Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Επαγωγικοί ορισμοί

Μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο αντικειμένων με τον παρακάτω τρόπο:

(α) Καθορίζουμε κάποια βασικά αντικείμενα τα οποία ανήκουν στο σύνολο.

(β) Καθορίζουμε κάποιους κανόνες κατασκευής, με τους οποίους μπορούμε να συνθέσουμε νέα αντικέμενα από αντικείμενα που έχουμε ήδη συμπεριλάβει στο σύνολο.

(γ) Για να είναι ο ορισμός πλήρης, αναφέρουμε ότι κανένα άλλο αντικείμενο εκτός από αυτά που προκύπτουν με βάση τα (α) και (β) δεν ανήκει στο σύνολο.

Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται επαγωγικός.

Επαγωγικοί ορισμοί

Παράδειγμα

Μπορούμε να δώσουμε έναν επαγωγικό ορισμό για το σύνολο των φυσικών αριθμών:

(α) Το 0 είναι φυσικός αριθμός.

(β) Αν n είναι φυσικός αριθμός, τότε και ο επόμενός του (ο $n + 1$) είναι φυσικός αριθμός.

(γ) Τιποτα άλλο εκτός από αυτά που προκύπτουν από τα (α) και (β) δεν είναι φυσικός αριθμός.

Επαγωγικοί ορισμοί

Παράδειγμα

Ορίζουμε επαγωγικά τις δυαδικές συμβολοσειρές:

(α) Η κενή συμβολοσειρά ϵ είναι δυαδική συμβολοσειρά:

(β) Αν w είναι δυαδική συμβολοσειρά, τότε και οι $w0$ και $w1$ είναι δυαδικές συμβολοσειρές.

(γ) Τιποτα άλλο εκτός από αυτά που προκύπτουν από τα (α) και (β) δεν είναι δυαδική συμβολοσειρά.

Παράδειγμα

Έστω P ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών. Ορίζουμε επαγωγικά το σύνολο προτάσεων Φ_P:

(α) Κάθε προτασιακή μεταβλητή είναι πρόταση.

(β1) Αν η ϕ είναι πρόταση τότε και η $(\neg\phi)$ είναι πρόταση.

(β2) Αν η ϕ και ψ είναι προτάσεις τότε και οι $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ και $(\phi \leftrightarrow \psi)$, είναι προτάσεις.

(γ) Τιποτα άλλο εκτός από αυτά που προκύπτουν από τα (α), (β1) και (β2) δεν είναι πρόταση.

Αναδρομικοί ορισμοί συναρτήσεων

Αν έχουμε ορίσει ένα σύνολο αντικειμένων με επαγωγή έτσι ώστε το κάθε στοιχείο του να κατασκευάζεται με μονοσήμαντο τρόπο, τότε μπορούμε να ορίσουμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού αυτό το σύνολο χρησιμοποιώντας αναδρομή:

(α) Ορίζουμε τις τιμές της συνάρτησης για τα βασικά αντικείμενα.

(β) Για κάθε κανόνα κατασκευής, ορίζουμε την τιμή της συνάρτησης για το σύνθετο αντικείμενο που κατασκευάζεται, με βάση τις τιμές της συνάρτησης για τα απλούστερα αντικείμενα στα οποία εφαρμόζεται ο κανόνας κατασκευής.

Ένας τέτοιος ορισμός λέγεται αναδρομικός.

Αναδρομικοί ορισμοί συναρτήσεων

Παράδειγμα

Η συνάρτηση παραγοντικό έχει πεδίο ορισμού τους ακέραιους αριθμούς και ορίζεται αναδομικά:

- $0! = 1$
- $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Αναδρομικοί ορισμοί συναρτήσεων

Παράδειγμα

Μπορούμε να ορίσουμε με αναδρομή τη συνάρτηση $(u)_2$ η οποία έχει ως πεδίο ορισμού τις δυαδικές συμβολοσειρές και επιστρέφει τον αριθμό που αναπαριστά η συμβολοσειρά u στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης:

- $(\epsilon)_2 = 0$
- $(w0)_2 = 2 * (w)_2$
- $(w1)_2 = 2 * (w)_2 + 1$

Με βάση τιν παραπάνω ορισμό:
$(101)_2 = 2 \cdot (10)_2 + 1 = 2 \cdot (2 \cdot (1)_2) + 1 = 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (\epsilon)_2 + 1)) + 1$
$= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 0 + 1)) + 1 = \cdots = 5.$

Αναδρομικοί ορισμοί συναρτήσεων

Παράδειγμα

Έστω P ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών και έστω v μία ανάθεση αληθοτιμών (δηλαδή συνάρτηση από το P στο σύνολο αληθοτιμών $\{\mathrm{A}, \Psi\}$). Μπορούμε να ορίσουμε την επέκταση $\overline{v}$ της v στο σύνολο Φ_P χρησιμοποιώντας αναδρομή:

- Αν $\phi \in P$ τότε $\overline{v}(\phi) = v(\phi)$
- Αν $\phi = \neg\psi$ τότε $\overline{v}(\phi) = \begin{cases} \mathrm{A} & \text{αν } \overline{v}(\psi) = \Psi \\ \Psi & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Αν $\phi = \psi \wedge \omega$ τότε $\overline{v}(\phi) = \begin{cases} \mathrm{A} & \text{αν } \overline{v}(\psi) = \mathrm{A} \text{ και } \overline{v}(\omega) = \mathrm{A} \\ \Psi & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Αν $\phi = \psi \vee \omega$ τότε $\overline{v}(\phi) = \begin{cases} \mathrm{A} & \text{αν } \overline{v}(\psi) = \mathrm{A} \text{ ή } \overline{v}(\omega) = \mathrm{A} \\ \Psi & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Αναδρομικοί ορισμοί συναρτήσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αν $\phi = \psi \to \omega$ τότε $\overline{v}(\phi) = \begin{cases} \Psi & \text{αν } \overline{v}(\psi) = \mathrm{A} \text{ και } \overline{v}(\omega) = \Psi \\ \mathrm{A} & \text{αλλιώς} \end{cases}$
- Αν $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$ τότε $\overline{v}(\phi) = \begin{cases} \mathrm{A} & \text{αν } \overline{v}(\psi) = \overline{v}(\omega) \\ \Psi & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Αν έχουμε ορίσει ένα σύνολο αντικειμένων με επαγωγή, τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει για όλα τα στοιχεία του συνόλου με τον παρακάτω τρόπο:

(α) Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για τα βασικά αντικείμενα.

(β) Για κάθε κανόνα κατασκευής, υποθέτουμε ότι η πρόταση αληθεύει για όλα τα αντικείμενα που συνδυάζονται για να κατασκευαστεί ένα σύνθετο αντικείμενο και με βάση αυτή την υπόθεση αποδεικνύουμε ότι η πρόταση αληθεύει και για το σύνθετο αντικείμενο που κατασκευάζεται.

