Διακριτά Μαθηματικά II

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

1 Πρωτοβάθμια Λογική

Περιεχόμενα

1 Πρωτοβάθμια Λογική

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την πρωτοβάθμια λογική (αρχικά άτυπα και στη συνέχεια τυπικά) η οποία μας επιτρέπει να διατυπώσουμε προτάσεις με συμβολικό τρόπο, στον οποίο αποτυπώνονται τα αντικείμενα που εμπλέκονται στην πρόταση καθώς και οι μεταξύ τους σχέσεις που καθορίζονται από την πρόταση.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Στην πρωτοβάθμια λογική χρησιμοποιούμε όρους για να αναπαραστήσουμε τα αντικείμενα για το οποία μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε προτάσεις.

Οι μεταβλητές και οι σταθερές είναι απλοί όροι. Σύνθετοι όροι σχηματίζονται χρησιμοποιώντας συναρτησιακά σύμβολα (ή τελεστές), το οποία παίρνουν ως ορίσματα (ήδη σχηματισμένους) όρους.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα όρων:

- 0, 1, 2, 4, π, ϵ, $\clubsuit$, $\heartsuit$ (σταθερές)
- x, y, w (μεταβλητές)
- $f(x, 1)$, $\sin \pi$, $w \circ \epsilon$, $\clubsuit \oplus x$, $f(\cos \pi/2, 1 + \sin y/4)$, $(\clubsuit \oplus x) \odot (0 \star \heartsuit)$ (σύνθετοι όροι)

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Οι όροι είναι συντακτικά αντικείμενα. Για να μπορέσουμε να ερμηνεύσουμε τους όρους (δηλαδή να προσδιορίσουμε το αντικείμενο το οποίο αναπαριστά ένα όρος) θα πρέπει:

- να ορίσουμε ένα σύνολο αναφοράς
- να ερμηνεύσουμε τις σταθερές ως στοιχεία του συνόλου αναφοράς
- να αναθέσουμε τιμές από το σύνολο αναφοράς στις μεταβλητές
- να ερμηνεύσουμε τα συναρτησιακά σύμβολα ως συναρτήσεις με πεδίο τιμών το σύνολο αναφοράς.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Οι απλές (ή ατομικές) προτάσεις σχηματίζονται χρησιμοποιώντας σύμβολα κατηγορημάτων, το οποία παίρνουν ως ορίσματα όρους.

Παράδειγμα ατομικών προτάσεων:

- $odd(n)$
- $p(x, y, x)$
- $y + 1 > y$
- $(x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + y \cdot y + 2 \cdot x \cdot y$
- $\clubsuit \trianglelefteq \spadesuit$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Για να καθοριστεί αν μια ατομική πρόταση είναι αληθής ή ψευδής χρειάζεται να ερμηνευτούν τα σύμβολα κατηγορημάτων.

Τα σύμβολα κατηγορημάτων με ένα όρισμα ερμηνεύονται ως υποσύνολα του συνόλου αναφοράς, έτσι ώστε το υποσύνολο που αντιστοιχεί σε ένα σύμβολο κατηγορήματος να περιέχει τα αντικείμενα για τα οποία αληθεύει το κατηγόρημα.

Τα σύμβολα κατηγορημάτων με περισσότερα από ένα ορίσματα ερμηνεύονται ως σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αναφοράς.

Αν η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής περιέχει το σύμβολο $=$ τότε αυτό ερμηνεύεται πάντοτε ως ισότητα στο σύνολο αναφοράς.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Οι προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής σχηματίζονται από ατομικές προτάσεις χρησιμοποιώντας τους λογικούς συνδέσμους $\neg$ (όχι), $\wedge$ (καί), $\vee$ (ή), $\rightarrow$ (συνεπάγεται), $\leftrightarrow$ (ισοδυναμεί) και τους ποσοδείκτες $\forall$ (για κάθε), $\exists$ (υπάρχει).

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Κάθε πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής μπορεί να χαρακτηριστεί ως αληθής η ψευδής, με βάση:

- τις αληθοτιμές των ατομικών προτάσεων που την συνθέτουν
- την ερμηνεία των λογικών συνδέσμων που είναι πάντα η ίδια και ταυτίζεται με αυτή που γνωρίζουμε από την προτασιακή λογική
- την ερμηνεία των ποσοδεικτών που είναι επίσης πάντα η ίδια και θα εξεταστεί στη συνέχεια.

