Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Ορισμός

Μία πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής ϕ λέμε ότι βρίσκεται σε ποσοδεικτική κανονική μορφή αν $\phi = Q_n x_n \; Q_{n-1} x_{n-1} \; \dots Q_1 x_1 \; \psi$, όπου $n \geq 0$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ και ψ είναι πρόταση χωρίς ποσοδείκτες.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή. Θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένους κανόνες που εκφράζουν λογικές ισοδυναμίες, οι οποίοι περιγράφονται στη συνέχεια.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Οι παρακάτω κονόνες είναι άμεση συνέπεια της σημασίας των λογικών συνδέσμων και του ορισμού της ισοδυναμίας και ισχύουν για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ, ψ, ω, χ:

(1)	$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$
(2)	$\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$
(3)	$\phi \rightarrow \psi \equiv \neg\phi \vee \psi$
(4)	$\phi \leftrightarrow \psi \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)$
(5)	Αν $\phi \equiv \psi$ **τότε** $\neg\phi \equiv \neg\psi$
(6)	Αν $\phi \equiv \omega$ **και** $\psi \equiv \chi$ **τότε** $\phi \wedge \psi \equiv \omega \wedge \chi$
(7)	Αν $\phi \equiv \omega$ **και** $\psi \equiv \chi$ **τότε** $\phi \vee \psi \equiv \omega \vee \chi$
(8)	Αν $\phi \equiv \psi$ **τότε** $\forall x\ \phi \equiv \forall x\ \psi$
(9)	Αν $\phi \equiv \psi$ **τότε** $\exists x\ \phi \equiv \exists x\ \psi$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες ισχύουν για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ, όπως έχουμε δείξει κατά την άτυπη περιγραφή των ποσοδεικτών. Οι αποδείξεις ισοδυναμίας μπορούν γίνουν με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τον τυπικό ορισμό της αλήθειας:

(10)	$\neg \forall x\ \phi \equiv \exists x\ \neg \phi$
(11)	$\neg \exists x\ \phi \equiv \forall x\ \neg \phi$
(12)	$\forall x\ \phi \wedge \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \wedge \psi)$
(13)	$\exists x\ \phi \vee \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \vee \psi)$

Οι παρακάτω κανόνες ισχύουν για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ:

(14)	Αν η $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \land \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \land \psi)$
(15)	Αν η $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \land \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \land \psi)$
(16)	Αν η $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \lor \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \lor \psi)$
(17)	Αν η $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \lor \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \lor \psi)$

Για την απόδειξη της ορθότητας τών κανόνων 14-17 παρατηρούμε αρχικά ότι αν $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \equiv \forall x\ \phi$ και $\phi \equiv \exists x\ \phi$.

Πράγματι, για οποιοδήποτε μοντέλο $\mathcal{M}$ και οποιαδήποτε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές ισχύει $\mathcal{M} \models_s \forall x\ \phi$ ανν για κάθε στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ ισχύει $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$. Επειδή ωστόσο η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ, ισχύει $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_s \phi$. Συνεπώς $\phi \equiv \forall x\ \phi$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\phi \equiv \exists x\ \phi$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Για την απόδειξη της ορθότητας τών κανόνων 14-17 παρατηρούμε αρχικά ότι αν $x \notin free(\phi)$ τότε $\phi \equiv \forall x \; \phi$ και $\phi \equiv \exists x \; \phi$.

Πράγματι, για οποιοδήποτε μοντέλο $\mathcal{M}$ και οποιαδήποτε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές ισχύει $\mathcal{M} \models_s \forall x \; \phi$ ανν για κάθε στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ ισχύει $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$. Επειδή ωστόσο η μεταβλητή x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ, ισχύει $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_s \phi$. Συνεπώς $\phi \equiv \forall x \; \phi$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\phi \equiv \exists x \; \phi$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, αν $x \notin free(\phi)$, τότε λόγω του κανόνα (6) ισχύει

$$\phi \wedge \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \wedge \psi) \text{ ανν } \forall x\ \phi \wedge \forall x\ \psi \equiv \forall x\ (\phi \wedge \psi).$$

Η δεξιά λογική ισοδυναμία ισχύει από τον κανόνα (12). Συνεπώς και ο κανόνας (14) είναι ορθός.

