Διακριτά Μαθηματικά II

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Οι συναρτήσεις που εμπλέκονται στους παρακάτω ορισμούς έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Ορισμός

Έστω g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$O(g) = \{f \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Διαισθητικά, $f \in O(g)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ασυμπτωτικά όχι γρηγορότερα από την g.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο αλγόριθμους για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος και οι χρόνοι εκτέλεσης τους είναι αντίστοιχα $f(n)$ και $g(n)$, όπου $f \in O(g)$. Με βάση τον ορισμό του O θα πρέπει να υπάρχουν σταθερές c και n_0 τέτοιες ώστε $f(n) \leq c \cdot g(n)$, για $n \geq n_0$.

Αν τρέξουμε τον πρώτο αλγόριθμο σε έναν υπολογιστή A και τον δεύτερο αλγόριθμο σε έναν υπολογιστή B ο οποίος είναι c φορές πιο αργός από τον A, τότε ο πρώτος αλγόριθμος θα τερματίζει γρηγορότερα από το δεύτερο για όλες τις εισόδους που είναι αρκετά μεγάλες (έχουν μέγεθος τουλάχιστον n_0).

Φυσικά αυτό ενδέχεται να μην ισχύει αν οι δύο αλγόριθμοι τρέχουν σε υπολογιστές ίδιας ταχύτητας.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(n) = 10n + 5$ ανήκει στο $O(n)$: για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $0 \leq 10n + 5 \leq 15n$ (επιλέξαμε $n_0 = 1$ και $c = 15$).

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(n) = 4n^2$ ανήκει στο $O(n^5)$: για κάθε $n \geq 0$, ισχύει $0 \leq 4n^2 \leq 4n^5$ (επιλέξαμε $n_0 = 0$ και $c = 4$).

Παράδειγμα

Γενικότερα αν $k, m \in \mathbb{N}$, με $k \leq m$ και $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^+$ τότε
$a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot n + a_0 \in O(n^m)$

Πράγματι $a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot n + a_0 \leq (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \cdot n^k \leq (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0) \cdot n^m$, για κάθε $n \geq 1$.

Επιλέγουμε $c = a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0$ και $n_0 = 1$.

Παράδειγμα

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $n^k \in O(2^n)$

Πράγματι για κάθε $n \geq 1$

$$\begin{aligned} n^k &< (n+1) \cdot (n+2) \cdots (n+k) \\ &= \frac{(n+k)!}{n!} \\ &= k! \cdot C(n+k, k) \\ &\leq k! \cdot 2^{n+k} \\ &= (k! \cdot 2^k) \cdot 2^n \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $c = k! \cdot 2^k$ και $n_0 = 1$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ορισμός

Έστω g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0,\ c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

Διαισθητικά, $f \in \Omega(g)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ασυμπτωτικά όχι πιο αργά από την g.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $g(n) = n^5$ ανήκει στο $\Omega(4n^2)$: για κάθε $n \geq 0$, ισχύει $0 \leq \frac{1}{4} \cdot 4n^2 = n^2 \leq n^5$ (επιλέξαμε $n_0 = 0$ και $c = \frac{1}{4}$).

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Είδαμε ότι $n^5 \in \Omega(4n^2)$ και $4n^2 \in O(n^5)$. Αυτό δεν είναι συμπτωματικό:

Θεώρημα

$f \in O(g)$ αν και μόνο αν $g \in \Omega(f)$.

Απόδειξη

Αν $f \in O(g)$ τότε υπάρχουν $\exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1 \in \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$.

Αν επιλέξουμε $c_2 = \frac{1}{c_1}$ τότε για κάθε $n \geq n_0,\ 0 \leq c_2 f(n) \leq g(n)$ που συνεπάγεται ότι $g \in \Omega(f)$.

Η άλλη κατεύθυνση είναι πανομοιότυπη.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ορισμός

Έστω g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0,\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$$

Διαισθητικά, $f \in \Theta(g)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ασυμπτωτικά το ίδιο γρήγορα με την g.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Παράδειγμα

Έστω ένας αλγόριθμος ο οποίος αποτελείται από μία ακολουθία στοιχειωδών βημάτων, όπου για το καθένα υποθέτουμε ότι μπορεί να υλοποιηθεί σε σταθερό χρόνο.