Καθολικός ποσοδείκτης: Η πρόταση $\forall x\ \phi$ (διαβάζεται για κάθε x ϕ) είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση ϕ αληθεύει, ανεξάρτητα από την τιμή που θα ανατεθεί στη μεταβλητή x (δηλαδή για οποιαδήποτε τιμή της x από το σύνολο αναφοράς).

Παράδειγμα: $\forall x\ (x \cdot x < x \rightarrow x < 1)$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Υπαρξιακός ποσοδείκτης: Η πρόταση $\exists x\ \phi$ (υπάρχει x τέτοιο ώστε ϕ) είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση ϕ αληθεύει, για τουλάχιστον μία τιμή μεταβλητής x (δηλαδή για κάποια τιμή της x από το σύνολο αναφοράς).

Παράδειγμα: $\exists x\ (x > 0 \land x < 1)$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Μία πρόταση της πρωτοβάθμιας ονομάζεται έγκυρη αν αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία των συμβόλων (σταθερών, συναρτήσεων, κατηγορημάτων και μεταβλητών).

Έγκυρες προτάσεις μπορούν να σχηματιστούν, αν αντικαταστήσουμε σε μια ταυτολογία τις προτασιακές μεταβλητές με προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής.

Υπάρχουν ωστόσο έγκυρες προτάσεις που δεν προκύπτουν από ταυτολογίες και η εγκυρότητά τους οφείλεται στη σχέση μεταξύ των ποσοδεικτών.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Δύο προτάσεις ϕ και ψ της πρωτοβάθμιας λογικής ονομάζονται λογικά ισοδύναμες (συμβολισμός $\phi \equiv \psi$) αν έχουν την ίδια αληθοτιμή για οποιαδήποτε ερμηνεία των συμβόλων.

Παρατηρούμε ότι οι προτάσεις ϕ και ψ είναι λογικά ισοδύναμες αν και μόνο αν η πρόταση $\phi \leftrightarrow \psi$ είναι έγκυρη.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Η πρόταση ϕ συνεπάγεται λογικά την ψ, αν η ψ αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία των συμβόλων αληθεύει η ϕ.

Παρατηρούμε ότι οι ϕ συνεπάγεται λογικά την ψ αν και μόνο αν η πρόταση $\phi \to \psi$ είναι έγκυρη.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παρατήρηση 1: Συνήθως στις καθολικές και υπαρξιακές προτάσεις που διατυπώνουμε, η ποσοδεικτούμενη μεταβλητή εμφανίζεται στην πρόταση που ακολουθεί τον ποσοδείκτη. Ωστόσο οι προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\exists x\ \phi$ είναι συντακτικά ορθές και μπορεί να τους αποδοθεί αληθοτιμή ακόμη και στην περίπτωση που η x δεν εμφανίζεται στην ϕ.

Σε αυτή την περίπτωση το κατά πόσο η πρότάση ϕ είναι αληθής δεν εξαρτάται από την τιμή της μεταβλητής x και οι προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\exists x\ \phi$ είναι ισοδύναμες με την ϕ.

Για παράδειγμα οι προτάσεις $\forall x\ 1 > 0$ και $\exists x\ 1 > 0$ είναι ισοδύναμες με την $1 > 0$. Ομοίως οι προτάσεις $\forall x\ p(\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit)$ και $\exists x\ p(\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit)$ είναι ισοδύναμες με την $p(\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit)$.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παρατήρηση 2: Συνήθως στις καθολικές και υπαρξιακές προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\exists x\ \phi$ που διατυπώνουμε, η x δεν βρίσκεται στην εμβέλεια κάποιου άλλου ποσοδείκτη εντός της ϕ. Ωστόσο οι προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\exists x\ \phi$ είναι συντακτικά ορθές και μπορεί να τους αποδοθεί αληθοτιμή ακόμη και στην περίπτωση που κάποιες εμφανίσεις της x βρίσκονται στην εμβέλεια άλλων ποσοδεικτών μέσα στη ϕ.