Αντίστοιχα, λόγω του κανόνα (7) ισχύει

$$\phi \vee \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \vee \psi) \text{ ανν } \exists x\ \phi \vee \exists x\ \psi \equiv \exists x\ (\phi \vee \psi).$$

Η τελευταία λογική ισοδυναμία ισχύει από τον κανόνα (13). Συνεπώς και ο κανόνας (17) είναι ορθός.

Θα αποδείξουμε τώρα την ορθότητα του κανόνα (15). Υποθέτουμε ότι $x \notin free(\phi)$. Έστω ένα οποιοδήποτε μοντέλο μοντέλο $\mathcal{M}$ και οποιαδήποτε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές.

Αν $\mathcal{M} \models_s (\phi \wedge \exists x\ \psi)$ τοτε $\mathcal{M} \models_s \phi$ και $\mathcal{M} \models_s \exists x\ \psi$.

Το $\mathcal{M} \models_s \exists x\ \psi$ συνεπάγεται ότι υπάρχει στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \psi$.

Επειδή $x \notin free(\phi)$, το $\mathcal{M} \models_s \phi$ συνεπάγεται ότι $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$.

Άρα υπάρχει d τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$ και $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \psi$, δηλαδή υπάρχει d τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi \wedge \psi$.

Συνεπώς $\mathcal{M} \models_s \exists x\ (\phi \wedge \psi)$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Αντίστροφα, αν $\mathcal{M} \models_s \exists x\ (\phi \wedge \psi)$, τότε υπάρχει d τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \phi \wedge \psi$, δηλαδή υπάρχει d τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \phi$ και $\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \psi$.

Επειδή $x \notin free(\phi)$, το $\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \phi$ συνεπάγεται ότι $\mathcal{M} \models_s \phi$.

Επειδή υπάρχει d τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \psi$, ισχύει $\mathcal{M} \models_s \exists x\ \psi$.

Από τα δύο τελευταία προκύπτει ότι $\mathcal{M} \models_s (\phi \wedge \exists x\ \psi)$.

Άρα αν $x \notin free(\phi)$ οι προτάσεις $(\phi \wedge \exists x\ \psi)$ και $\exists x\ (\phi \wedge \psi)$ είναι λογικά ισοδύναμες και συνεπώς ο κονόνας (15) είναι ορθός.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Η ορθότητα του κανόνα 16 μπορεί να αποδειχτεί με ανάλογο τρόπο.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Οι παρακάτω κανόνες ισχύουν για οποιεσδήποτε πρόταση ϕ και χρησιμεύουν ώστε να αλλάζουμε τη μεταβλητή που συνοδεύει έναν ποσοδείκτη, όταν δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση των κανόνων 14-17.

Παρότι διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε την ορθότητα αυτών των κανόνων, η πλήρης απόδειξη της ορθότητάς τους απαιτεί επαγωγή στη δομή της ϕ και είναι αρκετά τεχνική. Για αυτό το λόγο παραλείπεται.

18.	Αν η y δεν εμφανίζεται στη ϕ τότε $\forall x\ \phi \equiv \forall y\ \phi_{[x\|y]}$
19.	Αν η y δεν εμφανίζεται στη ϕ τότε $\exists x\ \phi \equiv \exists y\ \phi_{[x\|y]}$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Τέλος παρακάτω κανόνες προκύπτουν συνδυάζοντας τους κανόνες 14-17 με του 18-19 και ισχύουν επίσης για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ:

