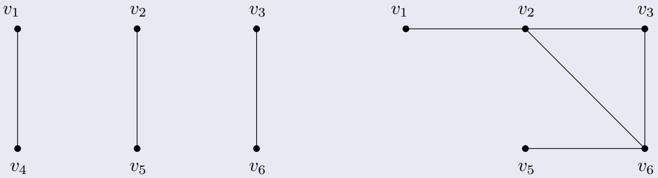
Γραφήματα

Παράδειγμα

Γράφημα G:



Υπογραφήματα του G:



Γραφήματα

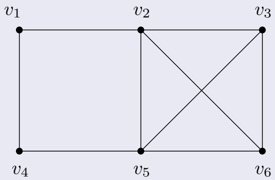
Ορισμός

Έστω $G' = (V', E')$ υπογράφημα του $G = (V, E)$. Το G' ονομάζεται

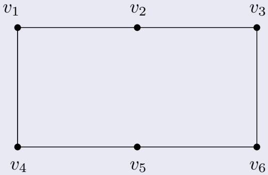
- συνδετικό ή επικαλύπτον υπογράφημα του G αν $V' = V$.
- παραγόμενο από το σύνολο κορυφών V' υπογράφημα του G, αν το E' περιέχει όλες τις ακμές του E με άκρα κορυφές του V'.

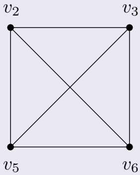
Παράδειγμα

Γράφημα G:



Αριστερά: συνδετικό υπογράφημα του G. Δεξιά: παραγόμενο υπογραφήματα του G από το σύνολο κορυφών $\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$.





Ορισμός

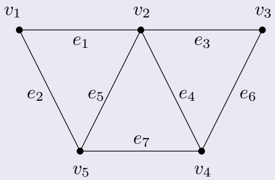
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $E' \subseteq E$ ένα υποσύνολο των ακμών του G. Συμβολίζουμε με $G - E'$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν διαγράφουμε όλες τις ακμές του E'.

Ισχύει $G - E' = (V, E - E')$.

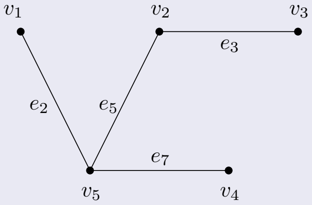
Αν $E' = \{e\}$ τότε το $G - E'$ συμβολίζεται πιο απλά με $G - e$.

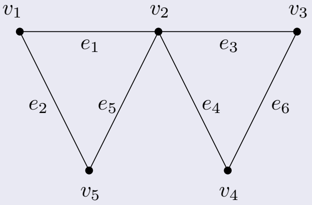
Παράδειγμα

Γράφημα G:



Αριστερά: το γράφημα $G - \{e_1, e_4, e_6\}$. Δεξιά: το γράφημα $G - e_7$.





Γραφήματα

Ορισμός

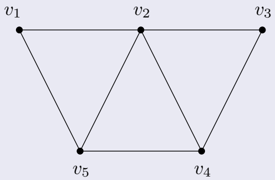
Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $V' \subseteq V$ ένα υποσύνολο των κορυφών του G. Συμβολίζουμε με $G - V'$ το γράφημα που προκύπτει από το G αν διαγράψουμε όλες τις κορυφές του V' καθώς και τις προσπίπτουσες σε αυτές ακμές.

Ισχύει $G - V' = (V - V', E - \{\{u, v\} \mid u \in V' \text{ ή } v \in V'\})$.

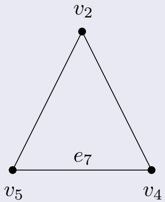
Αν $V' = \{v\}$ τότε το $G - V'$ συμβολίζεται πιο απλά με $G - v$.

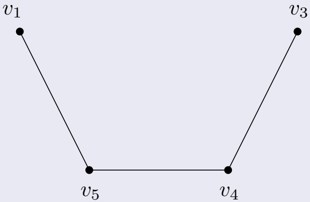
Παράδειγμα

Γράφημα G:



Αριστερά: το γράφημα $G - \{v_1, v_3\}$. Δεξιά: το γράφημα $G - v_2$.





Γραφήματα

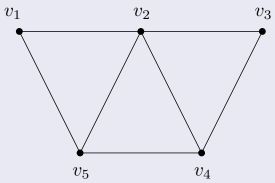
Ορισμός

Ονομάζουμε συμπλήρωμα ενός γραφήματος $G = (V, E)$ το γράφημα $\overline{G} = (V, \overline{E})$, όπου το $\overline{E}$ περιέχει όσες ακμές δεν περιέχονται στο E (πιο αυστηρά: όλα τα διμελή σύνολα με στοιχεία από το V που δεν ανήκουν στο E).

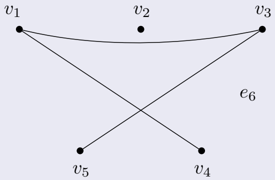
Γραφήματα

Παράδειγμα

Γράφημα G:



Το συμπλήρωμα $\overline{G}$ του G.



Γραφήματα

Ορισμός

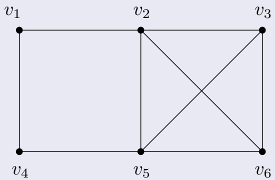
Όνομάζουμε διαδρομή ή περίπατο στο γράφημα $G = (V, E)$ μία ακολουθία κορυφών $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$, όπου $k \geq 1$, τέτοια ώστε $\{x_i, x_{i+1}\} \in E$, για κάθε i με $1 \leq i \leq k - 1$.

Ο αριθμός $k - 1$ ονομάζεται μήκος της διαδρομής. Οι κορυφές x_1 και x_k ονομάζονται άκρα της διαδρομής και οι κορυφές $x_2, \ldots x_{k-1}$ ονομάζονται εσωτερικές κορυφές της διαδρομής.