Μία τέτοια απόδειξη λέμε ότι εφαρμόζει δομική επαγωγή. Σημειώνεται ότι η απόδειξη με δομική επαγωγή μπορεί να εφαρμοστεί ακόμη και σε σύνολα στα οποία κάποια στοιχεία μπορούν κατασκευαστούν με περισσότερους από έναν τρόπους.

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Η δομική επαγωγή αποτελεί γενίκευση της συνήθους επαγωγής που χρησιμοποιούμε για τους ακέραιους αριθμούς.

Παρατηρήστε με βάση τον επαγωγικό ορισμό που έχουμε δώσει για το σύνολο των ακεραίων, ότι η δομική επαγωγή στο σύνολο των ακεραίων ταυτίζεται με τη συνήθη επαγωγή.

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Ορισμός

Έστω ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών P. Δύο προτάσεις ϕ και ψ από το σύνολο Φ_P ονομάζονται ισοδύναμες (συμβολισμός $\phi \equiv \psi$), αν για κάθε ανάθεση αληθοτιμών v στις προτασικές μεταβλητές του P ισχύει $\overline{v}(\phi) = \overline{v}(\psi)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το $\phi \equiv \psi$ δεν αποτελεί πρόταση που ανήκει στο σύνολο Φ_P αλλά μία πρόταση που διατυπώνουμε εμείς μελετώντας τις ιδιότητες των προτάσεων του Φ_P και δηλώνει το ότι η αληθοτιμές των ϕ και ψ ταυτίζονται πάντα. Αντίθετα η πρόταση $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι μία σύνθετη πρόταση που ανήκει στο σύνολο Φ_P και ενδέχεται να είναι αληθής ή ψευδής ανάλογα με την ανάθεση αληθοτιμών στις προτασιακές μεταβλητές. Η σχέση των δύο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: η $\phi \equiv \psi$ δηλώνει ότι η πρόταση $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία (δηλαδή είναι αληθής για κάθε ανάθεση αληθοτιμών).

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Παράδειγμα

Έστω ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών P. Θα αποδείξουμε με δομική επαγωγή ότι κάθε πρόταση $\phi \in \Phi_P$ είναι ισοδύναμη με μία πρόταση $\psi \in \Phi_P$ η οποία δεν περιέχει τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$.

Βάση της επαγωγής: Αν $\phi \in P$ τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής καθώς η ϕ δεν περιέχει κανένα λογικό σύνδεσμο.

Επαγωγικό βήμα: διακρίνουμε περιπτώσεις, ανάλογα με το τρόπο κατασκευής της ϕ.

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \neg\psi$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει $\psi \equiv \psi'$, όπου η ψ' δεν περιέχει τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$. Συνεπώς $\phi \equiv \neg\psi'$.
- Έστω $\phi = \psi \vee \omega$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, όπου οι ψ' και ω' δεν περιέχουν τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$. Συνεπώς $\phi \equiv \psi' \vee \omega' \equiv \neg\psi' \rightarrow \omega'$.
- Έστω $\phi = \psi \wedge \omega$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, όπου οι ψ' και ω' δεν περιέχουν τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$. Συνεπώς $\phi \equiv \psi' \wedge \omega' \equiv \neg(\psi' \rightarrow \neg\omega')$.

Αποδείξεις με Δομική Επαγωγή

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Έστω $\phi = \psi \to \omega$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, όπου οι ψ' και ω' δεν περιέχουν τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$. Συνεπώς $\phi \equiv \psi' \to \omega'$.
- Έστω $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει $\psi \equiv \psi'$ και $\omega \equiv \omega'$, όπου οι ψ' και ω' δεν περιέχουν τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$. Συνεπώς $\phi \equiv \psi' \leftrightarrow \omega' \equiv (\psi' \to \omega') \wedge (\omega' \to \psi') \equiv \neg((\psi' \to \omega') \to \neg(\omega' \to \psi'))$.

Άρα σε κάθε περίπτωση η ϕ είναι ισοδύναμη με μία πρόταση η οποία δεν περιέχει τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$ και $\leftrightarrow$.

Επαγωγικοί ορισμοί

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι τα σύνολα που ορίζονται με επαγωγή, μπορούν να οριστούν και με διαφορετικό τρόπο που ωστόσο είναι πιο σύνθετος και περιέχει λεπτομέρεις οι οποίες μπορούν να παραληφθούν.

Έστω B το σύνολο των βασικών αντικειμένων του επαγωγικού ορισμού. Οι κανόνες κατασκευής του επαγωγικού ορισμού περιγράφουν πώς μπορούμε συνθέσουμε νέα αντικείμενα, συνδυάζοντας τα ήδη υπάρχοντα. Έστω ότι η συνάρτηση $C(X)$ με δίνει το σύνολο των αντικείμενων που μπορούν να κατασκευαστούν από αντικείμενα που περιέχονται στο σύνολο X με βάση τους κανόνες κατασκευής.

Επαγωγικοί ορισμοί

Σχηματίζουμε την άπειρη ακολουθία συνόλων $S_0, S_1, \ldots S_n, \ldots$ όπου

$$S_0 = B$$

$$S_1 = B \cup C(B) = S_0 \cup C(S_0)$$

$$S_2 = B \cup C(B) \cup C(B \cup C(B)) = S_1 \cup C(S_1)$$

$$\ldots$$

$$S_{n+1} = S_n \cup C(S_n)$$

$$\ldots$$

Το σύνολο που περιγράφεται από το επαγωγικό ορισμό είναι το σύνολο $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Ο επαγωγικός ορισμός μας επιτρέπει να ορίσουμε το σύνολο αυτό, χωρίς να χρειάζεται να αναφερθούμε στην ακολουθία συνόλων $S_0, S_1, \ldots S_n, \ldots$ ούτε στην άπειρη ένωσή τους.

Η παραπάνω κατασκευή μας υποδεικνύει έναν τρόπο με τον οποίο μπορουμε να μετατρέψουμε μία απόδειξη με δομική επαγωγή σε απόδειξη με συνήθη επαγωγή.

Συγκεκριμένα για να αποδείξουμε ότι μία πρόταση αληθεύει για όλα τα στοιχεία του S, αποδεικνύουμε με επαγωγή στο n ότι η πρόταση αληθεύει για όλα τα στοιχεία του S_n.

Επαγωγικοί ορισμοί

Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε ένα μέγεθος για κάθε στοιχείο του συνόλου που ορίζεται επαγωγικά, έτσι ώστε κάθε αντικείμενο που κατασκευάζεται να έχει μεγαλύτερο μέγεθος από τα στοιχεία που συνδυάστηκαν για την κατασκευή του.

Για παράδειγμα το μέγεθος μίας συμβολοσειράς μπορεί να είναι το μήκος της και το μέγεθος μίας πρότασης το πλήθος των λογικών συνδέσμων που χρησιμοποιεί.