20.	Αν η y δεν εμφανίζεται στις ϕ, ψ τότε $\phi \wedge \forall x\ \psi \equiv \forall y\ (\phi \wedge \psi_{[x\|y]})$
21.	Αν η y δεν εμφανίζεται στις ϕ, ψ τότε $\phi \wedge \exists x\ \psi \equiv \exists y\ (\phi \wedge \psi_{[x\|y]})$
22.	Αν η y δεν εμφανίζεται στις ϕ, ψ τότε $\phi \vee \forall x\ \psi \equiv \forall y\ (\phi \vee \psi_{[x\|y]})$
23.	Αν η y δεν εμφανίζεται στις ϕ, ψ τότε $\phi \vee \exists x\ \psi \equiv \exists y\ (\phi \vee \psi_{[x\|y]})$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Συμβολίζουμε με **prenex**(ϕ) το σύνολο όλων των προτάσεων σε ποσοδεικτική κανονική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμες με την ϕ.

Λόγω της μεταβατικότητας της λογικής ισοδυναμίας, προκύπτει εύκολα ότι αν $\phi \equiv \psi$ τότε **prenex**(ϕ) $=$ **prenex**(ψ).

Αποδεικνύουμε πρώτα ορισμένα λήμματα.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Λήμμα

Κάθε πρόταση της μορφής $\phi = \neg\omega$, όπου ω είναι πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή, είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη

Έχουμε $\phi = \neg Q_n x_n \; Q_{n-1} x_{n-1} \; \ldots Q_1 x_1 \; \psi$, όπου $n \geq 0$, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ και ψ είναι πρόταση χωρίς ποσοδείκτες.

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες (10) και (11) μπορούμε να φέρουμε την άρνηση στην πρόταση ψ, αντιστρέφοντας τους ποσοδείκτες. Η πρόταση που προκύπτει είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή και είναι λογικά ισοδύναμη με τη ϕ, λαμβάνοντας υπόψη και τους κανόνες (8) και (9).

Πιο αυστηρά η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή στο πλήθος ποσοδεικτών n.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα

Θα μετατρέψουμε την πρόταση

$$\phi = \neg \forall x \ \exists y \ \exists z \ \forall w \ \exists t \ (p(x,y) \wedge q(w) \rightarrow p(z,t))$$

σε μία λογικά ισοδύναμη πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Παράδειγμα

Οι γραμμές υποδεικνύουν τις υποπροτάσεις στις οποίες εφαρμόζεται ο κανόνας (10) ή (11).

Η υποπρόταση που βρίσκεται κάτω από μία γραμμή προκύπτει από την υποπρόταση που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.

Οι κανόνες (8) και (9) χρησιμοποιούνται ώστε η ισοδυναμία των υποπροτάσεων να επεκταθεί σε ολόκληρες τις προτάσεις.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{array}{rll}
\phi = & \underline{\neg\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall w\ \exists t\ (p(x,y) \land q(w) \to p(z,t))} & \\
\equiv & \exists x\ \underline{\neg\exists y\ \exists z\ \forall w\ \exists t\ (p(x,y) \land q(w) \to p(z,t))} & \text{από } (10) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ \underline{\neg\exists z\ \forall w\ \exists t\ (p(x,y) \land q(w) \to p(z,t))} & \text{από } (11),(9) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ \forall z\ \underline{\neg\forall w\ \exists t\ (p(x,y) \land q(w) \to p(z,t))} & \text{από } (11),(8),(9) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists w\ \underline{\neg\exists t\ (p(x,y) \land q(w) \to p(z,t))} & \text{από } (10),(8),(9) \\
\equiv & \exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists w\ \forall t\ \neg(p(x,y) \land q(w) \to p(z,t)) & \text{από } (11),(8),(9) \\
\in & \mathbf{prenex}(\phi) &
\end{array}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Λήμμα

Κάθε πρόταση της μορφής $\phi = \omega \wedge \omega'$, όπου ω και ω' είναι προτάσεις σε ποσοδεικτική κανονική μορφή, είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη

Έχουμε $\phi = Q_k x_k \; Q_{k-1} x_{k-1} \; \dots Q_1 x_1 \; \psi \wedge Q'_m y_m \; Q'_{m-1} y_{m-1} \; \dots Q'_1 y_1 \; \psi'$, όπου $k, m \geq 0$, $Q_i, Q'_j \in \{\forall, \exists\}$ και ψ, ψ' είναι προτάσεις χωρίς ποσοδείκτες.