Λέμε ότι η διαδρομή w συνδέει τις κορυφές x_1 και x_k και ότι περνάει από τις κορυφές $x_2, \ldots x_{k-1}$ και από τις ακμές $\{x_1, x_2\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\ldots$, $\{x_{k-1}, x_k\}$.

Παράδειγμα

Η ακολουθία $w = v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_5, v_2, v_1, v_4$ αποτελεί μία διαδρομή στο γράφημα G. Το μήκος της w είναι 8.



Ορισμός

Μία διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$ ονομάζεται

- κλειστή αν $k > 1$ και $x_1 = x_k$
- ανοικτή αν $k = 1$ ή $x_1 \neq x_k$.

Γραφήματα

Μία διαδρομή μήκους 0 αποτελείται από μία μόνο κορυφή.

Η διαδρομή $w = x_1$ μήκους 0 θεωρούμε ότι συνδέει την κορυφή x_1 με τον εαυτό της.

Γραφήματα

Αν $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι μία διαδρομή στο γράφημα G, τότε οι ακμές $\{x_1, x_2\}, \ldots \{x_{k-1}, x_k\}$ θα λέμε ότι είναι οι ακμές της διαδρομής ή ότι περιέχονται στη διαδρομή.

Γραφήματα

Ορισμός

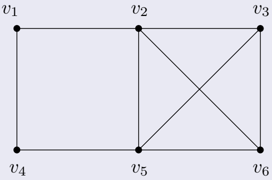
Μία ανοιχτή διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$ σε ένα γράφημα G ονομάζεται ίχνος αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k-1$, ισχύει $\{x_i, x_{i+1}\} \neq \{x_j, x_{j+1}\}$.

Ορισμός

Μία ανοιχτή διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k$ σε ένα γράφημα G ονομάζεται μονοπάτι αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k$, ισχύει $x_i \neq x_j$.

Παράδειγμα

Η ακολουθία $t = v_1, v_2, v_5, v_3, v_6, v_5, v_4$ είναι ένα ίχνος στο γράφημα G.
Η ακολουθία $p = v_1, v_2, v_6, v_3, v_5, v_4$ είναι ένα μονοπάτι (και ίχνος) στο G.



Γραφήματα

Παρατηρήσεις:

- Σε ένα ίχνος και σε ένα μονοπάτι με μήκος μεγαλύτερο από 0, τα δύο άκρα πρέπει να είναι διαφορετικές κορυφές.
- Σε ένα ίχνος επιτρέπεται μία κορυφή να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές, αλλά δεν επιτρέπεται μία ακμή να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές.
- Σε ένα μονοπάτι κάθε κορυφή και κάθε ακμή επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μία φορά.
- Κάθε μονοπάτι είναι ίχνος, ενώ το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.

Θεώρημα

Αν σε ένα γράφημα G υπάρχει διαδρομή με άκρα τις κορυφές v και u τότε υπάρχει και μονοπάτι με άκρα τις v και u.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με ισχυρή επαγωγή στο μήκος n της διαδρομής.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για $n = 0$ ο ισχυρισμός ισχύει, καθώς μία διαδρομή μήκους 0 είναι μονοπάτι (περιέχει μία μόνο κορυφή και άρα δεν μπορεί κάποια κορυφή να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές).

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε διαδρομή με μήκος το πολύ n. Έστω μία διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ μήκους $n + 1$.

Αν $x_i \neq x_j$ για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq n + 2$, τότε η ίδια η w είναι μονοπάτι.

Απόδειξη (συνέχεια)

Σε αντίθετη περίπτωση ισχύει $x_i = x_j$ για κάποιες τιμές i, j με $1 \leq i < j \leq n+2$. Η ακολουθία $w' = x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots x_{n+2}$ που προκύπτει από την w αν διαγραφούν οι κορυφές $x_{i+1} \ldots x_j$ είναι επίσης διαδρομή με άκρα τις κορυφές x_1 και x_{n+2} και έχει μήκος το πολύ n.

Από την επαγωγική υπόθεση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει μονοπάτι στο G με άκρα τις κορυφές x_1 και x_{n+2}.

Συνεπώς ο ισχυρισμός ισχύει και για $n+1$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Πόρισμα

Αν δύο κορυφές σε ένα γράφημα G συνδέονται με διαδρομή, τότε συνδέονται και με διαδρομή μήκους $n-1$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών του γραφήματος.

Ορισμός

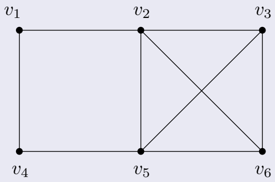
Μία κλειστή διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ $(x_{k+1} = x_1)$ σε ένα γράφημα G ονομάζεται κύκλωμα αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k$, ισχύει $\{x_i, x_{i+1}\} \neq \{x_j, x_{j+1}\}$.

Ορισμός

Μία κλειστή διαδρομή $w = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1$ με $k \geq 3$ σε ένα γράφημα G ονομάζεται κύκλος αν για κάθε i, j με $1 \leq i < j \leq k$, ισχύει $x_i \neq x_j$.

Παράδειγμα

Η ακολουθία $t = v_1, v_2, v_3, v_6, v_2, v_5, v_4, v_1$ είναι ένα κύκλωμα στο γράφημα G. Η ακολουθία $p = v_1, v_2, v_6, v_5, v_4, v_1$ είναι ένας κύκλος (και κύκλωμα) στο G.



Παρατηρήσεις:

- Σε ένα κύκλωμα οποιαδήποτε κορυφή επιτρέπεται να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές, αλλά δεν επιτρέπεται μία ακμή να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές.
- Σε ένα κύκλο κάθε κορυφή και κάθε ακμή επιτρέπεται να εμφανίζεται το πολύ μία φορά.
- Κάθε κύκλος είναι κύκλωμα, ενώ το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει.
- Κάθε κύκλωμα έχει μήκος τουλάχιστον 3.