Το μέγεθος ενός αντικειμένου στη γενική περίπτωση μπορεί να οριστεί αναδρομικά.

Έχοντας ορίσει το μέγεθος κάθε αντικειμένου του συνόλου, μπορούμε να μετατρέψουμε την απόδειξη με δομική επαγωγή σε απόδειξη με ισχυρή επαγωγή στο μέγεθος των αντικειμένων.

Επαγωγικοί ορισμοί

Το πλεονέκτημα της δομικής επαγωγής είναι ότι είναι απλούστερη.

Επαγωγικοί ορισμοί

Μπορούμε να διατυπώσουμε διαφορετικά έναν επαγωγικό ορισμό, ώστε να μπορούμε να παραλείψουμε το τμήμα (γ) στο γενικό πρότυπο του επαγωγικού ορισμού. Αυτό γίνεται ορίζοντας το σύνολο ως το ελάχιστο (εννοείται ώς προς τη σχέση $\subseteq$) σύνολο που ικανοποιεί τα τμήματα (α) και (β) του ορισμού.

Επαγωγικοί ορισμοί

Παράδειγμα

Μπορούμε να ορίσουμε σύνολο των προτάσεων Φ_P ως το ελάχιστο σύνολο το οποίο

- (α) Περιέχει κάθε προτασιακή μεταβλητή.
- (β1) Αν περιέχει την πρόταση ϕ τότε περιέχει και την $(\neg\phi)$.
- (β2) Αν περιέχει τις ϕ και ψ τότε περιέχει και τις $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ και $(\phi \leftrightarrow \psi)$.

Σε πολλές περιπτώσεις το τμήμα (γ) του ορισμού παραλείπεται τελείως (χωρίς να αναφέρεται ότι το σύνολο που ορίζουμε είναι το ελάχιστο που ικανοποιεί τα τμήματα (α) και (β) του ορισμού) και υπονοείται σιωπηρά ότι ισχύει.

Διαφορά Επαγωγικού Ορισμού και Αναδρομικού Ορισμού

Παρότι οι επαγωγικοί ορισμοί και οι αναδρομικοί ορισμοί έχουν ομοιότητες, υπάρχει μία σημαντική διαφορά μεταξύ τους:

- Με έναν επαγωγικό ορισμό περιγράφουμε την κατασκευή των στοιχείων ενός συνόλου. Κατά μία έννοια το νέο στοιχείο που κατασκευάζεται δεν υπάρχει μέχρι να εφαρμοστεί ο κανόνας που το κατασκευάζει.
- Με έναν αναδρομικό ορισμό περιγράφουμε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο το οποίο έχει ήδη οριστεί επαγωγικά και συνεπώς κάθε στοιχείο προϋπάρχει τη στιγμή που εφαρμόζεται ο αναδρομικός κανόνας. Επιπλέον ο τρόπος κατασκευής κάθε στοιχείου από απλούστερα στοιχεία του συνόλου με βάση κάποιον κανόνα, θα πρέπει να είναι μοναδικός.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Οι κυριότεροι στόχοι της Λογικής είναι οι παρακάτω:

- Ο καθορισμός μίας τυπικής γλώσσας, στην οποία διατυπώνονται προτάσεις.
- Η αυστηρή ερμηνεία των συμβόλων που περιέχονται στη γλώσσα, ώστε να καθοριστεί ποιές προτάσεις είναι αληθείς και ποιές ψευδείς.
- Η εύρεση ενός αποδεικτικού συστήματος (αλγορίθμου) με το οποίο θα μπορούμε να αποδεικνύουμε ότι μία πρόταση είναι λογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τυπικά τη σύνταξη και τη σημασιολογία της πρωτοβάθμιας λογικής την οποία έχουμε μέχρι στιγμής περιγράψει άτυπα.

Θα ορίσουμε το αλφάβητο της πρωτοβάθμιας λογικής, θα ορίσουμε επαγωγικα του όρους και τις προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής, θα ορίσουμε την έννοια του μοντέλου το οποίο αποδίδει σημασία στα σύμβολα της πρωτοβάθμιας λογικής και θα ορίσουμε αναδρομικά την αληθοτιμή μίας πρότασης σε ένα μοντέλο.

Σύνταξη της πρωτοβάθμιας λογικής

Ένα αλφάβητο της πρωτοβάθμιας λογικής περιέχει:

- ένα σύνολο μεταβλητών V
- ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα σταθερών
- ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα συναρτήσεων με n ορίσματα, για κάθε $n > 0$
- ένα σύνολο (ενδεχόμενα κενό) από σύμβολα κατηγορημάτων με n ορίσματα, για κάθε $n > 0$
- τους λογικούς συνδέσμους $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- τους ποσοδείκτες $\forall, \exists$
- τα σημεία στίξης ( ) ,

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Οι ακολουθίες συμβόλων που μας ενδιαφέρουν στην πρωτοβάθμια λογική και στις οποίες μπορεί να αποδοθεί σημασία είναι οι όροι, οι ατομικές προτάσεις και οι προτάσεις.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Η έννοια του όρου ορίζεται επαγωγικά:

- Κάθε μεταβλητή είναι όρος.
- Κάθε σύμβολο σταθεράς είναι όρος.
- Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι και f είναι σύμβολο συνάρτησης με n ορίσματα

  $$f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

  είναι επίσης όρος.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Αν $t_1, t_2, \ldots, t_n$ είναι όροι και p είναι σύμβολο κατηγορήματος με n ορίσματα τότε

$$p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

είναι ατομική πρόταση.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Η έννοια της πρότασης ορίζεται επαγωγικά:

- Κάθε ατομική πρόταση είναι πρόταση
- Αν ϕ και ψ είναι προτάσεις τότε $(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ είναι επίσης προτάσεις.
- Αν ϕ είναι πρόταση και x είναι μεταβλητή τότε $(\forall x\ \phi)$ και $(\exists x\ \phi)$ είναι επίσης προτάσεις.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Για να ελαττώσουμε το πλήθος των παρενθέσεων παραλείπουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις και υιοθετούμε κανόνες προτεραιότητας και προσεταιρισμού:

- Οι ποσοδείκτες και ο λογικός σύνδεσμος $\neg$ έχουν τη μέγιστη προτεραιότητα.
- Οι υπόλοιποι τελεστές σε φθίνουσα σειρά προτεραιότητας είναι $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- Οι ποσοδείκτες και οι λογικοί σύνδεσμοι με την ίδια προτεραιότητα προσεταιρίζονται από δεξιά προς τα αριστερά.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Σε κάποιες περιπτώσεις ορισμένα σύμβολα συναρτήσεων και κατηγορημάτων με δύο ορίσματα χρησιμοποιούνται ως τελεστές ανάμεσα στα ορίσματά τους και χωρίς παρενθέσεις.