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες (20) και (21) μπορούμε να φέρουμε τους ποσοδείκτες Q'_j έξω από τη σύζευξη. (Εναλλακτικά μπορούμε για απλούστευση να εφαρμόσουμε κάποιον από τους κανόνες 12, 14 ή 15, εφόσον μπορεί να εφαρμοστεί.)

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα (1) και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία ώστε να φέρουμε και τους ποσοδείκτες Q_i έξω από τη σύζευξη.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη (συνέχεια)

Η πρόταση που προκύπτει είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή και είναι λογικά ισοδύναμη με τη ϕ, λαμβάνοντας υπόψη και τους κανόνες (8) και (9).

Πιο αυστηρά η απόδειξη μπορεί να γίνει με επαγωγή στο συνολικό πλήθος ποσοδεικτών $n = m + k$ των δύο προτάσεων.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα

Θα μετατρέψουμε την πρόταση

$$\phi = \forall x\ \exists y\ \forall z\ p(x, y, z) \wedge \forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, y, z)$$

σε μία λογικά ισοδύναμη πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα

Οι γραμμές υποδεικνύουν τις υποπροτάσεις στις οποίες εφαρμόζεται κάποιος από τους κανόνες (1), (12), (14), (15), (20) ή (21).

Η υποπρόταση που βρίσκεται κάτω από μία γραμμή προκύπτει από την υποπρόταση που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.

Οι κανόνες (8) και (9) χρησιμοποιούνται ώστε η ισοδυναμία των υποπροτάσεων να επεκταθεί σε ολόκληρες τις προτάσεις.

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{array}{rll}
\phi = & \underline{\forall x\ \exists y\ \forall z\ p(x,y,z) \land \forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x,y,z)} & \\
\equiv & \forall x\ \underline{(\exists y\ \forall z\ p(x,y,z) \land \forall y\ \exists z\ r(x,y,z))} & \text{από } (12) \\
\equiv & \forall x\ \forall y\ \underline{(\exists y\ \forall z\ p(x,y,z) \land \exists z\ r(x,y,z))} & \text{από } (14),(8) \\
\equiv & \forall x\ \forall y\ \exists z\ \underline{(\exists y\ \forall z\ p(x,y,z) \land r(x,y,z))} & \text{από } (15),(8) \\
\equiv & \forall x\ \forall y\ \exists z\ \underline{(r(x,y,z) \land \exists y\ \forall z\ p(x,y,z))} & \text{από } (1),(8),(9) \\
\equiv & \forall x\ \forall y\ \exists z\ \exists w\ \underline{(r(x,y,z) \land \forall z\ p(x,w,z))} & \text{από } (21),(8),(9) \\
\equiv & \forall x\ \forall y\ \exists z\ \exists w\ \forall t\ (r(x,y,z) \land p(x,w,t)) & \text{από } (20),(8),(9) \\
\in & \textbf{prenex}(\phi) &
\end{array}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Λήμμα

Κάθε πρόταση της μορφής $\phi = \omega \vee \omega'$, όπου ω και ω' είναι προτάσεις σε ποσοδεικτική κανονική μορφή, είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Απόδειξη

Αποδεικνύεται όπως το πρηγούμενο, εφαρμόζοντας επαναληπτικά τους κανόνες 22 και 23 (ή εναλλακτικά μπορούμε για κάποιον από τους κανόνες 13, 16 ή 17, εφόσον μπορεί να εφαρμοστεί).

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα

Θα μετατρέψουμε την πρόταση

$$\phi = \exists z\ \forall w\ \exists y\ q(x, y, z, w) \vee \forall x\ \exists y\ \exists z\ s(x, y, z)$$

σε μία λογικά ισοδύναμη πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Παράδειγμα

Οι γραμμές υποδεικνύουν τις υποπροτάσεις στις οποίες εφαρμόζεται κάποιος από τους κανόνες (2), (13), (16), (17), (22) ή (23).