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

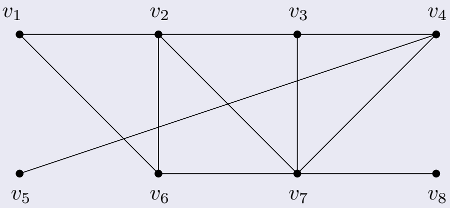
Αν σε ένα γράφημα G υπάρχει κύκλωμα τότε υπάρχει και κύκλος.

Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται συνεκτικό αν για οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in V$ υπάρχει μονοπάτι με άκρα τις u, v.

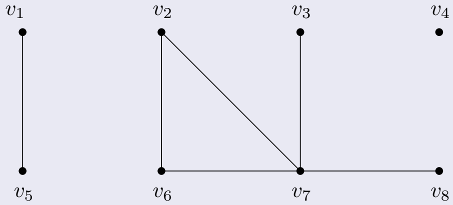
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα είναι συνεκτικό:



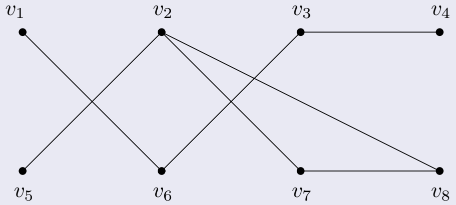
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα δεν είναι συνεκτικό (δεν υπάρχει για παράδειγμα μονοπάτι με άκρα τις v_1 και v_2 ούτε μονοπάτι με άκρα την μεμονωμένη κορυφή v_4 και οποιαδήποτε άλλη κορυφή):



Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα δεν είναι συνεκτικό (δεν υπάρχει για παράδειγμα μονοπάτι μονοπάτι με άκρα τις v_1 και v_2 ούτε μονοπάτι με άκρα τις v_4 και v_8):



Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

Έστω ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και έστω μη κενό σύνολο κορυφών $U \subset V$. Τότε υπάρχουν κορυφές $u \in U$ και $v \in (V - U)$ τέτοιες ώστε $\{u, v\} \in E$.

Γραφήματα

Ένα γράφημα το οποίο δεν είναι συνεκτικό μπορεί να διαμεριστεί σε υπογραφήματα, καθένα από τα οποία είναι συνεκτικό.

Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $V' \subseteq V$ ένα υποσύνολο των κορυφών του. Το υπογράφημα $G' = (V', E')$ του G το οποίο παράγεται από το σύνολο κορυφών V' ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα του G αν

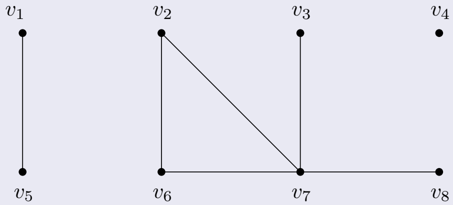
- το G' είναι συνεκτικό
- για κάθε υποσύνολο κορυφών V'' του G τέτοιο ώστε $V' \subset V''$, το υπογράφημα του G που παράγεται από το V'' δεν είναι συνεκτικό.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό τα σύνολα κορυφών που παράγουν συνεκτικές συνιστώσες, είναι τα μεγιστικά σύνολα, ανάμεσα σε αυτά που παράγουν συνεκτικά υπογραφήματα.

Ένα γράφημα είναι συνεκτικό αν αποτελείται από μία μόνο συνεκτική συνιστώσα.

Παράδειγμα

Το παρακάτω υπογράφημα έχει τρεις συνεκτικές συνιστώσες που παράγονται από τα σύνολα κορυφών $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_3, v_6, v_7, v_8\}$ και $\{v_4\}$.



Το υπογράφημα που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ δεν είναι συνεκτική συνιστώσα επειδή δεν είναι συνεκτικό.
Το υπογράφημα που παράγεται από το σύνολο $\{v_6, v_7, v_8\}$ δεν είναι συνεκτική συνιστώσα, επειδή υπάρχει υπερσύνολο του συνόλου αυτού που παράγει συνεκτικό υπογράφημα.

Το παρακάτω θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί εύκολα και περιγράφει τη βασική ιδιότητα των συνεκτικών συνιστωσών (η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση).

Θεώρημα

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Τότε κάθε κορυφή στο σύνολο V και κάθε ακμή στο σύνολο E ανήκει σε μία ακριβώς συνεκτική συνιστώσα του G.

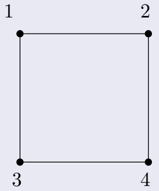
Γραφήματα

Έχουμε δει ότι μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα γράφημα με πολλούς (στην πραγματικότητα άπειρους) τρόπους.

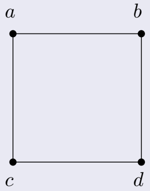
Από την άλλη είναι δυνατόν δύο σχεδιασμοί που φαίνονται πανομοιότυποι να απεικονίζουν γραφήματα τα οποία συσχετίζουν αντικείμενα από διαφορετικά σύνολα ή συσχετίζουν αντικείμενα από το ίδιο σύνολο με διαφορετικό τρόπο και άρα τα γραφήματα αυτά είναι διαφορετικά.

Γραφήματα

Τα παρακάτω γραφήματα είναι διαφορετικά παρότι σχεδιάζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, καθώς έχουν διαφορετικά σύνολα κορυφών (και άρα απεικονίζουν σχέσεις επί διαφορετικών συνόλων):



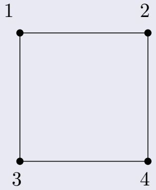
G



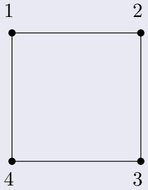
H

Γραφήματα

Τα παρακάτω γραφήματα είναι διαφορετικά παρότι σχεδιάζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και έχουν το ίδιο σύνολο κορυφών, καθώς έχουν διαφορετικά σύνολα ακμών (και άρα απεικονίζουν διαφορετικές σχέσεις επί του ίδιου συνόλου):



G



H

Ορισμός

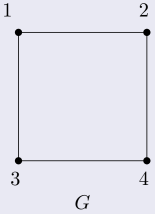
Δύο γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ ονομάζονται ισομορφικά αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση f από το V_1 στο V_2, τέτοια ώστε για οποιεσδήποτε κορυφές $u, v \in V_1$, ισχύει $\{u, v\} \in E_1$ αν και μόνο αν $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

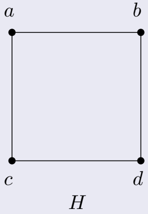
Διαισθητικά, δύο γραφήματα είναι ισομορφικά αν μπορούμε να μετονομάσουμε κατάλληλα τις κορυφές του ενός έτσι ώστε να προκύψει το άλλο και αντίστροφα.