Έστω μία υλοποίηση του αλγορίθμου, στην οποία ο χρόνος στη χειρότερη περίπτωση είναι $T(n)$.

Συμβολίζουμε το πλήθος των βημάτων του αλγορίθμου στη χειρότερη περίπτωση με $F(n)$. Σημειώνεται ότι το $F(n)$ αντιστοιχεί στο χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου όταν απαιτείται μία μονάδα χρόνου για κάθε βήμα.

Θα δείξουμε ότι $T(n) = \Theta(F(n))$. Αυτό σημαίνει ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της πολυπλοκότητας είναι ανεξάρτητη από τους χρόνους των επιμέρους βημάτων και εξαρτάται μόνο από το πλήθος τους.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Απόδειξη του ισχυρισμού: έστω μία τιμή του n, x ένα στιγμιότυπο μεγέθους n που απαιτεί χρόνο $T(n)$ και y ένα στιγμιότυπο μεγέθους n που απαιτεί $F(n)$ βήματα. Τα x και y είναι τα χειρότερα στιγμιότυπα από άποψη χρόνου και βημάτων αντίστοιχα (τα οποία δεν είναι απαραίτητο να ταυτίζονται).

Έστω ότι ο αλγόριθμος συνίσταται από m διαφορετικούς τύπους βημάτων με αντίστοιχα κόστη $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Συμβολίζουμε με k_i, ℓ_i τα βήματα τύπου i που εκτελεί ο αλγόριθμος για τα στιγμιότυπα x και y αντίστοιχα. Συμβολίζουμε επίσης με c_{max} και c_{min} το μέγιστο και το ελάχιστο ανάμεσα στα κόστη c_i.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Επειδή το x μεγιστοποιεί το χρόνο εκτέλεσης ισχύει

$$\sum_{i=1}^{m} \ell_i \cdot c_i \leq \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot c_i = T(n)$$

Επειδή το y μεγιστοποιεί το πλήθος βημάτων ισχύει

$$\sum_{i=1}^{m} k_i \leq \sum_{i=1}^{m} \ell_i = F(n)$$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Έχουμε:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot c_i \leq \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot c_{max} \leq c_{max} \cdot \sum_{i=1}^{m} k_i \leq c_{max} \cdot \sum_{i=1}^{m} \ell_i = c_{max} \cdot F(n)$$

και

$$T(n) = \sum_{i=1}^{m} k_i \cdot c_i \geq \sum_{i=1}^{m} \ell_i \cdot c_i \geq \sum_{i=1}^{m} \ell_i \cdot c_{min} \geq c_{min} \cdot \sum_{i=1}^{m} \ell_i = c_{min} \cdot F(n)$$

Συνεπώς για κάθε n ισχύει $c_{min} \cdot F(n) \leq T(n) \leq c_{max} \cdot F(n)$, που συνεπάγεται $T(n) = \Theta(F(n))$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(n) = 10n + 5$ ανήκει στο $\Theta(n)$: για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $n \leq 10n + 5 \leq 15n$ (επιλέξαμε $n_0 = 1$, $c_1 = 1$ και $c_2 = 15$).

Παράδειγμα

Αν $g(n) = 1$, τότε το σύνολο $\Theta(g)$, το οποίο συμβολίζεται και $\Theta(1)$, περιλαμβάνει τις συναρτήσεις που η τιμή τους κυμαίνεται ανάμεσα σε δύο σταθερές c_1 και c_2, για $n \geq n_0$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Το παρακάτω θεώρημα είναι άμεση συνέπεια των ορισμών:

Θεώρημα

Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- $f \in \Theta(g)$.
- $g \in \Theta(f)$.
- $g \in O(f)$ και $g \in \Omega(f)$.
- $f \in O(g)$ και $f \in \Omega(g)$.
- $f \in O(g)$ και $g \in O(f)$.
- $f \in \Omega(g)$ και $g \in \Omega(f)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Αν αναλογιστούμε ότι οι τελεστές O, Ω και Θ ‵συγκρίνουν′ την ασυμπτωτική τάξη των συναρτήσεων τότε, το προηγούμενο θεώρημα αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι οι πρακάτω προτάσεις που εμπλέκουν τους τελεστές σύγκρισης είναι ισοδύναμες:

- $x = y$.
- $y = x$.
- $y \leq x$ και $y \geq x$.
- $x \leq y$ και $x \geq y$.
- $x \leq y$ και $y \leq x$.
- $x \geq y$ και $y \geq x$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Συνήθως αντί να γράφουμε $f(n) \in O(g(n))$, (όπου στη θέση του O μπορεί να βρίσκεται κάποιος από τους τελεστές Ω και Θ), γράφουμε $f(n) = O(g(n))$.