Η υποπρόταση που βρίσκεται κάτω από μία γραμμή προκύπτει από την υποπρόταση που βρίσκεται πάνω από τη γραμμή.

Οι κανόνες (8) και (9) χρησιμοποιούνται ώστε η ισοδυναμία των υποπροτάσεων να επεκταθεί σε ολόκληρες τις προτάσεις.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{array}{lll}
\phi = & \underline{\exists z\ \forall w\ \exists y\ q(x,y,z,w) \lor \forall x\ \exists y\ \exists z\ s(x,y,z)} & \\
\equiv & \forall t\ \underline{(\exists z\ \forall w\ \exists y\ q(x,y,z,w) \lor \exists y\ \exists z\ s(t,y,z))} & \text{από } (22) \\
\equiv & \forall t\ \exists y\ \underline{(\exists z\ \forall w\ \exists y\ q(x,y,z,w) \lor \exists z\ s(t,y,z))} & \text{από } (17),(8) \\
\equiv & \forall t\ \exists y\ \exists z\ \underline{(\forall w\ \exists y\ q(x,y,z,w) \lor s(t,y,z))} & \text{από } (13),(8),(9) \\
\equiv & \forall t\ \exists y\ \exists z\ \underline{(s(t,y,z) \lor \forall w\ \exists y\ q(x,y,z,w))} & \text{από } (2),(8),(9) \\
\equiv & \forall t\ \exists y\ \exists z\ \forall w\ \underline{(s(t,y,z) \lor \exists y\ q(x,y,z,w))} & \text{από } (16),(8),(9) \\
\equiv & \forall t\ \exists y\ \exists z\ \forall w\ \exists u\ (s(t,y,z) \lor q(x,u,z,w)) & \text{από } (23),(8),(9) \\
\in & \textbf{prenex}(\phi) &
\end{array}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Θεώρημα

Κάθε πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής είναι λογικά ισοδύναμη με μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πρόταση ϕ, **prenex**$(\phi) \neq \emptyset$, ή ισοδύναμα ότι υπάρχει ϕ' τέτοια ώστε $\phi' \in$ **prenex**(ϕ). Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στη δομή της ϕ.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη (συνέχεια)

- Έστω $\phi = p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, η ίδια η ϕ βρίσκετε σε ποσοδεικτική κανονική μορφή. Συνεπώς $\phi \in \textbf{prenex}(\phi)$.
- Έστω $\phi = \neg\psi$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει πρόταση $\psi' \in \textbf{prenex}(\psi)$.
  Συνπεπώς $\psi \equiv \psi'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \neg\psi'$, λόγω του κανόνα (5).
  Από το πρώτο λήμμα, προκύπτει ότι $\textbf{prenex}(\neg\psi') \neq \emptyset$, που είναι ισοδύναμο με $\textbf{prenex}(\phi) \neq \emptyset$.