Δύο ισομορφικά γραφήματα μπορούν να σχεδιαστούν με τον ίδιο τρόπο με εξαίρεση τα ονόματα των κορυφών.

Γραφήματα

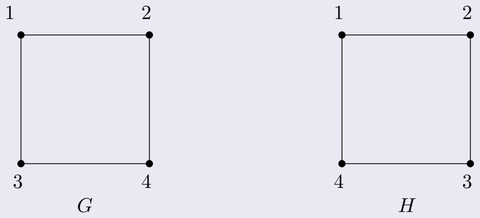
Τα παρακάτω γραφήματα είναι ισομορφικά (ορίζουμε $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$):





Γραφήματα

Τα παρακάτω γραφήματα είναι ισομορφικά (ορίζουμε $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$):



Γραφήματα

Είναι αναμενόμενο δύο ισομορφικά γραφήματα να έχουν παρόμοιες ιδιότητες. Διασθητικά οτιδήποτε δεν εξαρτάται από τα ονόματα των κορυφών θα πρέπει να έχει την ίδια συμπεριφορά και στα δύο γραφήματα.

Μία παράμετρος που ορίζεται για γραφήματα ονομάζεται αναλλοίωτη αν έχει την ίδια τιμή σε ισομορφικά γραφήματα.

Για παράδειγμα είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι το πλήθος των κορυφών, το πλήθος των ακμών, ο βαθμός του γραφήματος, το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών, το μέγιστο μήκος μονοπατιού, το πλήθος κορυφών με βαθμό d για κάθε d είναι αναλλοίωτες.

Γραφήματα

Δεν είναι γνωστό κάποιο σύνολο αναλλοίωτων παραμέτρων στις οποίες αν δύο γραφήματα συμφωνούν να μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι είναι ισομορφικά.

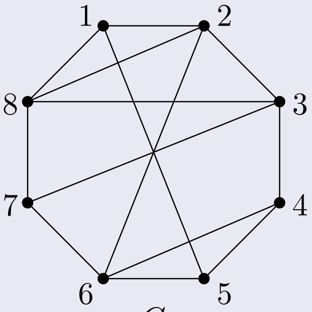
Ωστόσο οι αναλλοίωτες είναι χρήσιμες για να αποδεικνύουμε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά.

Για να δείξουμε ότι δύο γραφήματα δεν είναι ισομορφικά αρκεί να βρούμε μια αναλλοίωτη παράμετρο που έχει διαφορετικές τιμές στα δύο γραφήματα.

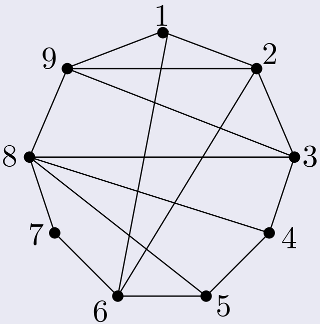
Γραφήματα

Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα δεν είναι ισομορφικά, καθώς το G έχει 8 κορυφές ενώ το H έχει 9 κορυφές και το πλήθος των κορυφών αποτελεί αναλλοίωτη παράμετρο.



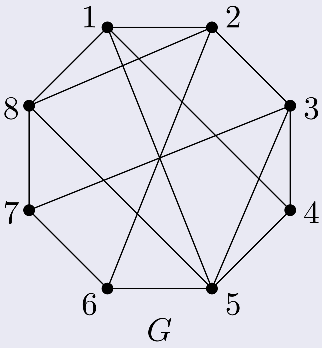
G

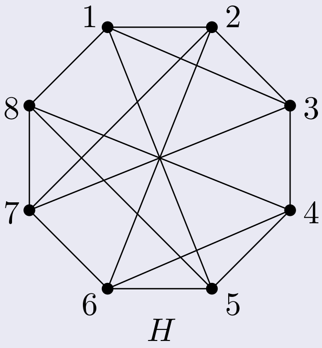


H

Παράδειγμα

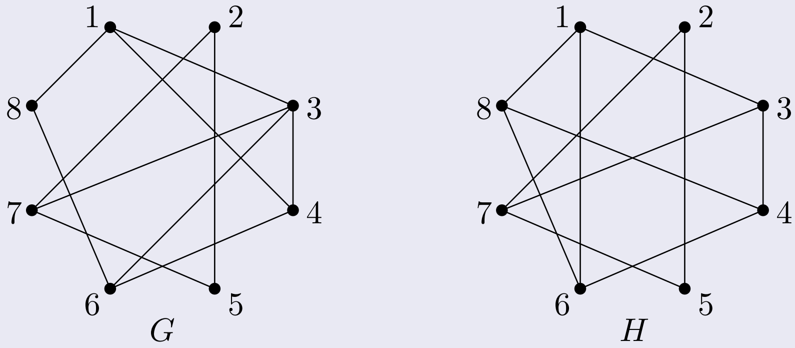
Τα παρακάτω γραφήματα (τα οποία έχουν ίδιο πλήθος κορυφών) δεν είναι ισομορφικά, καθώς το G έχει 15 ακμές ενώ το H έχει 16 ακμές και το πλήθος των ακμών αποτελεί αναλλοίωτη παράμετρο.