Αντίστοιχα ορισμένα σύμβολα συναρτήσεων και κατηγορημάτων με ένα όρισμα χρησιμοποιούνται ως τελεστές αριστερά από το όρισμά τους χωρίς παρενθέσεις.

Σε αυτές τις περιπτώσεις τα σύμβολα συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται ως τελεστές έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από τα σύμβολα κατηγορημάτων που χρησιμοποιούνται ως τελεστές και αυτά με τη σειρά τους έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από τους ποσοδείκτες και τους λογικούς συνδέσμους.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ανάμεσα στους συναρτησιακούς τελεστές, αυτοί που έχουν ένα όρισμα έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από αυτούς που έχουν δύο ορίσματα.

Οι συναρτησιακοί τελεστές με ένα όρισμα προσεταιρίζονται από δεξιά προς τα αριστερά.

Οι συναρτησιακοί τελεστές με δύο ορίσματα προσεταιρίζονται από αριστερά προς τα δεξιά.

Μπορούμε αν θέλουμε να ορίσουμε διαφορετικούς κανόνες προτεραιότητας και προσεταιρισμού οι οποίοι θα περιγράφονται με σαφή τρόπο (π.χ. στη γλώσσα της αριθμητικής ο τελεστής του πολλασιασμού έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από το τελεστή της πρόσθεσης).

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στη συνέχεια θα ορίσουμε με τυπικό τρόπο την έννοια της ελεύθερης μεταβλητής σε μία πρόταση καθώς την πρόταση $\phi_{[x|t]}$ που προκύπτει από τη ϕ με αντικατάσταση όλων των ελεύθερων εμφανίσεων της x στη ϕ από τον όρο t, στα οποία είχαμε αναφερθεί κατά την άτυπη περιγραφή της πρωτοβάθμιας λογικής.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Συμβολίζουμε με $var(t)$ το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στον όρο t, το οποίο ορίζεται αναδρομικά:

- Αν $t = x$, όπου x μία μεταβλητή, τότε $var(t) = \{x\}$
- Αν $t = c$, όπου c ένα σύμβολο σταθεράς, τότε $var(t) = \emptyset$
- Αν $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, τότε $var(t) = var(t_1) \cup var(t_2) \cup \cdots \cup var(t_n)$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Συμβολίζουμε με $free(\phi)$ το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερες στην πρόταση ϕ, το οποίο ορίζεται αναδρομικά:

- Αν $\phi = p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ (ατομική πρόταση), τότε $free(\phi) = var(t_1) \cup var(t_2) \cup \cdots \cup var(t_n)$.
- Αν $\phi = \neg\psi$, τότε $free(\phi) = free(\psi)$
- Αν $\phi = \psi \wedge \omega$ ή $\phi = \psi \vee \omega$ ή $\phi = \psi \rightarrow \omega$ ή $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$, τότε $free(\phi) = free(\psi) \cup free(\omega)$
- Αν $\phi = \forall x\ \psi$ ή $\phi = \exists x\ \psi$, τότε $free(\phi) = free(\psi) - \{x\}$

Λέμε ότι η x εμφανίζεται ελεύθερη στην ϕ ανν $x \in free(\phi)$.

Διαισθητικά, μία μεταβλητή εμφανίζεται ελεύθερη σε μία πρόταση αν υπάρχει κάποια εμφάνιση της στην πρόταση που δεν βρίσκεται στην εμβέλεια κάποιου ποσοδείκτη.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Η πρόταση ϕ της πρωτοβάθμιας λογικής ονομάζεται κλειστή αν $\mathit{free}(\phi) = \emptyset$

Μία κλειστή πρόταση δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Έστω x μία μεταβλητή και t ένας όρος. Συμβολίζουμε με $z_{[x|t]}$ τον όρο που προκύπτει από τον z αν αντικαταστήσουμε τις εμφανίσεις της μεταβλητής x με τον όρο t, ο οποίος ορίζεται αναδρομικά:

- Αν $z = x$, τότε $z_{[x|t]} = t$
- Αν $z = y$, όπου y είναι μεταβλητή διαφορετική της x, τότε $z_{[x|t]} = z$
- Αν $z = c$, όπου c ένα σύμβολο σταθεράς, τότε $z_{[x|t]} = z$
- Αν $z = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, τότε $z_{[x|t]} = f((t_1)_{[x|t]}, (t_2)_{[x|t]}, \ldots, (t_n)_{[x|t]})$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Έστω x μία μεταβλητή και t ένας όρος. Η πρόταση $\phi_{[x|t]}$ ορίζεται αναδρομικά:

- Αν $\phi = p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, τότε $\phi_{[x|t]} = p((t_1)_{[x|t]}, (t_2)_{[x|t]}, \ldots, (t_n)_{[x|t]})$.
- Αν $\phi = \neg\psi$, τότε $\phi_{[x|t]} = \neg\psi_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \psi \wedge \omega$, τότε $\phi_{[x|t]} = \psi_{[x|t]} \wedge \omega_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \psi \vee \omega$, τότε $\phi_{[x|t]} = \psi_{[x|t]} \vee \omega_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \psi \rightarrow \omega$, τότε $\phi_{[x|t]} = \psi_{[x|t]} \rightarrow \omega_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \psi \leftrightarrow \omega$, τότε $\phi_{[x|t]} = \psi_{[x|t]} \leftrightarrow \omega_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \forall x\ \psi$ ή $\phi = \exists x\ \psi$ τότε $\phi_{[x|t]} = \phi$
- Αν $\phi = \forall y\ \psi$, όπου y διαφορετική από τη x, τότε $\phi_{[x|t]} = \forall y\ \psi_{[x|t]}$
- Αν $\phi = \exists y\ \psi$, όπου y διαφορετική από τη x, τότε $\phi_{[x|t]} = \exists y\ \psi_{[x|t]}$

Λέμε ότι η $\phi_{[x|t]}$ είναι η πρόταση που προκύπτει από τη ϕ αν αντικαταστήσουμε τις ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x με τον όρο t.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Σημασιολογία της πρωτοβάθμιας λογικής

Η ερμηνεία των συμβόλων στην πρωτοβάθμια λογική γίνεται χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο (ή δομή ή ερμηνεία). Ένα μοντέλο $\mathcal{M}$:

- καθορίζει ένα μή κενό σύνολο αναφοράς $|\mathcal{M}|$ (ως στοιχεία του οποίου ερμηνεύονται οι όροι), το οποίο προσδιορίζει τα στοιχεία στα οποία εκτείνονται οι ποσοδείκτες $\forall$ και $\exists$.
- σε κάθε σύμβολο σταθεράς c αντιστοιχεί ένα στοιχείο $c^{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$
- σε κάθε σύμβολο συνάρτησης f με n ορίσματα αντιστοιχεί μία συνάρτηση $f^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$
- σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος p με n ορίσματα αντιστοιχεί ένα σύνολο $p^{\mathcal{M}} \subseteq |\mathcal{M}|^n$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Όπως φαίνεται παραπάνω ένα μοντέλο δεν ερμηνεύει τις μεταβλητές. Όπως θα δούμε αργότερα, η ερμηνεία των υπολοίπων συμβόλων αρκεί για τον καθορισμό της αλήθειας κάθε πρότασης η οποία δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Αν ωστόσο μία πρόταση περιέχει ελεύθερες μεταβλητές, τότε για να καθοριστεί αν είναι αληθής πρέπει να υπάρχει μία ερμηνεία των μεταβλητών, δηλαδή μία συνάρτηση $s : V \to |\mathcal{M}|$.