Για παράδειγμα στην πρόταση $\forall x\ (x \geq 0 \wedge \exists x\ (x > 100))$, η μεταβλητή x στην πρόταση $x > 100$ βρίσκεται στην εμβέλεια του υπαρξιακού ποσοδείκτη.

Σε τέτοιες περιπτώσεις ο εξωτερικός ποσοδείκτης επηρεάζει μόνο τις 'ελεύθερες' εμφανίσεις της x (αυτό διατυπώνεται με ακρίβεια στον τυπικό ορισμό της σημασιολογίας). Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα $\forall x\ (x \geq 0 \wedge \exists y\ (y > 100))$.

Παρατήρηση 3: Έστω ότι με βάση κάποια ερμηνεία, για κάθε στοιχείο a του συνόλου αναφοράς υπάρχει ένας όρος t_a χωρίς μεταβλητές η σημασία του οποίο είναι το a (δηλαδή κάθε στοιχείο του συνόλου αναφοράς έχει συντακτική αναπαράσταση).

Τότε, με βάση την εν λόγω ερμηνεία, η πρόταση $\forall x\ \phi$ είναι αληθής αν και μόνο αν για κάθε όρο t χωρίς μεταβλητές αληθεύει η πρόταση $\phi_{[x|t]}$, η οποία προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής x με τον όρο t.

Αντίστοιχα, με βάση την εν λόγω ερμηνεία, η πρόταση $\exists x\ \phi$ είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση $\phi_{[x|t]}$ αληθεύει για κάποιον όρο t χωρίς μεταβλητές.

Παράδειγμα

Έστω ότι το σύνολο αναφοράς είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής περιέχει ένα κατηγόρημα p και ένα σύμβολο σταθεράς για κάθε αριθμό (για ευκολία μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία των ψηφίων που περιγράφουν έναν αριθμό στο δεκαδικό σύστημα ως ένα μοναδικό σύμβολο, η ερμηνεία του οποίου είναι ο αντίστοιχος αριθμός).

Τότε η πρόταση $\forall x\ p(x)$ είναι αληθής αν και μόνο αν όλες οι προτάσεις $p(0), p(1), p(2), \ldots, p(1000000), \ldots$ είναι αληθείς.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα

Έστω ότι το σύνολο αναφοράς είναι οι φυσικοί αριθμοί και ότι η γλώσσα της πρωτοβάθμιας λογικής περιέχει ένα κατηγόρημα p, δύο σύμβολα σταθεράς 0 και 1 (με την προφανή ερμηνεία) και τον τελεστή $+$ (επίσης με την προφανή ερμηνεία).

Τότε η πρόταση $\exists x\ p(x)$ είναι αληθής αν και μόνο κάποια από τις προτάσεις $p(0), p(1), p(1+1), p(1+1+1), \ldots$ είναι αληθής.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Σημειώνεται οτι δεν είναι απαραίτητο να έχει κάθε στοιχειο του συνόλου αναφοράς συντακτική αναπαράσταση.

Το πλήθος των όρων που μπορούμε να σχηματίσουμε από ένα αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων είναι επίσης αριθμήσιμο, ενώ αντίθετα το σύνολο αναφοράς ενδέχεται να εχει μεγαλύτερη πληθικότητα (γνωρίζουμε για παράδειγμα ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσμο).

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Ενδέχεται επίσης να μην υπάρχει συντακτική αναπαράσταση όλων των στοιχείων του συνόλου αναφοράς, ακόμη και σε περιπτώσεις που το σύνολο αυτό είναι αριθμήσιμο ή ακόμη και πεπερασμένο. Αυτό για παράδειγμα μπορεί να συμβεί αν η γλώσσα της πρωτοβάθιας λογικής δεν περιέχει κανένα σύμβολο σταθεράς.

Συνεπώς στη γενική περίπτωση είναι αδόκιμο να θεωρήσουμε την πρόταση $\phi_{[x|a]}$ όταν το a είναι ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς (και όχι όρος).