Απόδειξη (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \psi \wedge \omega$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν προτάσεις $\psi' \in$ **prenex**(ψ) και $\omega' \in$ **prenex**(ω).
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \psi' \wedge \omega'$ λόγω του κανόνα (6).
  Από το δεύτερο λήμμα, προκύπτει ότι **prenex**$(\psi' \wedge \omega') \neq \emptyset$, που είναι ισοδύναμο με **prenex**$(\phi) \neq \emptyset$.
- Έστω $\phi = \psi \vee \omega$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν προτάσεις $\psi' \in$ **prenex**(ψ) και $\omega' \in$ **prenex**(ω).
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \psi' \vee \omega'$ λόγω του κανόνα (7).
  Από το τρίτο λήμμα, προκύπτει ότι **prenex**$(\psi' \vee \omega') \neq \emptyset$, που είναι ισοδύναμο με **prenex**$(\phi) \neq \emptyset$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \psi \to \omega$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν προτάσεις $\psi' \in$ **prenex**(ψ) και $\omega' \in$ **prenex**(ω).
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \neg\psi' \vee \omega'$ λόγω των κανόνων (5) και (7).
  Από το πρώτο λήμμα, προκύπτει ότι υπάρχει $\psi'' \in$ **prenex**$(\neg\psi')$, και άρα $\phi \equiv \psi'' \vee \omega'$ λόγω του κανόνα (7).
  Από το τρίτο λήμμα, προκύπτει ότι **prenex**$(\psi'' \vee \omega') \neq \emptyset$, που είναι ισοδύναμο με **prenex**$(\phi) \neq \emptyset$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν προτάσεις $\psi' \in$ **prenex**(ψ) και $\omega' \in$ **prenex**(ω).
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv (\psi' \wedge \omega') \vee (\neg\psi' \wedge \neg\omega')$ λόγω των κανόνων (5)-(7).
  Από το πρώτο λήμμα, προκύπτει ότι υπάρχουν $\psi'' \in$ **prenex**$(\neg\psi')$ και $\omega'' \in$ **prenex**$(\neg\omega')$, και άρα $\phi \equiv (\psi' \wedge \omega') \vee (\psi'' \wedge \omega'')$ λόγω των κανόνων (6) και (7).
  Από το δεύτερο λήμμα, προκύπτει ότι υπάρχουν $\chi' \in$ **prenex**$(\psi' \wedge \omega')$ και $\chi'' \in$ **prenex**$(\psi'' \wedge \omega'')$, και άρα $\phi \equiv \chi' \vee \chi''$.
  Από το τρίτο λήμμα, προκύπτει ότι **prenex**$(\chi' \vee \chi'') \neq \emptyset$, που είναι ισοδύναμο με **prenex**$(\phi) \neq \emptyset$.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Απόδειξη (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \forall x\ \psi$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει πρόταση $\psi' \in \textbf{prenex}(\psi)$.
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \forall x\ \psi'$, λόγω του κανόνα (8).
  Επιπλέον η πρόταση $\forall x\ \psi'$ είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή και συνεπώς $\textbf{prenex}(\phi) \neq \emptyset$.
- Έστω $\phi = \exists x\ \psi$. Από επαγωγική υπόθεση, υπάρχει πρόταση $\psi' \in \textbf{prenex}(\psi)$.
  Συνεπώς $\psi \equiv \psi'$, που συνεπάγεται $\phi \equiv \exists x\ \psi'$, λόγω του κανόνα (9).
  Επιπλέον η πρόταση $\exists x\ \psi'$ είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή και συνεπώς $\textbf{prenex}(\phi) \neq \emptyset$.

Η απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος είναι κατασκευαστική, καθώς μας υποδεικνύει μία διαδικασία με την οποία μπορούμε να βρούμε μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή η οποία να είναι λογικά ισοδύναμη με μία δεδομένη πρόταση ϕ.

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα

Έστω η πρόταση

$$\phi = (r(a) \rightarrow \forall x\ \exists y\ p(x,y)) \leftrightarrow \exists x\ q(a,x)$$

Θα βρούμε μία πρόταση που να ανήσει στο **prenex**(ϕ).

Η ϕ προκύπτει εφαρμόζοντας τον λογικό σύνδεσμο $\leftrightarrow$ στις προτάσεις $\psi = r(a) \rightarrow \forall x\ \exists y\ p(x,y)$ και $\omega = \exists x\ q(a,x)$.

Παρατηρουμε ότι η ω είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή. Θα βρούμε μία πρόταση που να ανήσει στο **prenex**(ψ).

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η ψ προκύπτει εφαρμόζοντας τον λογικό σύνδεσμο $\rightarrow$ στις προτάσεις $r(a)$ και $\forall x\ \exists y\ p(x, y)$ οι οποίες είναι σε ποσοδεικτική κανονική μορφή.