Με δεδομένο ένα μοντέλο $\mathcal{M}$ και μία ανάθεση τιμών στις μεταβλητές s μπορούμε να ερμηνεύσουμε οποιονδήποτε όρο ως ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς $|\mathcal{M}|$.

Ορισμός

Η επέκταση $\mathcal{M}_s$ ενός μοντέλου $\mathcal{M}$ σε όλους τους όρους με βάση την ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές ορίζεται αναδρομικά:

- Αν $t = x$, όπου x μία μεταβλητή, τότε $\mathcal{M}_s(t) = s(x)$
- Αν $t = c$, όπου c ένα σύμβολο σταθεράς, τότε $\mathcal{M}_s(t) = c^{\mathcal{M}}$
- Αν $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, τότε $\mathcal{M}_s(t) = f^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_s(t_1), \mathcal{M}_s(t_2), \ldots, \mathcal{M}_s(t_n))$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την αληθοτιμή μίας πρότασης σε ένα μοντέλο $\mathcal{M}$ με βάση την ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές.

Γράφουμε $\mathcal{M} \models_s \phi$ για να δηλώσουμε ότι η πρόταση ϕ είναι αληθής στο μοντέλο $\mathcal{M}$ με την ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές (λέμε ισοδύναμα ότι το $\mathcal{M}$ ικανοποιεί την ϕ με την s).

Αν δεν ισχύει $\mathcal{M} \models_s \phi$ γράφουμε $\mathcal{M} \not\models_s \phi$, το οποίο δηλώνει ότι η πρόταση ϕ είναι ψευδής στο μοντέλο $\mathcal{M}$ με την ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές

Ο παρακάτω αναδρομικός ορισμός της αλήθειας (ο τυπικός ορισμός του $\mathcal{M} \models_s \phi$) οφείλεται στον Alfred Tarksi.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Έστω $\mathcal{M}$ ένα μοντέλο και s μία ανάθεση τιμών από το $|\mathcal{M}|$ στις μεταβλητές. Ορίζουμε αναδρομικά το $\mathcal{M} \models_s \phi$:

- $\mathcal{M} \models_s p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ανν $(\mathcal{M}_s(t_1), \mathcal{M}_s(t_2), \ldots, \mathcal{M}_s(t_n)) \in p^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models_s \neg\phi$ ανν $\mathcal{M} \not\models_s \phi$
- $\mathcal{M} \models_s \phi \wedge \psi$ ανν $\mathcal{M} \models_s \phi$ και $\mathcal{M} \models_s \psi$
- $\mathcal{M} \models_s \phi \vee \psi$ ανν $\mathcal{M} \models_s \phi$ ή $\mathcal{M} \models_s \psi$
- $\mathcal{M} \models_s \phi \rightarrow \psi$ ανν $\mathcal{M} \models_s \psi$ ή $\mathcal{M} \not\models_s \phi$
- $\mathcal{M} \models_s \phi \leftrightarrow \psi$ ανν $\mathcal{M} \models_s \phi$ και $\mathcal{M} \models_s \psi$, ή $\mathcal{M} \not\models_s \phi$ και $\mathcal{M} \not\models_s \psi$
- $\mathcal{M} \models_s \forall x\ \phi$ ανν για κάθε στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ ισχύει $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$
- $\mathcal{M} \models_s \exists x\ \phi$ ανν υπάρχει στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ τέτοιο ώστε $\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \phi$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στον παραπάνω ορισμό συμβολίζουμε με $s_{(x|d)}$ την ανάθεση τιμών στις μεταβλητές η οποία συμφωνεί παντού με την s, εκτός από την μεταβλητή x στην οποία αναθέτει την τιμή d:

$$s_{(x|d)}(y) = \begin{cases} d & \text{αν } y \text{ είναι η μεταβλητή } x \\ s(y) & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ερμηνεία των λογικών συνδέσμων είναι η ίδια όπως στην προτασιακή λογική.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα

Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα μας περιέχει μόνο ένα σύμβολο κατηγορήματος R με δύο ορίσματα. Θεωρούμε το μοντέλο $\mathcal{M}$ όπου

$$|\mathcal{M}| = \{A, B, C, D\}$$

$$R^{\mathcal{M}} = \{(A, A), (A, B), (A, C), (D, A)\}$$

Έστω s η ανάθεση τιμών στις μεταβλητές με $s(x) = A$ για κάθε μεταβλητή x.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας ότι:

$$\mathcal{M} \models_s \exists x \, \forall y \, (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο $d \in |\mathcal{M}|$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{M} \models_{s(x|d)} \forall y \, (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Επιλέγουμε $d = A$. Θα δείξουμε ότι:

$$\mathcal{M} \models_{s(x|A)} \forall y \, (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $d' \in |\mathcal{M}|$

$$\mathcal{M} \models_{s(x|A)(y|d')} (R(x,y) \vee R(y,x))$$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αρα θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν όλα τα παρακάτω:

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|A)(y|A)}} (R(x,y) \lor R(y,x))$$

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|A)(y|B)}} (R(x,y) \lor R(y,x))$$
$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|A)(y|C)}} (R(x,y) \lor R(y,x))$$
$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|A)(y|D)}} (R(x,y) \lor R(y,x))$$

Θα αποδείξουμε τον δεύτερο από τους παραπάνω ισχυρισμούς. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Για απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε $r = s_{(x|A)(y|B)}$.
Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\mathcal{M} \models_r R(x, y)$$

ή ότι

$$\mathcal{M} \models_r R(y, x)$$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα αποδείξουμε το πρώτο. Με βάση τον ορισμό της αλήθειας πρέπει να δείξουμε ότι $(\mathcal{M}_r(x), \mathcal{M}_r(y)) \in R^{\mathcal{M}}$.

Όμως

$$\mathcal{M}_r(x) = r(x) = s_{(x|A)(y|B)}(x) = s_{(x|A)}(x) = A$$

και

$$\mathcal{M}_r(y) = r(y) = s_{(x|A)(y|B)}(y) = B$$

Συνεπώς: $(\mathcal{M}_r(x), \mathcal{M}_r(y)) = (A, B) \in R^{\mathcal{M}}$.