Παρατήρηση 4: Έστω ότι με βάση κάποια ερμηνεία το σύνολο αναφοράς είναι ένα πεπρασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ με n στοιχεία και για κάθε στοιχείο a_i του συνόλου αναφοράς υπάρχει ένας όρος t_i χωρίς μεταβλητές η ερμηνεία του οποίο είναι το a_i.

Τότε, μέ βάση την εν λόγω ερμηνεία η πρόταση $\forall x\ \phi$ είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση $\phi_{[x|t_1]} \wedge \phi_{[x|t_2]} \wedge \cdots \wedge \phi_{[x|t_n]}$ είναι αληθής.

Αντίστοιχα η πρόταση $\exists x\ \phi$ είναι αληθής αν και μόνο αν η πρόταση $\phi_{[x|t_1]} \vee \phi_{[x|t_2]} \vee \cdots \vee \phi_{[x|t_n]}$ είναι αληθής.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\phi_{[x|t_1]} \wedge \phi_{[x|t_2]} \wedge \cdots \wedge \phi_{[x|t_n]}$ δεν είναι λογικά ισοδύναμες και ενδέχεται να έχουν διαφορετική τιμή αλήθειας ακόμη και αν το σύνολο αναφοράς έχει ακριβώς $n > 1$ στοιχεία.

Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για τις προτάσεις και $\exists x\ \phi$ και $\phi_{[x|t_1]} \vee \phi_{[x|t_2]} \vee \cdots \vee \phi_{[x|t_n]}$.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Στη συνέχεια εξετάζουμε ορισμένες λογικές ισοδυναμίες και λογικές συνεπαγωγές που εμπλέκουν ποσοδείκτες.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Άρνηση καθολικής πρότασης. Η πρόταση $\neg\forall x\ \phi$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x\ \neg\phi$.

Πράγματι, έστω μια ερμηνεία των συμβόλων. Τοτε:

η πρόταση $\neg\forall x\ \phi$ είναι αληθής

ανν η πρόταση $\forall x\ \phi$ δεν είναι αληθής

ανν δεν ισχύει ότι η πρόταση ϕ αληθεύει για όλες τις τιμές της x από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση ϕ είναι ψευδής για κάποια τιμή του x από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση $\neg\phi$ είναι αληθής για κάποια τιμή του x από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση $\exists x\ \neg\phi$ είναι αληθής.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Άρνηση υπαρξιακής πρότασης. Η πρόταση $\neg \exists x \; \phi$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x \; \neg \phi$.

Πράγματι

$$\neg \exists x \; \phi \equiv \neg \exists x \; \neg(\neg \phi) \equiv \neg(\neg \forall x \; \neg \phi) \equiv \forall x \; \neg \phi$$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Καθολικός ποσοδείκτης σε σύζευξη δύο προτάσεων. Η πρόταση $\forall x\ (\phi \land \psi)$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x\ \phi \land \forall x\ \psi$.

Πράγματι, έστω μια ερμηνεία των συμβόλων. Τότε

η πρόταση $\forall x\ (\phi \land \psi)$ είναι αληθής

ανν η πρόταση $\phi \land \psi$ είναι αληθής για όλες τις τιμές της x από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση ϕ είναι αληθής για όλες τις τιμές της x από το σύνολο αναφοράς και η πρόταση ψ είναι αληθής για όλες τις τιμές του x από το σύνολο αναφοράς

ανν οι προτάσεις $\forall x\ \phi$ και $\forall x\ \psi$ είναι αληθείς

ανν η πρόταση $\forall x\ \phi \land \forall x\ \psi$ είναι αληθής

Υπαρξιακός ποσοδείκτης σε σύζευξη δύο προτάσεων. Η πρόταση $\exists x\ (\phi \wedge \psi)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x\ \phi \wedge \exists x\ \psi$.

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ως σύνολο αναφοράς τους ακέραιους αριθμούς και ερμηνεύσουμε τα σύμβολα με τον συνήθη τρόπο, τότε η πρόταση $\exists x\ (x > 0 \wedge x < 0)$ δεν είναι αληθής, ενώ η πρόταση $\exists x\ x > 0 \wedge \exists x\ x < 0$ είναι αληθής.

Ωστόσο η πρόταση $\exists x\ \phi \land \exists x\ \psi$ είναι λογική συνέπεια της $\exists x\ (\phi \land \psi)$.