Επίσης χρησιμοποιούμε τον ασυμπτωτικό συμβολισμό μέσα σε παραστάσεις, π.χ. $n^2 + \Theta(n \log n)$. Η παραπάνω παράσταση ερμηνεύται ώς το $n^2 + f(n)$, όπου $f(n)$ κάποια συνάρτηση από το σύνολο $\Theta(n \log n)$. Αυτό διευκολύνει στην περίπτωση που ο ακριβής προσδιορισμός της $f(n)$ δεν είναι αναγκαίος.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ορισμός

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

- συμβολίζουμε με $f + g$ είναι τη συνάρτηση με $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$.
- συμβολίζουμε με $f \cdot g$ είναι τη συνάρτηση με $(f \cdot g)(n) = f(n) \cdot g(n)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Τα παρακάτω θεωρήματα χρησιμοποιούνται κατά κόρο στην ανάλυση αλγορίθμων.

Θεώρημα

- Αν $f, g \in \Theta(h)$ τότε $f + g \in \Theta(h)$
- Αν $f, g \in O(h)$ τότε $f + g \in O(h)$
- Αν $f \in \Theta(h)$ και $g \in O(h)$ τότε $f + g \in \Theta(h)$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε την τρίτη πρόταση. Οι άλλες δύο αποδεικνύονται ανάλογα.

Έστω ότι $f \in \Theta(h)$ και $g \in O(h)$. Από την πρώτη υπόθεση υπάρχουν $n_1 \geq 0, d_1 > 0, d_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_1$

$$d_1 \cdot h(n) \leq f(n) \leq d_2 \cdot h(n)$$

Από την δεύτερη υπόθεση υπάρχουν $n_2 \geq 0, c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$0 \leq g(n) \leq c \cdot h(n)$$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Αν αθροίσουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη, προκύπτει ότι για κάθε $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$d_1 \cdot h(n) \leq f(n) + g(n) \leq (d_2 + c) \cdot h(n)$$

Θέτοντας $c_1 = d_1$, $c_2 = (d_2 + c)$ και $n_0 = \max(n_1, n_2)$, προκύπτει άμεσα ότι $f + g \in \Theta(h)$. $\square$

Θεώρημα

- Αν $f \in \Theta(h)$ και $g \in \Theta(q)$ τότε $f \cdot g \in \Theta(h \cdot q)$.
- Αν $f \in O(h)$ και $g \in O(q)$ τότε $f(n) \cdot g(n) \in O(h \cdot q)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε την πρώτη πρόταση. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη.

Έστω ότι $f \in \Theta(h)$ και $g \in \Theta(q)$. Από την πρώτη υπόθεση υπάρχουν $n_1 \geq 0, d_1 > 0, d_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_1$

$$d_1 \cdot h(n) \leq f(n) \leq d_2 \cdot h(n)$$

Από την δεύτερη υπόθεση υπάρχουν $n_2 \geq 0, e_1 > 0, e_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geq n_2$

$$e_1 \cdot q(n) \leq g(n) \leq e_2 \cdot q(n)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις δύο ανισότητες κατά μέλη, προκύπτει ότι για κάθε $n \geq \max(n_1, n_2)$

$$d_1 \cdot e_1 \cdot h(n) \cdot q(n) \leq f(n) \cdot g(n) \leq d_2 \cdot e_2 \cdot h(n) \cdot q(n)$$

Θέτοντας $c_1 = d_1 \cdot e_1$, $c_2 = d_2 \cdot e_2$ και $n_0 = \max(n_1, n_2)$, προκύπτει άμεσα ότι $f \cdot g \in \Theta(h \cdot q)$. □