Δείξαμε ότι $\mathcal{M} \models_s \exists x\ \forall y\ (R(x, y) \vee R(y, x))$.

Παράδειγμα

Υποθέστε ότι η πρωτοβαθμια γλώσσα μας περιέχει ένα σύμβολο κατηγορήματος p με δύο ορίσματα, ένα σύμβολο συνάρτησης f με ένα όρισμα και ένα σύμβολο σταθεράς c.

Θεωρούμε το μοντέλο $\mathcal{M}$ όπου

$$|\mathcal{M}| = \{0, 1, 2\}$$

$$c^{\mathcal{M}} = 1$$

$$f^{\mathcal{M}}(i, j) = (i + j) \mod 3$$

$$p^{\mathcal{M}} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα δείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας ότι:

$$\mathcal{M} \models_s \forall x \exists y \; p(f(x, y), c)$$

για κάθε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές s.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Έστω s μία οποιαδήποτε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές. Θα πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε στοιχείο $d \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|d)}} \exists y\ p(f(x,y),c)$$

δηλαδή ότι

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|0)}} \exists y\ p(f(x,y),c)$$

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|1)}} \exists y\ p(f(x,y),c)$$

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|2)}} \exists y\ p(f(x,y),c)$$

Θα αποδείξουμε τον τρίτο από τους παραπάνω ισχυρισμούς. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο $d' \in |\mathcal{M}|$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|2)(y|d')}} p(f(x,y),c)$$

Επιλέγουμε $d' = 1$. Θα δείξουμε ότι:

$$\mathcal{M} \models_{s_{(x|2)(y|1)}} p(f(x,y),c)$$

Για απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε $r = s_{(x|2)(y|1)}$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $(\mathcal{M}_r(f(x,y)), \mathcal{M}_r(c)) \in p^{\mathcal{M}}$

Όμως

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_r(f(x,y)) &= f^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}_r(x), \mathcal{M}_r(y)) = f^{\mathcal{M}}(r(x), r(y)) \\ &= f^{\mathcal{M}}(2,1) = (2+1) \mod 3 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\mathcal{M}_r(c) = c^{\mathcal{M}} = 1$$

Συνεπώς $(\mathcal{M}_r(f(x,y)), \mathcal{M}_r(c)) = (0,1) \in p^{\mathcal{M}}$.

Δείξαμε ότι $\mathcal{M} \models_s \forall x \exists y \; p(f(x,y), c)$ για κάθε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές s.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Αν Γ είναι ένα σύνολο προτάσεων (ενδεχόμενα άπειρο), τότε κατ' επέκταση λέμε ότι ο ένα μοντέλο $\mathcal{M}$ ικανοποιεί το Γ με την ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές (συμβολισμός: $\mathcal{M} \models_s \Gamma$), αν για κάθε πρόταση $\phi \in \Gamma$ ισχύει $\mathcal{M} \models_s \phi$.

Αν $\mathcal{M} \models_s \phi$ (ή $\mathcal{M} \models_s \Gamma$) για κάθε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές, τότε γράφουμε απλά $\mathcal{M} \models \phi$ (ή $\mathcal{M} \models \Gamma$).

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Μία πρόταση ϕ ονομάζεται έγκυρη αν για κάθε μόντέλο $\mathcal{M}$ ισχύει $\mathcal{M} \models \phi$.

Παράδειγμα

Οι παραπάτω προτάσεις είναι έγκυρες

- $\forall x \; p(x) \rightarrow p(1)$.
- $\forall x \; p(x) \rightarrow \exists x \; p(x)$ (αυτή η πρόταση είναι έγκυρη επειδή το $|\mathcal{M}|$ είναι πάντα μή κενό σύνολο).
- $\forall x \; (p(x) \wedge q(x)) \leftrightarrow (\forall x \; p(x) \wedge \forall x \; q(x))$.

Ορισμός

Λέμε ότι η πρόταση ϕ λογικά συνεπάγεται την ψ (συμβολισμός: $\phi \models \psi$) αν για κάθε μόντέλο $\mathcal{M}$ και κάθε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές τέτοια ώστε $\mathcal{M} \models_s \phi$, ισχύει $\mathcal{M} \models_s \psi$

Παράδειγμα

- Η πρόταση $\forall x \ p(x)$ λογικά συνεπάγεται την $p(1)$.
- Η πρόταση $\forall x \ p(x)$ λογικά συνεπάγεται την $\exists x \ p(x)$.
- Η πρόταση $(\forall x \ p(x) \vee \forall x \ q(x))$ λογικά συνεπάγεται την $\forall x \ (p(x) \vee q(x))$.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Από τους ορισμούς της εγκυρότητας και της λογικής συνεπάγωγής προκύπτει άμεσα το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Η ϕ λογικά συνεπάγεται την ψ.
- Η πρόταση $\phi \to \psi$ είναι έγκυρη.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Η έννοια της λογικής συνέπειας μπορεί να επεκταθεί και για σύνολα. Ο παρακάτω ορισμός θα μας φανεί χρήσιμος στη θεωρία αποδείξεων.

Ορισμός

Λέμε ότι το σύνολο προτάσεων Γ λογικά συνεπάγεται την ψ (συμβολισμός: $\Gamma \models \psi$) αν για κάθε μόντέλο $\mathcal{M}$ και κάθε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές τέτοια ώστε $\mathcal{M} \models_s \Gamma$, ισχύει $\mathcal{M} \models_s \psi$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παρατηρούμε ότι, στην ειδική περίπτωση που $\Gamma = \emptyset$, το $\emptyset \models \phi$ σημαίνει ότι η ϕ αληθεύει σε κάθε μοντέλο με οποιαδήποτε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές, κάτι που σημαίνει ότι η ϕ είναι έγκυρη.

Όταν η ϕ είναι έγκυρη $\models \phi$ (αντί για $\emptyset \models \phi$).

Ορισμός

Λέμε ότι οι πρόταση ϕ και ψ είναι λογικά ισοδύναμες αν για κάθε μόντέλο $\mathcal{M}$ και κάθε ανάθεση τιμών s στις μεταβλητές, $\mathcal{M} \models_s \phi$ αν και μόνο αν $\mathcal{M} \models_s \psi$.

Παράδειγμα

- Η πρόταση $(\forall x \; p(x) \wedge \forall x \; q(x))$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x \; (p(x) \wedge q(x))$
- Η πρόταση $\neg\forall x \; p(x)$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x \; \neg p(x)$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Από τους ορισμούς της εγκυρότητας, της λογικής συνεπάγωγής και της λογικής ισοδυναμίας προκύπτει άμεσα το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα

Για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ και ψ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- Η ϕ είναι λογικά ισοδύναμη με την ψ.
- Η ϕ λογικά συνεπάγεται την ψ και η ψ λογικά συνεπάγεται την ϕ
- Η πρόταση $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι έγκυρη.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Είναι διαισθητικά προφανές ότι η ερμηνεία ενός όρου εξαρτάται μόνο από τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτόν.