Πράγματι, έστω μια ερμηνεία των συμβόλων. Τότε

η πρόταση $\exists x\ (\phi \land \psi)$ είναι αληθής

$\Rightarrow$ η πρόταση $\phi \land \psi$ είναι αληθής για κάποια τιμή της x από το σύνολο αναφοράς

$\Rightarrow$ η πρόταση ϕ είναι αληθής για κάποια τιμή της x από το σύνολο αναφοράς και η πρόταση ψ είναι αληθής για κάποια τιμή της x από το σύνολο αναφοράς

$\Rightarrow$ οι προτάσεις $\exists x\ \phi$ και $\exists x\ \psi$ είναι αληθείς

$\Rightarrow$ η πρόταση $\exists x\ \phi \land \exists x\ \psi$ είναι αληθής

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Ποσοδείκτης σε διάζευξη δύο προτάσεων. Άσκηση:

Ποια είναι η σχέση των προτάσεων $\forall x\ (\phi \lor \psi)$ και $\forall x\ \phi \lor \forall x\ \psi$ (είναι λογικά ισοδύναμες, συνεπάγεται λογικά κάποια από τις δύο την άλλη);

Ποια είναι η σχέση των προτάσεων $\exists x\ (\phi \lor \psi)$ και $\exists x\ \phi \lor \exists x\ \psi$;

Διαδοχικοί υπαρξιακοί ποσοδείκτες. Η πρόταση $\exists x\ \exists y\ \phi$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists y\ \exists x\ \phi$.

Πράγματι, έστω μια ερμηνεία των συμβόλων. Τότε

η πρόταση $\exists x\ \exists y\ \phi$ είναι αληθής

ανν η πρόταση $\exists y\ \phi$ είναι αληθής για κάποια τιμή της x από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση ϕ είναι αληθής για κάποιες τιμές των x και y από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση $\exists x\ \phi$ είναι αληθής για κάποια τιμή της y από το σύνολο αναφοράς

ανν η πρόταση $\exists y\ \exists x\ \phi$ είναι αληθής

Διαδοχικοί καθολικοί ποσοδείκτες. Η πρόταση $\forall x \; \forall y \; \phi$ είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall y \; \forall x \; \phi$.

Μπορούμε να αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα με παρόμοιο τρόπο όπως για τον υπαρξιακό ποσοδείκτη. Εδώ δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη που χρησιμοποιεί γνωστές λογικές ισοδυναμίες.

$$\begin{aligned}
\forall x \; \forall y \; \phi &\equiv \forall x \; \neg(\neg \forall y \; \phi) \\
&\equiv \neg \exists x \; (\neg \forall y \; \phi) \\
&\equiv \neg \exists x \; \exists y \; \neg \phi \\
&\equiv \neg \exists y \; \exists x \; \neg \phi \\
&\equiv \neg \exists y \; (\neg \forall x \; \phi) \\
&\equiv \forall y \; \neg(\neg \forall x \; \phi) \\
&\equiv \forall y \; \forall x \; \phi
\end{aligned}$$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Διαδοχικοί ποσοδείκτες διαφορετικού είδους. Η πρόταση $\exists x \; \forall y \; \phi$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall y \; \exists x \; \phi$.

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε ως σύνολο αναφοράς τους φυσικούς αριθμούς και ερμηνεύσουμε τα σύμβολα με τον συνήθη τρόπο, τότε η πρόταση $\exists x \; \forall y \; x > y$ δεν είναι αληθής, ενώ η πρόταση $\forall y \; \exists x \; x > y$ είναι αληθής.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Ωστόσο η πρόταση $\forall y\ \exists x\ \phi$ είναι λογική συνέπεια της $\exists x\ \forall y\ \phi$.