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Με βάση τα παραπάνω θεωρήματα μπορούμε να έχουμε ισότητες όπως οι παρακάτω, ανάμεσα σε παραστάσεις που περιέχουν ασυμπτωτικό συμβολισμό:

- $O(n^2) + O(n^2) = O(n^2)$
- $\Theta(n^3) + O(n^3) = \Theta(n^3)$
- $n^2 \cdot \Theta(n^3) = \Theta(n^5)$
- $n \cdot O(n^2) = O(n^3)$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ορισμός

Έστω g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$o(g) = \{f \mid \forall c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)\}$$

Ισοδύναμα, $f \in o(g)$ αν και μόνο αν:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Διαισθητικά, $f \in o(g)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ασυμπτωτικά πιο αργά από την g (έτσι ώστε καμία πολλαπλασιαστική σταθερά δεν αρκεί για να αντισταθμίσει τη διαφορά όταν το n μεγαλώσει αρκετά).

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο αλγόριθμους για την επίλυση ενός υπολογιστικού προβλήματος και οι χρόνοι εκτέλεσης τους είναι αντίστοιχα $f(n)$ και $g(n)$, όπου $f \in o(g)$. Με βάση τον ορισμό του o θα πρέπει για κάθε θετική σταθερά c να υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $f(n) < c \cdot g(n)$, για $n \geq n_0$.

Αν επιλέξουμε ένα k οσοδήποτε μεγάλο και τρέξουμε τον πρώτο αλγόριθμο σε έναν υπολογιστή A και τον δεύτερο αλγόριθμο σε έναν υπολογιστή B ο οποίος είναι k φορές πιο γρήγορος από τον A, τότε ο πρώτος αλγόριθμος θα τερματίζει γρηγορότερα από το δεύτερο για όλες τις εισόδους που είναι αρκετά μεγάλες (έχουν μέγεθος τουλάχιστον n_0, το οποίο εξαρτάται από το k).

Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει εφαρμόζοντας τη συνθήκη στον ορισμό του o για $c = 1/k$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(n) = n$ ανήκει στο $o(n^2)$: για κάθε σταθερά $c > 0$, έχουμε

$$n < c \cdot n^2 \Leftrightarrow n < (c \cdot n) \cdot n \Leftrightarrow 1 < c \cdot n \Leftrightarrow n > \frac{1}{c}$$

Άρα για οποιαδήποτε σταθερά $c > 0$, αν επιλέξουμε $n_0 = \lceil \frac{1}{c} \rceil$, ισχύει $n < c \cdot n^2$ για κάθε $n \geq n_0$.

Γενικότερα, με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι για κάθε k, m με $0 \leq k < m$ ισχύει $n^k \in o(n^m)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Ορισμός

Έστω g συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Ορίζουμε

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \ c \cdot g(n) < f(n)\}$$

Ισοδύναμα, $f \in \omega(g)$ αν και μόνο αν:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Διαισθητικά, $f \in \omega(g)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f αυξάνεται ασυμπτωτικά πιο γρήγορα από την g (έτσι ώστε καμία πολλαπλασιαστική σταθερά δεν αρκεί για να αντισταθμίσει τη διαφορά όταν το n μεγαλώσει αρκετά).

Τα παρακάτω θεώρημα δείχνει τη σχέση μεταξύ των τελεστών o και ω

Θεώρημα

$f \in o(g)$ αν και μόνο αν $g \in \omega(f)$.

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε την μία κατεύθυνση. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η αντίστροφη.

Έστω ότι $f \in o(g)$. Άρα για κάθε $d > 0$, υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 \leq f(n) < d \cdot g(n).$$

Έστω τώρα τυχαία σταθερά $c > 0$. Τότε για $d = \frac{1}{c}$ υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 \leq f(n) < \frac{1}{c} \cdot g(n).$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$0 \leq c \cdot f(n) < g(n)$$

που συνεπάγεται ότι $g \in \omega(f)$.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Το παρακάτω θεώρημα αντιστοιχεί στη μεταβατική ιδιότητα των τελεστών σύγκρισης.