Αντίστοιχα, η αληθοτιμή μίας πρότασης εξαρτάται μόνο από τις τιμές των μεταβλητών που εμφανίζονται ελεύθερες σε αυτή (παρατηρήστε ότι αν μία μεταβλητή x εμφανίζεται δεσμευμένη σε μία πρόταση τότε η αποτίμησή της δεν γίνεται με βάση την s αλλά με βάση αναθέσεις τιμών της μορφής $s_{(x|d)}$, και συνεπώς η τιμή $s(x)$ δεν χρησιμοποιείται για να καθοριστεί η αληθοτιμή της ϕ).

Τα παραπάνω διατυπώνονται με πιο σαφή τρόπο στα παρακάτω θεωρήματα, τα οποία μπορούν να αποδεικτούν εύκολα με δομική επαγωγή.

Θεώρημα

Έστω t ένας όρος και s_1 και s_2 δύο αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές τέτοιες ώστε για κάθε μεταβλητή x που εμφανίζεται στον t να ισχύει $s_1(x) = s_2(x)$. Τότε για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ ισχύει ότι $\mathcal{M}_{s_1}(t) = \mathcal{M}_{s_2}(t)$.

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν ο t δεν έχει μεταβλητές τότε η ερμηνεία του είναι ανεξάρτητη από την s.

Θεώρημα

Έστω ϕ μία πρόταση και s_1 και s_2 δύο αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές τέτοιες ώστε για κάθε μεταβλητή x που εμφανίζεται ελεύθερη στη ϕ να ισχύει $s_1(x) = s_2(x)$. Τότε για κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ ισχύει ότι

$$\mathcal{M} \models_{s_1} \phi \text{ ανν } \mathcal{M} \models_{s_2} \phi.$$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν η ϕ δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές τότε το αν ισχύει $\mathcal{M} \models_s \phi$ είναι ανεξάρτητο από την s.

Αποδεικτικά Συστήματα

Ονομάζουμε αποδεικτικό σύστημα έναν συστηματικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να αποδεικνύουμε όλες τις προτάσεις οι οποίες είναι λογικές συνέπειες ενός συνόλου προτάσεων Γ.

Όπως θα δούμε, ένα αποδεικτικό σύστημα δεν ερμηνεύει τα σύμβολα στις προτάσεων του Γ και στην πρόταση ϕ την οποία προσπαθεί να αποδείξει, αλλά βασίζεται στη συντακτική δομή των προτάσεων αυτών.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Αν έχουμε σχεδιάσει ένα αποδεικτικό σύστημα, τότε γράφουμε $\Gamma \vdash \phi$ αν η πρόταση ϕ μπορεί να αποδειχτεί από το σύνολο Γ χρησιμοποιώντας το σύστημα αυτό.

Για να εξυπηρετεί ένα αποδεικτικό σύστημα πλήρως το σκοπό για το οποίο το έχουμε σχεδιάσει, θέλουμε να ισχύει $\Gamma \vdash \phi$ αν και μόνο αν $\Gamma \models \phi$.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ορισμός

Ένα αποδεικτικό σύστημα ονομάζεται ορθό αν $\Gamma \vdash \phi$ συνεπάγεται $\Gamma \models \phi$.

Ορισμός

Ένα αποδεικτικό σύστημα ονομάζεται πλήρες αν $\Gamma \models \phi$ συνεπάγεται $\Gamma \vdash \phi$.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ο στόχος της θεωρίας αποδείξεων είναι ο σχεδιασμός αποδεικτικών συστημάτων τα οποία να είναι ορθά και πλήρη.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μία ειδική κατηγορία αποδεικτικών συστημάτων που ονομάζονται αποδεικτικά συστήμα τύπου Hilbert.

Ένα αποδεικτικό σύστημα αυτής της κατηγορίας αποτελείται από:

- Ένα σύνολο προτάσεων που ονομάζονται λογικά αξιώματα.
- Ένα σύνολο από αποδεικτικούς κανόνες της μορφής
  $$\frac{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k}{\psi}$$

Διαισθητικά ένας αποδεικτικός κανόνας δηλώνει ότι από τις τις προτάσεις $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ μπορούμε να συμπεράνουμε την ψ

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι ένα αποδεικτικό συστήμα τύπου Hilbert ορθό είναι να ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- Κάθε λογικό αξίωμα θα πρέπει να είναι έγκυρη πρόταση.
- Κάθε αποδεικτικός κανόνας της μορφής
  $$\frac{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k}{\psi}$$
  θα πρέπει να είναι ορθός, δηλαδή να ισχύει $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\} \models \psi$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Ονομάζουμε απόδειξη μίας πρότασης ϕ από ένα σύνολο προτάσεων Γ μία πεπερασμένη ακολουθία προτάσεων $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ τέτοια ώστε $\phi = \phi_n$ και για κάθε i, $1 \leq i \leq n$ να ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- ϕ_i είναι λογικό αξίωμα.
- $\phi_i \in \Gamma$.
- Υπάρχουν δείκτες $j_1 < j_2 < \ldots j_k < i$ τέτοιοι ώστε
  $$\frac{\phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \ldots, \phi_{j_k}}{\phi_i}$$
  να είναι αποδεικτικός κανόνας του συστήματος.

Όπως έχουμε αναφέρει γράφουμε $\Gamma \vdash \phi$ για να δηλώσουμε ότι η ϕ αποδεικνύεται από το Γ.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα αποδεικτικό σύστημα το οποίο περιλαμβάνει (μεταξύ άλλων) τις παρακάτω ομάδες (σχήματα) αξιωμάτων:

- A1 $\phi \to \neg\neg\phi$ για κάθε πρόταση ϕ
- A2 $\neg\phi \to (\phi \to \psi)$ για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ, ψ.
- A3 $(\phi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\phi)$ για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ, ψ.
- A4 $\forall x\ (\phi \to \exists y\ \phi_{[x|y]})$ για κάθε πρόταση ϕ και οποιεσδήποτε μεταβλητές x και y.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίσης το αποδεικτικό σύστημα περιλαμβάνει τους παρακάτω αποδεικτικούς κανόνων:

K1 $\dfrac{\phi \rightarrow \psi, \phi}{\psi}$

για οποιεσδήποτε προτάσεις ϕ, ψ. Ο κανόνας αυτός ονομάζεται modus ponens.

K2 $\dfrac{\forall x \ \phi}{\phi_{[x|t]}}$

για κάθε πρόταση ϕ, κάθε μεταβλητή x και κάθε όρο t χωρίς μεταβλητές.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Τα αξιώματα A1-A4 είναι έγκυρες προτάσεις και οι κανόνες K1 και K2 είναι ορθοί (αυτό μπορεί να αποδειχτεί εύκολα χρησιμοποιώντας τον ορισμό της αλήθειας).