Πράγματι, έστω μια ερμηνεία των συμβόλων. Τότε

η πρόταση $\exists x\ \forall y\ \phi$ είναι αληθής

$\Rightarrow$ η πρόταση $\forall y\ \phi$ είναι αληθής για κάποια τιμή a της x από το σύνολο αναφοράς

$\Rightarrow$ η πρόταση ϕ είναι αληθής για κάποια τιμή a της x και για οποιαδήποτε τιμή της y από το σύνολο αναφοράς

$\Rightarrow$ για οποιαδήποτε τιμή της y από το σύνολο αναφοράς η πρόταση ϕ είναι αληθής για κάποια τιμή της x

$\Rightarrow$ για οποιαδήποτε τιμή της y από το σύνολο αναφοράς η πρόταση $\exists x\ \phi$ είναι αληθής

$\Rightarrow$ η πρόταση $\forall y\ \exists x\ \phi$ είναι αληθής

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Διαισθητικά, η διαφορά των δύο προτάσεων είναι ότι στην $\forall y\ \exists x\ \phi$ η επιλογή της τιμής της x μπορεί να είναι διαφορετική για κάθε τιμή της y έτσι ώστε να ικανοποιείται η ϕ, ενώ αντίθετα στην $\exists x\ \forall y\ \phi$ η επιλογή της τιμής της x θα πρέπει να είναι η ίδια για όλες τις τιμές της y.

Ο δεύτερος περιορισμός είναι πιο αυστηρός από το πρώτο και άρα όταν ικανοποιείται ο δεύτερος περιορισμός, τότε ικανοποιείται και ο πρώτος.

Άρνηση πρότασης που περιέχει διαδοχικούς ποσοδείκτες. Έστω μια πρόταση τη μορφής $Q_1 x_1 \; Q_2 x_2 \; \cdots Q_k x_k \; \phi$, όπου $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ είναι ποσοδείκτες ($\forall$ ή $\exists$).

Με βάση τις ισοδυναμίες που έχουμε δείξει για την άρνηση καθολικής και υπαρξιακής πρότασης, η άρνηση $\neg Q_1 x_1 \; Q_2 x_2 \; \cdots Q_k x_k \; \phi$ της παραπάνω πρότασης είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\widehat{Q_1} x_1 \; \widehat{Q_2} x_2 \; \cdots \widehat{Q_k} x_k \; \neg\phi$ όπου

$$\widehat{Q} = \begin{cases} \exists & \text{αν } Q = \forall \\ \forall & \text{αν } Q = \exists \end{cases}$$

Παράδειγμα

Έστω ϕ η λογική πρόταση $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x < z \wedge z < y)$. Τότε
$\neg\phi \equiv \exists x\ \exists y\ \forall z\ \neg(x < z \wedge z < y) \equiv \exists x\ \exists y\ \forall z\ (\neg(x < z) \vee \neg(z < y))$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Υπάρχουν ορισμένες μαθηματικές προτάσεις, οι οποίες χρησιμοποιούν τύπους ποσοδεικτών οι οποίοι δεν περιέχονται στο αλφάβητο της πρωτοβάθμιας λογικής.

Τέτοιου είδους προτάσεις μπορούν να διατυπωθούν στην πρωτοβάθμια λογική με έμμεσο τρόπο.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Ο **ποσοδείκτης μοναδικότητας**. Στα μαθηματικά πολλές φορές διατυπώνονται προτάσεις όπως η παρακάτω:
'*υπάρχει μοναδική τιμή της* x *τέτοια ώστε* $x + x = 0$'.

Η πρόταση αυτή μπορεί να γραφτεί σε συμβολική μορφή με χρήση του ποσοδείκτη μοναδικότητας $\exists!$ (υπάρχει μοναδική τιμή της x):
$\exists! x \; x + x = 0$.

Η σύνταξη της πρωτοβάθμιας λογικής δεν περιλαμβάνει τον ποσοδείκτη $\exists!$, ωστόσο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πρόταση που να είναι ισοδύναμη με την $\exists! x \; \phi$.

Άσκηση: κατασκευάστε μια πρόταση της πρωτοβάθμιας λογικής η οποία να είναι ισοδύναμη με την $\exists! x \; \phi$.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Ποσοδείκτες με περιορισμένο πεδίο ορισμού. Στα μαθηματικά μπορούμε να διατυπώνουμε καθολικές ή υπαρξιακές προτάσεις στις οποίες το σύνολο των τιμών στις οποίες αναφέρεται ο ποσοδείκτης είναι υποσύνολο του συνόλου αναφοράς.