Θεώρημα

- Αν $f \in O(g)$ και $g \in O(h)$ τότε $f \in O(h)$
- Αν $f \in o(g)$ και $g \in o(h)$ τότε $f \in o(h)$
- Αν $f \in O(g)$ και $g \in o(h)$ τότε $f \in o(h)$
- Αν $f \in o(g)$ και $g \in O(h)$ τότε $f \in o(h)$

Απόδειξη

Αποδεικνύουμε την τελευταία πρόταση.

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Έστω ότι $f \in o(g)$. Άρα για κάθε $d > 0$, υπάρχει ένα $n_1 \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$,

$$0 \leq f(n) < d \cdot g(n).$$

Έστω επίσης ότι $g \in O(h)$. Άρα υπάρχει $e > 0$ και $n_2 \geq 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_2$,

$$0 \leq g(n) \leq e \cdot h(n).$$

Έστω τώρα τυχαία σταθερά $c > 0$. Τότε για $d = \frac{c}{e}$ υπάρχει ένα n_1 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_1$,

$$0 \leq f(n) < \frac{c}{e} \cdot g(n).$$

Ασυμπτωτικός Συμβολισμός

Αν επιπλέον $n \geq n_2$, τότε συνδυάζοντας τις ανισότητες έχουμε

$$0 \leq f(n) < \frac{c}{e} \cdot e \cdot h(n) = c \cdot h(n).$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Παράδειγμα

Έχουμε δείξει ότι $n^k \in o(n^{k+1})$ και ότι $n^{k+1} \in O(2^n)$. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει $n^k \in o(2^n)$.

Περιεχόμενα

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Οι αλγόριθμοι οι οποίοι είναι σχεδιασμένοι με την τεχνική 'Διαίρει και Βασίλευε' χωρίζουν την είσοδό τους, η οποία έχει μέγεθος n, σε μικρότερα τμήματα, τα οποία επεξεργάζονται αναδρομικά και στη συνέχεια συνδυάζουν τα επί μέρους αποτελέσματα ώστε να σχηματίσουν το τελικό αποτέλεσμα που θα επιστρέψουν.

Η αναδρομή σταματάει όταν η είσοδος γίνει αρκετά μικρή, για παράδειγμα όταν $n = 1$.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Στις περισσότερες περιπτώσεις όλα τμήματα στα οποία χωρίζεται η είσοδος έχουν μέγεθος περίπου $\frac{n}{b}$ για κάποια σταθερά $b > 1$. Πιο συγκεκριμένα κάποια τμήματα έχουν μέγεθος $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ και κάποια άλλα $\lceil \frac{n}{b} \rceil$.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Αν το b είναι ακέραιος και διαιρεί το n, τότε όλα τα τμήματα έχουν μέγεθος $\frac{n}{b}$.

Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου ως συνάρτηση του μεγέθους της εισόδου ικανοποιεί μία η αναδρομική εξίσωση της μορφης::

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n) & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου a είναι το πλήθος των τμημάτων μεγέθους $\frac{n}{b}$ για τα οποία γίνεται αναδρομική κλήση και $f(n)$ είναι ο χρόνος που απαιτείται για να χωριστεί η είσοδος και να συνδυαστούν τα επί μέρους αποτελέσματα.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Αν επιπλέον υποθέσουμε για απλούστευση ότι το n είναι δύναμη του b, τότε εφαρμόζοντας επαναληπτικά την αναδρομική εξίσωση έχουμε:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&= a \cdot (a \cdot T(\frac{n}{b^2}) + f(\frac{n}{b})) + f(n) \\
&= a^2 \cdot T(\frac{n}{b^2}) + a \cdot f(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&= a^3 \cdot T(\frac{n}{b^3}) + a^2 \cdot f(\frac{n}{b^2}) + a \cdot f(\frac{n}{b}) + f(n) \\
&= \ldots \\
&= a^i \cdot T(\frac{n}{b^i}) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j \cdot f(\frac{n}{b^j})
\end{aligned}
$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Για $i = \log_b n$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}
T(n) &= a^{\log_b n} \cdot T\left(\frac{n}{b^{\log_b n}}\right) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\
T(n) &= a^{\log_b n} \cdot T\left(\frac{n}{n}\right) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\
T(n) &= a^{\log_b n} \cdot T(1) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right) \\
T(n) &= a^{\log_b n} + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \cdot f\left(\frac{n}{b^j}\right)
\end{aligned}$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να αποτιμήσουμε το $T(n)$ είναι με χρήση του δέντρου αναδρομής:

- Κάθε κόμβος του δέντρου αντιστοιχεί σε μία κλήση του αλγόριθμου.
- Η ρίζα αντιστοιχεί στην αρχική κλήση του αλγορίθμου για την είσοδο μεγέθους n
- Τα παιδιά κάθε κόμβου αντιστοιχούν στις αναδρομικές κλήσεις του αλγορίθμου που προκαλούνται από την κλήση που αντιστοιχεί στον κόμβο αυτό.