Συνεπώς το αποδεικτικό σύστημα είναι ορθό.

Θα δώσουμε μία απόδειξη της πρότασης $\exists y\ (p(y) \to \forall z\ p(z))$ από το σύνολο προτάσεων $\Gamma = \{\forall x\ (p(x) \to \neg q(x)), q(a)\}$.

Η ακολουθία προτάσεων που σχηματίζουν την απόδειξη δίνεται στον επόμενο πίνακα.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

$\phi_1 = \forall x\ (p(x) \to \neg q(x))$	ανήκει στο Γ
$\phi_2 = p(a) \to \neg q(a)$	από Κ2 για ϕ_1 με $t = a$
$\phi_3 = (p(a) \to \neg q(a)) \to (\neg\neg q(a) \to \neg p(a))$	αξίωμα Α3
$\phi_4 = \neg\neg q(a) \to \neg p(a)$	από Κ1 για ϕ_3 και ϕ_2
$\phi_5 = q(a) \to \neg\neg q(a)$	αξίωμα Α1
$\phi_6 = q(a)$	ανήκει στο Γ
$\phi_7 = \neg\neg q(a)$	από Κ1 για ϕ_5 και ϕ_6
$\phi_8 = \neg p(a)$	από Κ1 για ϕ_4 και ϕ_7
$\phi_9 = \neg p(a) \to (p(a) \to \forall z\ p(z))$	αξίωμα Α2
$\phi_{10} = p(a) \to \forall z\ p(z)$	από Κ1 για ϕ_9 και ϕ_8
$\phi_{11} = \forall x\ ((p(x) \to \forall z\ p(z)) \to \exists y\ (p(y) \to \forall z\ p(z)))$	αξίωμα Α4
$\phi_{12} = (p(a) \to \forall z\ p(z)) \to \exists y\ (p(y) \to \forall z\ p(z)))$	από Κ2 για ϕ_{11} με $t = a$
$\phi_{13} = \exists y\ (p(y) \to \forall z\ p(z)))$	από Κ1 για ϕ_{12} και ϕ_{10}

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένους ορθούς αποδεικτικούς κανόνες, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο σχεδιασμό ενός αποδεικτικού συστήματος (ϕ, ψ, ω είναι οποιεσδήποτε προτάσεις):

- Modus ponens
$$\frac{\phi \rightarrow \psi,\ \ \phi}{\psi}$$
- Modus tollens
$$\frac{\phi \rightarrow \psi,\ \ \neg\psi}{\neg\phi}$$
- Απλοποίηση
$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}$$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

- Εισαγωγή διάζευξης (ή πρόσθεση)

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}$$

- Εισαγωγή σύζευξης

$$\frac{\phi, \ \psi}{\phi \wedge \psi}$$

- Υποθετικός συλλογισμός

$$\frac{\phi \rightarrow \psi, \ \psi \rightarrow \omega}{\phi \rightarrow \omega}$$

- Διαζευκτικός συλλογισμός

$$\frac{\phi \vee \psi, \ \neg\phi}{\psi}$$

- Επίλυση (resolution)

$$\frac{\phi \vee \psi, \ \neg\psi \vee \omega}{\phi \vee \omega}$$

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

- Καθολική συγκεκριμενοποίηση (universal instantiation):
  $$\frac{\forall x\ \phi}{\phi_{[x|t]}}$$
  για κάθε μεταβλητή x και κάθε όρο t χωρίς μεταβλητές.
- Υπαρξιακή γενίκευση (existential generalization):
  $$\frac{\phi_{[x|t]}}{\exists x\ \phi}$$
  για κάθε μεταβλητή x και κάθε όρο t χωρίς μεταβλητές.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Οι αποδείξεις που χρησιμοποιούμε στην πράξη έχουν πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τις τυπικές αποδείξεις σε ένα σύστημα τύπου Hilbert, έχουν ωστόσο και αρκετές διαφορές.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Στις αποδείξεις που γράφουμε στα μαθηματικά, δεν υπάρχει προκαθορισμένο αποδεικτικό σύστημα (σύνολο αξιωμάτων και κανόνων) αλλά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως αξίωμα οποιαδήποτε έγκυρη πρόταση και ως αποδεικτικό κανόνα οποιονδήποτε ορθό αποδεικτικό κανόνα.

Πολλές φορές παραλείπουμε την περιγραφή κάποιων ενδιάμεσων βημάτων, κάτι που αντιστοιχεί με την εφαρμογή σύνθετων κανόνων, που συνδυάζουν πολλούς άλλους κανόνες σε έναν.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Επίσης στις αποδείξεις επικαλούμαστε προτάσεις για τις οποίες γνωρίζουμε ότι έχουν αποδειχτεί. Αυτό αντιστοιχεί στην ιδιότητα των συστημάτων τύπου Hilbert που δίνεται στο παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα

Έστω Γ ένα σύνολο προτάσεων και $\phi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ προτάσεις. Αν $\Gamma \vdash \phi_1$, $\Gamma \vdash \phi_2$, $\ldots$, $\Gamma \vdash \phi_n$ και $\Gamma \cup \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \vdash \phi$, τότε $\Gamma \vdash \phi$.

Πρωτοβάθμια Λογική (τυπική περιγραφή)

Επιπλέον για να αποδείξουμε μία πρόταση της μορφής $\phi \to \psi$, αποδεικνύουμε την πρόταση ψ, θεωρώντας ότι η πρόταση ϕ αληθεύει.

Αυτό σε ένα σύστημα τύπου Hilbert σημαίνει ότι αντί να δείξουμε ότι $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ δείχνουμε ότι $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$. Αν το αποδεικτικό σύστημα είναι ορθό, αυτό συνεπάγεται ότι $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$ και άρα $\Gamma \models \phi \to \psi$.

Συνεπώς στην παραπάνω περίπτωση έχουμε τεκμηριώσει ότι η $\phi \to \psi$ είναι λογική συνέπεια του Γ, χωρίς ωστόσο να έχουμε μία τυπική απόδειξη για αυτό (δηλαδή χωρίς να έχουμε δείξει ότι $\Gamma \vdash \phi \to \psi$).

Το κατά πόσο το $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ συνεπάγεται $\Gamma \vdash \phi \to \psi$ εξαρτάται από το αποδεικτικό σύστημα. Ένα πλήρες αποδεικτικό σύστημα έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Η ύπαρξη αποδεικτικών συστημάτων τα οποία να είναι ορθά και πλήρη δεν είναι κάτι το προφανές.

Τη δεκαετία του 1920 οι David Hilbert και Wilhelm Ackermann πρότειναν ένα ορθό αποδεικτικό σύστημα, για το οποίο ο Kurt Gödel απέδειξε το 1929 ότι είναι πλήρες.

Θεώρημα

Θεώρημα Πληρότητας: Αν $\Gamma \models \phi$ τότε $\Gamma \vdash \phi$.