Παράδειγμα

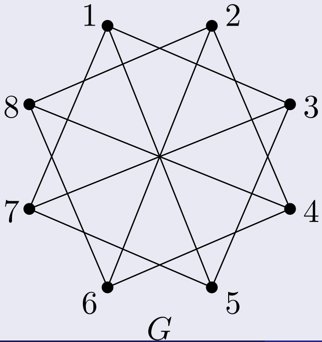
Τα παρακάτω γραφήματα (τα οποία έχουν ίδιο πλήθος κορυφών και ακμών) δεν είναι ισομορφικά, καθώς το G έχει μέγιστο βαθμό 4 ενώ το H έχει μέγιστο βαθμό 3 και ο μέγιστος βαθμός αποτελεί αναλλοίωτη παράμετρο.

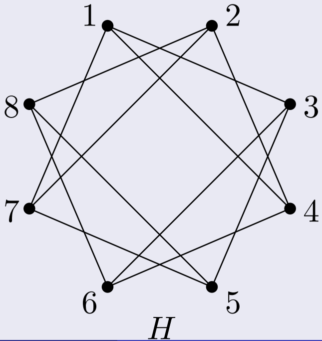


Γραφήματα

Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα (τα οποία έχουν ίδιο πλήθος κορυφών και ακμών και ίδιο μέγιστο βαθμό) δεν είναι ισομορφικά, καθώς το H αποτελείται από μία συνεκτική συνιστώσα (είναι συνεκτικό), ενώ το G αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες και η το πλήθος των συνιστωσών αποτελεί αναλλοίωτη παράμετρο.





Γραφήματα

Στη συνέχεια θα ορίσουμε μερικές ειδικές κατηγορίες γραφημάτων.

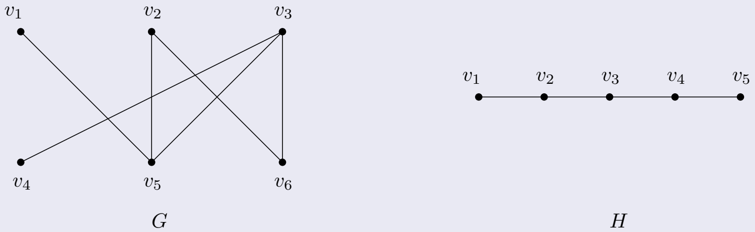
Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται διμερές αν το σύνολο V μπορεί να χωριστεί σε δύο ξένα σύνολα κορυφών V_1 και V_2 έτσι ώστε για κάθε ακμή e το ένα άκρο της να ανήκει στο V_1 και το άλλο στο V_2.

Σε ένα διμερές γράφημα, ισχύει $E \subseteq \{\{v, u\} \mid v \in V_1 \text{ και } u \in V_2\}$, για κάποια σύνολα V_1 και V_2 με $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Συμβολίζουμε ένα διμερές γράφημα με διαχωρισμό κορυφών V_1 και V_2 ως $G = (V_1, V_2, E)$.

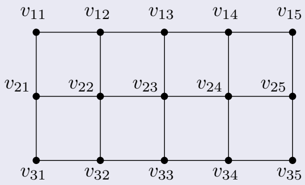
Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα G και H είναι διμερή:

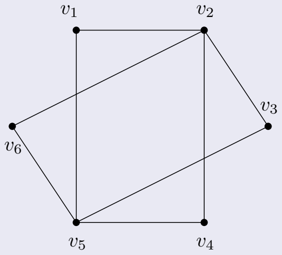


Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα G και H είναι διμερή:



G



H

Γραφήματα

Ορισμός

Ένα γράφημα (V, E) με σύνολο κορυφών $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{v_i, v_j\} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$, ονομάζεται πλήρες γράφημα.

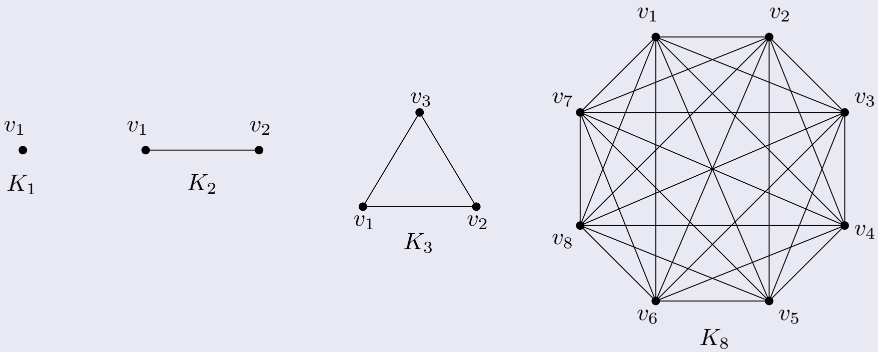
Στο πλήρες γράφημα υπάρχει ακμή ανάμεσα σε οποιοδήποτε ζεύγος διαφορετικών κορυφών. Παρατηρούμε ότι τα πλήρη γραφήματα με n κορυφές είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

Συμβολίζουμε με K_n έναν αυθαίρετα επιλεγμένο εκπρόσωπο της κλάσης των πλήρων γραφημάτων με n κορυφές. Πολλές φορές κατά το σχεδιασμό παραλείπουμε τα ονόματα των κορυφών στο K_n και αναφέρουμε το K_n ως 'το πλήρες γράφημα με n κορυφές'.