Ένα επίπεδο του δέντρου συνίσταται από όλους τους κόμβους που έχουν την ίδια απόσταση από τη ρίζα. Οι είσοδοι σε όλες τις κλήσεις που αντιστοιχούν σε κόμβους του ίδιου επιπέδου έχουν το ίδιο μέγεθος.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Μπορούμε να υπολογίσουμε το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου, υπολογίζοντας το χρόνο που απαιτούν οι κλήσεις του κάθε επιπέδου και αθροίζοντας για όλα τα επίπεδα του δέντρου αναδρομής.

Η μέθοδος αυτή φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + n & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Σχηματίζουμε το δέντρο της αναδρομής:

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + n & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

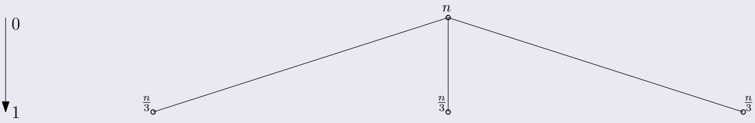
όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Σχηματίζουμε το δέντρο της αναδρομής:

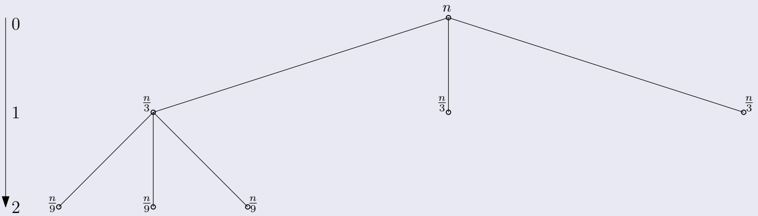
Παράδειγμα (συνέχεια)

0 n

Παράδειγμα (συνέχεια)

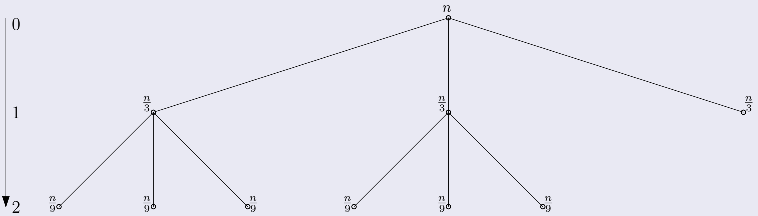


Παράδειγμα (συνέχεια)



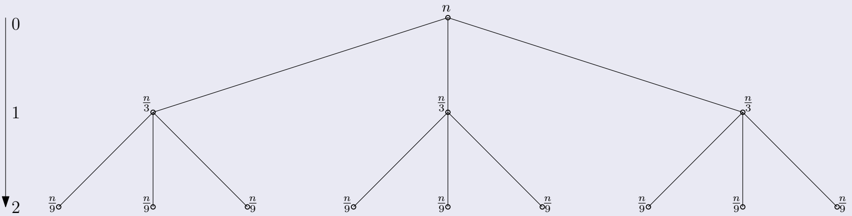
Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)



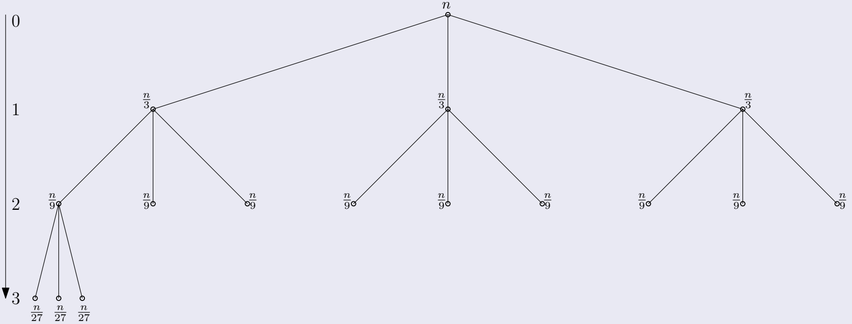
Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)