Επειδή $\psi \equiv \neg r(a) \vee \forall x\ \exists y\ p(x, y)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία πρόταση που ανήκει στο **prenex**(ψ), εφαρμόζοντας τα βήματα στην απόδειξη του τρίτου λήμματος:

$$
\begin{aligned}
\psi \equiv &\quad \neg r(a) \vee \forall x\ \exists y\ p(x, y) \\
\equiv &\quad \forall x\ (\neg r(a) \vee \exists y\ p(x, y)) \\
\equiv &\quad \forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x, y)) \\
\in &\quad \textbf{prenex}(\psi)
\end{aligned}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η πρόταση ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$(\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \exists x\ q(a,x)) \vee (\neg\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \neg\exists x\ q(a,x))$$

Εφαρμόζοντας το πρώτο λήμμα μπορούμε να βρούμε προτάσεις σε ποσοδεικτική κανονική μορφή που να είναι ισοδύναμες με τις $\neg\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y))$ και $\neg\exists x\ q(a,x)$

$$\begin{aligned} \neg\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) &\equiv \exists x\ \neg\exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \\ &\equiv \exists x\ \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y)) \end{aligned}$$

$$\neg\exists x\ q(a,x) \equiv \forall x\ \neg q(a,x)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς η πρόταση ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$(\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \exists x\ q(a,x)) \vee (\exists x\ \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \forall x\ \neg q(a,x))$$

Εφαρμόζοντας το δεύτερο λήμμα μπορούμε να βρούμε προτάσεις σε ποσοδεικτική κανονική μορφή που να είναι ισοδύναμες με τις

$$\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \exists x\ q(a,x)$$

και

$$\exists x\ \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \forall x\ \neg q(a,x).$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
& \forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \exists x\ q(a,x) \\
\equiv\quad & \exists x\ (\forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge q(a,x)) \\
\equiv\quad & \exists x\ (q(a,x) \wedge \forall x\ \exists y\ (\neg r(a) \vee p(x,y))) \\
\equiv\quad & \exists x\ \forall z\ (q(a,x) \wedge \exists y\ (\neg r(a) \vee p(z,y))) \\
\equiv\quad & \exists x\ \forall z\ \exists y\ (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \exists x\ \forall\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \forall x\ \neg q(a,x) \\
\equiv\quad & \forall x\ (\exists x\ \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y)) \wedge \neg q(a,x)) \\
\equiv\quad & \forall x\ (\neg q(a,x) \wedge \exists x\ \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(x,y))) \\
\equiv\quad & \forall x\ \exists z\ (\neg q(a,x) \wedge \forall y\ \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \\
\equiv\quad & \forall x\ \exists z\ \forall y\ (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y)))
\end{aligned}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Παράδειγμα (συνέχεια)

Άρα η πρόταση ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με την πρόταση

$$\exists x\ \forall z\ \exists y\ (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \forall x\ \exists z\ \forall y\ (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y)))$$

Εφαρμόζοντας το τρίτο λήμμα μπορούμε να βρούμε μία πρόταση **prenex**(ϕ).

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$
\begin{aligned}
\phi \equiv\ & \exists x \forall z \exists y (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \forall x \exists z \forall y (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \\
\equiv\ & \forall x (\exists x \forall z \exists y (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \exists z \forall y (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z (\exists x \forall z \exists y (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \forall y (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z \forall y (\exists x \forall z \exists y (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee (\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z \forall y ((\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \exists x \forall z \exists y (q(a,x) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z \forall y \exists w ((\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \forall z \exists y (q(a,w) \wedge (\neg r(a) \vee p(z,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z \forall y \exists w \forall t ((\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee \exists y (q(a,w) \wedge (\neg r(a) \vee p(t,y)))) \\
\equiv\ & \forall x \exists z \forall y \exists w \forall t \exists u ((\neg q(a,x) \wedge \neg(\neg r(a) \vee p(z,y))) \vee (q(a,w) \wedge (\neg r(a) \vee p(t,u)))) \\
\in\ & \textbf{prenex}(\phi)
\end{aligned}
$$

Ποσοδεικτική Κανονική Μορφή

Φυσικά μπορούμε να βρούμε μία πρόταση σε ποσοδεικτική κανονική μορφή που να είναι λογικά ισοδύναμη με τη ϕ εφαρμόζοντας απ' ευθείας τους κανόνες (1)-(23).