Γραφήματα

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται τα γραφήματα K_1, K_2, K_3 και K_8:



Γραφήματα

Ορισμός

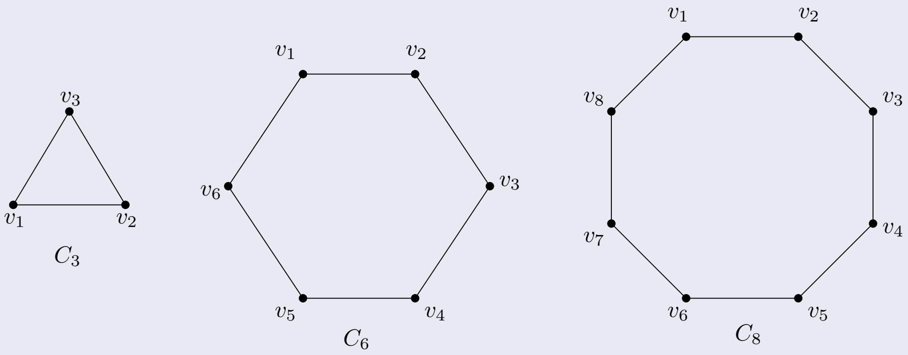
Ένα γράφημα (V, E) με σύνολο κορυφών $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 3)$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\} \cup \{\{v_n, v_1\}\}$, ονομάζεται γράφημα-κύκλος (ή απλά κύκλος).

Στο γράφημα-κύκλο όλες οι ακμές σχηματίζουν έναν κύκλο. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα-κύκλοι με n κορυφές είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

Συμβολίζουμε με C_n έναν αυθαίρετα επιλεγμένο εκπρόσωπο της κλάσης των γραφημάτων-κύκλων με n κορυφές. Πολλές φορές κατά το σχεδιασμό παραλείπουμε τα ονόματα των κορυφών στο C_n και αναφέρουμε το C_n ως 'το γράφημα-κύκλο με n κορυφές'.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται τα γραφήματα C_3, C_6 και C_8:



Γραφήματα

Ορισμός

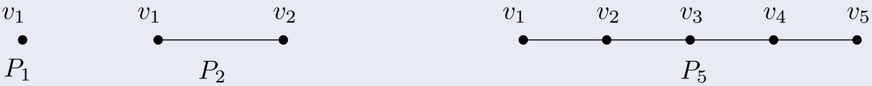
Ένα γράφημα (V, E) με σύνολο κορυφών $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 3)$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 1 \leq i < n\}$, ονομάζεται γράφημα-μονοπάτι (ή απλά μονοπάτι).

Στο γράφημα-μονοπάτι όλες οι ακμές σχηματίζουν έναν μονοπάτι. Παρατηρούμε ότι τα γραφήματα-μονοπάτια με n κορυφές είναι ισομορφικά μεταξύ τους.

Συμβολίζουμε με P_n έναν αυθαίρετα επιλεγμένο εκπρόσωπο της κλάσης των γραφημάτων-μονοπατιών με n κορυφές. Πολλές φορές κατά το σχεδιασμό παραλείπουμε τα ονόματα των κορυφών στο P_n και αναφέρουμε το P_n ως 'το γράφημα-μονοπάτι με n κορυφές'.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται τα γραφήματα P_1, P_2 και P_5:



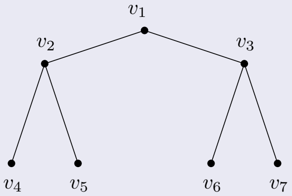
Ορισμός

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται δέντρο αν είναι συνεκτικό δεν υπάρχει κύκλος στο G.

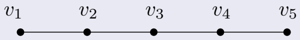
Παρατηρούμε ότι κάθε γράφημα μονοπάτι είναι δέντρο.

Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα G και H είναι δέντρα:



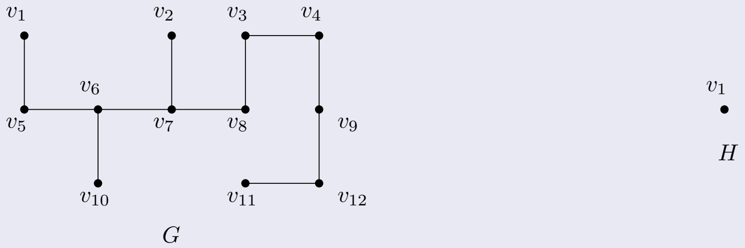
G



H

Παράδειγμα

Τα παρακάτω γραφήματα G και H είναι δέντρα:



Ορισμός

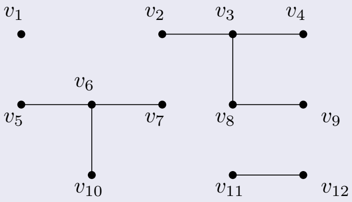
Ένα γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται δάσος αν δεν υπάρχει κύκλος στο G.

Ένα γράφημα είναι δάσος αν και μόνο αν κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι δέντρο.

Γραφήματα

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι δάσος:



G

Ορισμός

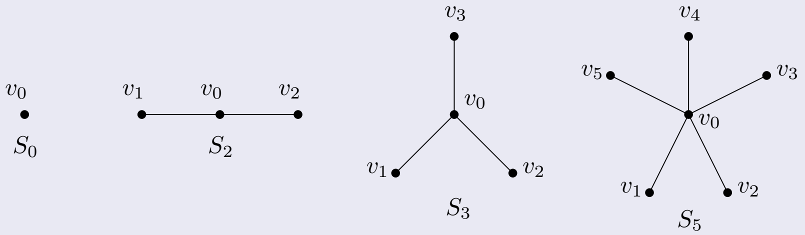
Ένα γράφημα (V, E) με σύνολο κορυφών $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{v_0, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$, ονομάζεται αστέρι βαθμού n.

Τα αστέρια είναι δέντρα στα οποία υπάρχει το πολύ μία κορυφή με βαθμό μεγαλύτερο από 1. Η κορυφή αυτή συνδέεται με όλες τις υπόλοιπες κορυφές του αστεριού.

Συμβολίζουμε με S_n έναν αυθαίρετα επιλεγμένο εκπρόσωπο της κλάσης των αστεριών βαθμού n.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται τα γραφήματα S_0, S_2, S_3 και S_5:



Γραφήματα

Ορισμός

Ένα διμερές γράφημα (U, V, E) με $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{u_i, v_j\} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ ονομάζεται πλήρες διμερές γράφημα.