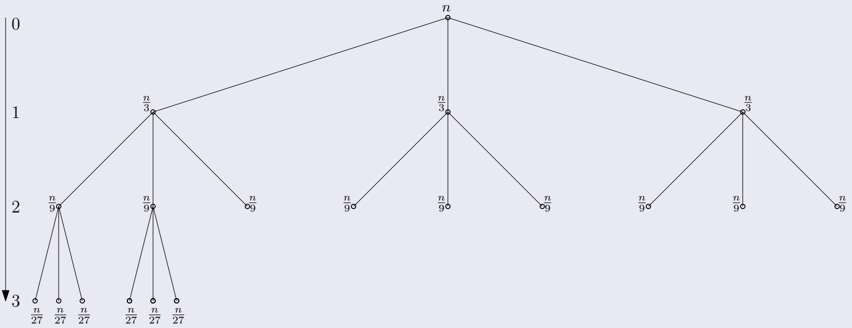
Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

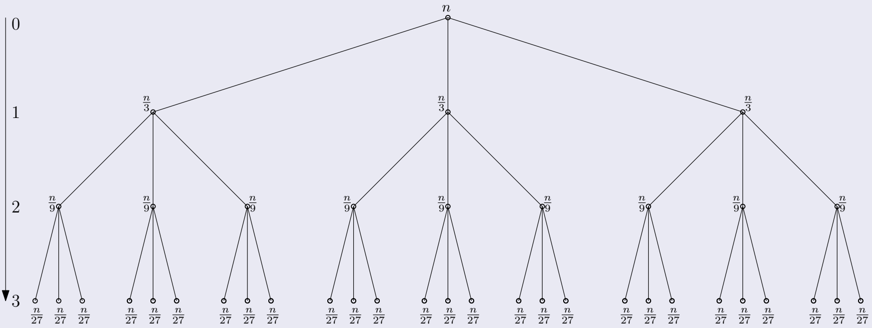


Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

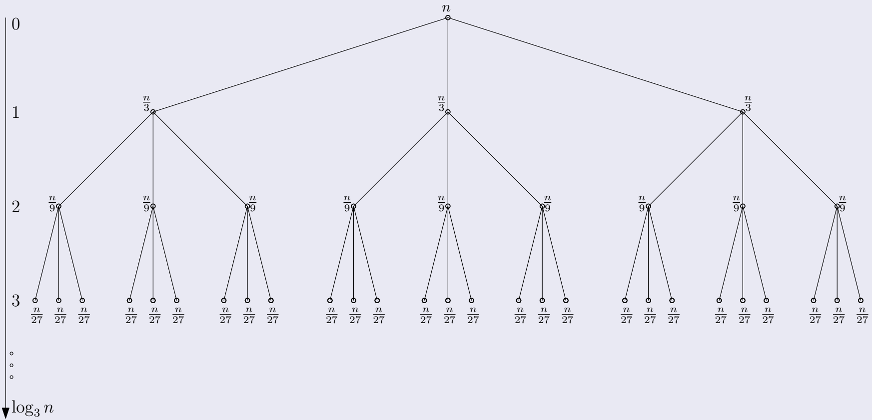


Παράδειγμα (συνέχεια)



Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
...				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
...				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
...				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
...				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
...				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
...				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
...				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
...				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
...				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
...				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
$\dots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
$\dots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	3	$\frac{n}{3}$	$\frac{n}{3}$	n
2	9	$\frac{n}{9}$	$\frac{n}{9}$	n
3	27	$\frac{n}{27}$	$\frac{n}{27}$	n
$\dots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\frac{n}{3^i}$	n
$\dots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = (\log_3 n + 1) \cdot n = \Theta(n \log n)$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^3 & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Σχηματίζουμε το δέντρο της αναδρομής:

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + n^3 & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