Παραδείγματα τέτοιων προτάσεων δίνονται παρακάτω:

- Για κάθε άρτιο αριθμό x υπάρχει y τέτοιο ώστε $x = 2y$.
- Υπάρχει άρτιος αριθμός x ο οποίος είναι πρώτος αριθμός.
- $\forall x > 0\ (x \cdot x > 0)$
- $\exists x < 0\ (x \cdot x = 2)$
- $\forall x \in P\ \phi$
- $\exists x \in P\ \phi$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Η σύνταξη της πρωτοβάθμιας λογικής δεν υποστηρίζει άμεσα τη χρήση ποσοδείκτη με περιορισμένο πεδίο ορισμού, ωστόσο οι μαθηματικές προτάσεις που περιέχουν τέτοιους ποσοδείκτες μπορούν να αναπαρασταθούν με έμμεσο τρόπο στην πρωτοβάθμια λογική.

Ας θεωρήσουμε πρώτα ότι το περιορισμένο πεδίο ορισμού του ποσοδείκτη προσδιορίζεται από μια πρόταση ϕ της πρωτοβάθμιας λογικής (όπως για παράδειγμα στην πρόταση $\forall x > 0\ (x^2 > 0)$)

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Έστω μια μαθηματική πρόταση της μορφής:
για κάθε x για το οποίο ισχύει η ϕ, ισχύει η ψ.

Στην πρωτοβάθμια λογική η πρόταση αυτή γράφεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\forall x(\phi \rightarrow \psi)$$

Η πρόταση $\forall x(\phi \rightarrow \psi)$ είναι αληθής αν και μόνο αν για οποιαδήποτε τιμή του x από το σύνολο αναφοράς, η συνεπάγωγή $\phi \rightarrow \psi$ είναι αληθής. Συνεπώς για οποιαδήποτε τιμή της x από το σύνολο αναφοράς για την οποία η ϕ αληθεύει θα πρέπει να αληθεύει και η ψ, ενώ για οποιαδήποτε τιμή της x από το σύνολο αναφοράς για την οποία η ϕ δεν αληθεύει, η ψ μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής.

Το τελευταίο αποτελεί πιο αναλυτική διατύπωση της αρχικής μαθηματικής πρότασης.

Για παράδειγμα η πρόταση $\forall x > 0\ (x \cdot x > 0)$ γράφεται
$\forall x\ (x > 0 \rightarrow x \cdot x > 0)$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Έστω τώρα μια μαθηματική πρόταση της μορφής:
υπάρχει x για το οποίο ισχύει η ϕ, τέτοιο ώστε να ισχύει η ψ

Στην πρωτοβάθμια λογική η πρόταση αυτή γράφεται με τον παρακάτω τρόπο:

$$\exists x(\phi \wedge \psi)$$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Η πρόταση $\exists x(\phi \wedge \psi)$ είναι αληθής αν και μόνο αν υπάρχει τιμή του x από το σύνολο αναφοράς, για την οποία η σύζευξη $\phi \wedge \psi$ είναι αληθής. Συνεπώς υπάρχει τιμή του x από το σύνολο αναφοράς για την αληθεύουν και η ϕ και η ψ.

Το τελευταίο αποτελεί επαναδιατύπωση της αρχικής μαθηματικής πρότασης.

Για παράδειγμα η πρόταση $\exists x < 0\ (x \cdot x = 2)$ γράφεται
$\exists x\ (x < 0 \wedge x \cdot x = 2)$

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Αν θέλουμε να περιορίσουμε τις τιμές ενός ποσοδείκτη σε ένα σύνολο P ($\forall x \in P$ ή $\exists x \in P$) τότε θα πρέπει η πρωτοβάθμια γλώσσα να περιέχει ένα σύμβολο κατηγορήματος p με ένα όρισμα, η ερμηνεία του οποίου θα είναι το σύνολο P, έτσι ώστε το $x \in P$ να αναπαρίσταται στις προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογική από την πρόταση $p(x)$.

Με βάση την παραπάνω παραδοχή η πρόταση $\forall x \in P\ \phi$ γράφεται $\forall x\ (p(x) \rightarrow \phi)$ και η πρόταση $\exists x \in P\ \phi$ γράφεται $\exists x\ (p(x) \wedge \phi)$.