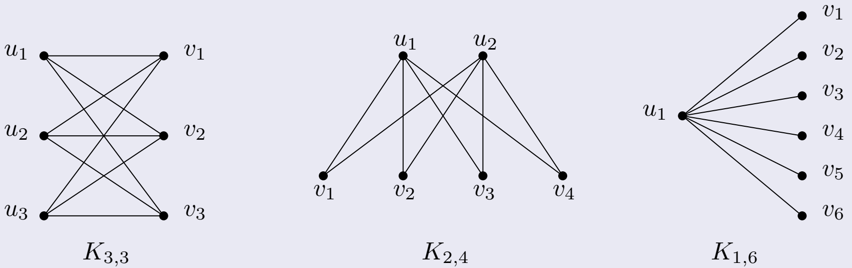
Στο πλήρες διμερές γράφημα με χωρισμό κορυφών στα σύνολα U και V, υπάρχει ακμή ανάμεσα σε κάθε κορυφή του U και κάθε κορυφή του V.

Συμβολίζουμε με $K_{m,n}$ έναν αυθαίρετα επιλεγμένο εκπρόσωπο της κλάσης των πλήρων γραφημάτων με m και n κορυφές στα δύο μέρη. Πολλές φορές κατά το σχεδιασμό παραλείπουμε τα ονόματα των κορυφών στο $K_{m,n}$ και αναφέρουμε το $K_{m,n}$ ως 'το πλήρες διμερές γράφημα με m και n κορυφές'.

Γραφήματα

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται τα γραφήματα $K_{3,3}$, $K_{2,4}$, και $K_{1,6}$:



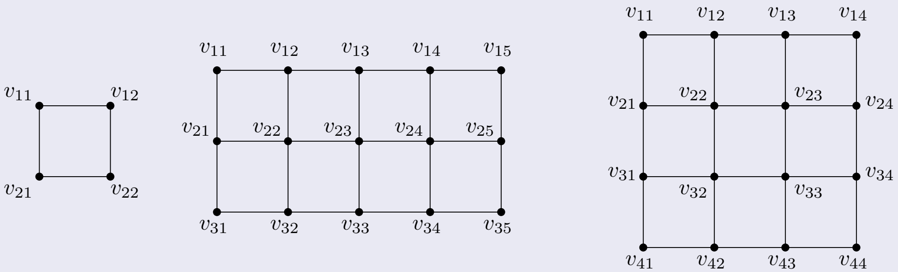
Ορισμός

Ένα γράφημα (V, E) με σύνολο κορυφών $V = \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, στο οποίο το σύνολο ακμών είναι το $E = \{\{v_{ij}, v_{i'j'}\} \mid 1 \leq i, i' \leq m, 1 \leq j, j' \leq n, |i - i'| + |j - j'| = 1\}$, ονομάζεται $(m \times n)$-πλέγμα.

Γραφήματα

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζονται πλέγματα (2×2), (3×5) και (4×4):



Ορισμένα γραφήματα που ανήκουν σε διαφορετικές κατηγορίες ανάμεσα σε αυτές που περιγράψαμε είναι ισομορφικά μεταξύ τους. Τα γραφήματα που δίνονται παρακάτω στη ίδια γραμμή είναι ισομορφικά μεταξύ τους:

- K_1, P_1, S_0, (1×1)-πλέγμα
- K_2, P_2, S_1, $K_{1,1}$, (1×2)-πλέγμα, (2×1)-πλέγμα
- P_3, S_2, $K_{1,2}$, $K_{2,1}$
- K_3, C_3
- C_4, $K_{2,2}$, (2×2)-πλέγμα
- S_n, $K_{1,n}$, $K_{n,1}$ $(n \geq 1)$.
- P_n, $(1 \times n)$-πλέγμα, $(n \times 1)$-πλέγμα $(n \geq 1)$.

Γραφήματα

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

Ένα γράφημα G είναι διμερές αν και μόνο αν κάθε συνεκτική συνιστώσα του G είναι διμερές γράφημα.

Θεώρημα

Αν ένα γράφημα G δεν είναι διμερές, τότε υπάρχει ένας κύκλος με περιττό μήκος στο G.

Απόδειξη

Αν το G δεν είναι διμερές τότε υπάρχει μία συνεκτική συνιστώσα $G' = (V', E')$ του G η οποία δεν είναι διμερές γράφημα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ένας κύκλος περιττού μήκους στην G'.

Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

Θα σχηματίσουμε μία ακολουθία $V_1, V_2, \ldots, V_k$ από σύνολα κορυφών, η οποία θα αποτελεί μία διαμέριση του V'.

Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε κορυφή x του V' και θέτουμε $V_1 = \{x\}$.

Η υπόλοιπη ακολουθία σχηματίζει με τον παρακάτω τρόπο:

- Αν $\bigcup_{j=1}^{i} V_j \neq V'$, τότε το V_{i+1} περιέχει όλους του γείτονες των κορυφών του V_i, που δεν περιέχονται σε κάποιο από τα $V_1, \ldots, V_i$.
- Αν $\bigcup_{j=1}^{i} V_j = V'$, τότε η κατασκευή της ακολουθίας έχει ολοκληρωθεί ($k = i$).

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό, αν $\bigcup_{j=1}^{i} V_j \neq V'$, τότε υπάρχει κάποια κορυφή $v \in V' - (\bigcup_{j=1}^{i} V_j)$ η οποία συνδέεται μέ καποια κορυφή u του $(\bigcup_{j=1}^{i} V_j)$.

Η u θα πρέπει να ανήκει στο V_i, καθώς αν ίσχυε $u \in V_{i'}$ με $i' < i$ θα ίσχυε $v \in V_{i'+1}$, συνεπώς θα ήταν $v \notin V' - (\bigcup_{j=1}^{i} V_j)$ (άτοπο).

Συνεπώς $V_{i+1} \neq \emptyset$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή τα σύνολα της ακολουθίας είναι μη κενά και το V' πεπερασμένο, η κατασκευή της ακολουθίας ολοκληρώνεται πάντα.

Κάθε κορυφή του V' ανήκει σε ένα σύνολο V_{i+1} μόνο αν δεν ανήκει στα $V_1, \ldots, V_i$, συνεπώς τα σύνολα της ακολουθίας είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

Άρα η ακολουθία $V_1, \ldots, V_k$ είναι μία διαμέριση του συνόλου κορυφών V'.

Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε τον διαχωρισμό του V' στα σύνολα U και W, όπου U είναι η ένωση των V_i με περιττό i και W η ένωση των V_i με άρτιο i.

$$U = \bigcup_{j=1}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil} V_{2j-1}$$

$$W = \bigcup_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} V_{2j}$$

Επειδή τα σύνολα U και W είναι ξένα μεταξύ τους και η συνιστώσα (V', E') δεν είναι διμερές γράφημα, θα πρέπει να υπάρχει μία ακμή που συνδέει δύο κορυφές του U ή δύο κορυφές του W.

Απόδειξη (συνέχεια)

Σε οποιαδήποτε από τις δύο περιτώσεις θα πρέπει οι αυτές οι δύο γειτονικές κορυφές να ανήκουν στα σύνολα V_ℓ και $V_{\ell+2d}$ για κάποια $\ell \geq 1$ και $d \geq 0$.

Όμως οι γείτονες των κορυφών του V_ℓ τοποθετούνται στο $V_{\ell+1}$ εκτός αν ανήκουν σε προηγούμενα σύνολα της ακολουθίας. Άρα θα πρέπει $\ell + 2d \leq \ell + 1$ που συνεπάγεται $d = 0$.

Συνεπώς υπάρχει κάποιο σύνολο V_ℓ και δύο κορυφές v_ℓ κσι u_ℓ τέτοιες ώστε $v_\ell, u_\ell \in V_\ell$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Από τον τρόπο κατασκευής της ακολουθίας $V_1, \ldots, V_k$, για κάθε κορυφή v που ανήκει σε κάποιο V_i, με $2 \leq i \leq k$, υπάρχει τουλάχιστον ένας γείτονας της v που ανήκει στο V_{i-1}. Επιλέγουμε (αυθαίρετα) έναν τέτοιο γείτονα και τον συμβολίζουμε μέ $p(v)$.

Σχηματίζουμε τα μονοπάτια $v_\ell, v_{\ell-1}, \ldots v_2, v_1$ και $u_\ell, u_{\ell-1}, \ldots u_2, u_1$, όπου $v_i = p(v_{i+1})$ και $u_i = p(u_{i+1})$, για $1 \leq i \leq \ell - 1$.

Οι κορυφές u_i και v_i, $1 \leq i \leq \ell$ ανήκουν στο σύνολο V_i. Ειδικότερα $v_1 = u_1 = x$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω $r = \max\{i \mid 1 \leq i \leq \ell \mid v_i = u_i\}$. Ο αριθμός r είναι καλά ορισμένος, καθώς το σύνολο δεξιά του ίσον περιέχει τουλάχιστον το στοιχείο 1. Επίσης $r < \ell$ καθώς οι v_ℓ και u_ℓ συνδέονται με ακμή και άρα δεν ταυτίζονται.

Η ακολουθία κορυφών $c = v_r, v_{r+1}, \ldots v_\ell, u_\ell \ldots u_{r+1}, u_r$ είναι κύκλος.

Πράγματι, λόγω του τρόπου επιλογής του r, ισχύει $v_r = u_r$ και για κάθε i, $r < i \leq \ell$, ισχύέι $v_i \neq u_i$. Επίσης οποιοδήποτε για αλλο ζεύγος κορυφών, οι δύο κορυφές του ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα της διαμέρισης και άρα είναι διαφορετικές.

Το μήκος του κύκλου c είναι $2(\ell - r) + 1$, που είναι περιττός αριθμός.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς η συνεκτική συνιστώσα G', άρα και το γράφημα G, περιέχει κύκλο περιττού μήκους. $\square$

Θεώρημα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι διμερές αν και μόνο αν κάθε κλειστή διαδρομή στο G έχει άρτιο μήκος.

Απόδειξη

Έστω ότι το G δεν είναι διμερές. Τότε υπάρχει ένας κύκλος περιττού μήκους στο G, ο οποίος είναι κλειστή διαδρομή. Συνεπώς δεν έχουν όλες οι κλειστές διαδρομές στο G άρτιο μήκος.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι το G είναι διμερές και εστω V_1 και V_2 δύο σύνολα κορυφών τέτοια $V = V_1 \cup V_2$ και κάθε ακμή του G να συνδέει μία κορυφή του V_1 με μία κορυφή του V_2.

Έστω $w = x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ μία οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή στο G.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \in V_1$. Τότε θα ισχύει $x_2 \in V_2$, $x_3 \in V_1$, $x_4 \in V_2$ και γενικότερα $x_i \in V_1$, αν i είναι περιττός αριθμός και $x_i \in V_2$, αν i είναι άρτιος αριθμός.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή η w είναι κλειστή διαδρομή, ισχύει $x_{k+1} = x_1 \in V_1$, που συνεπάγεται ότι $k+1$ είναι περιττός αριθμός.

Άρα το μήκος της διαδρομης w, το οποίο είναι το k, είναι άρτιος αριθμός.

Συνεπώς αν το G είναι διμερές, τότε κάθε κλειστή διαδρμή στο G έχει άρτιο μήκος. $\square$

Θεώρημα

Κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα.

Απόδειξη

Έστω G ένα δέντρο. Ας υποθέσουμε ότι το G δεν είναι διμερές διμερές. Τότε υπάρχει κύκλος περιττού μηκους στο G. Αυτό είναι άτοπο καθώς το G είναι δέντρο και άρα εξ ορισμού δεν περιέχει κύκλο.

Άρα το G είναι διμερές. $\square$

Γραφήματα

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

Κάθε πλέγμα είναι διμερές γράφημα.