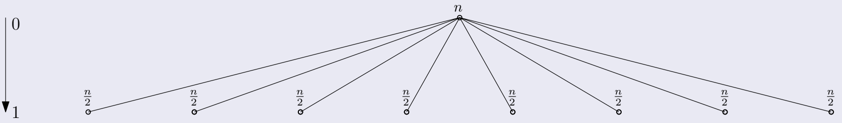
Σχηματίζουμε το δέντρο της αναδρομής:

Παράδειγμα (συνέχεια)

0

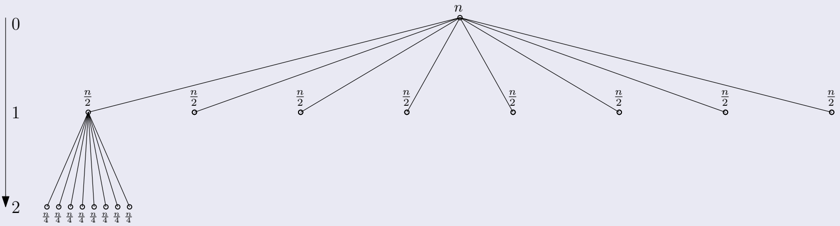
n

Παράδειγμα (συνέχεια)

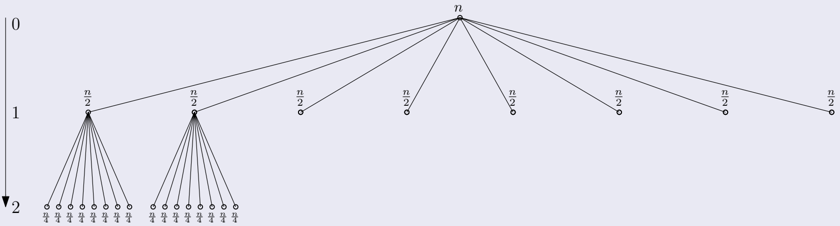


Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

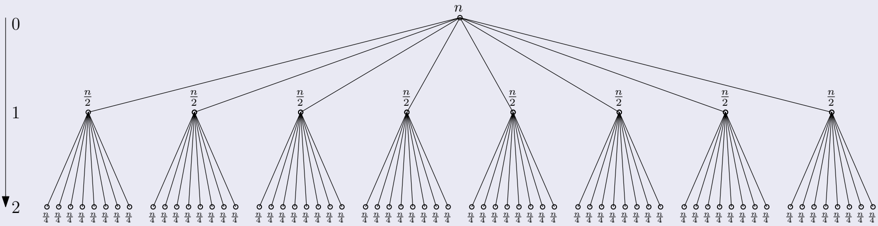
Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

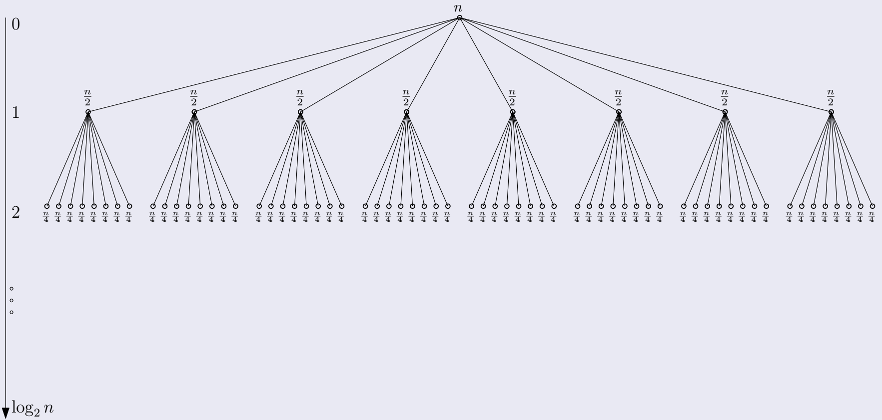


Παράδειγμα (συνέχεια)



Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
$\ldots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\left(\frac{n}{2^i}\right)^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
$\ldots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
$\ldots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\left(\frac{n}{2^i}\right)^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
$\ldots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$(\frac{n}{2})^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$(\frac{n}{4})^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$(\frac{n}{8})^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
...				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$(\frac{n}{2^i})^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
...				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
$\ldots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\left(\frac{n}{2^i}\right)^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
$\ldots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηµάτα ανά στιγµιότυπο	Βήµατα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$(\frac{n}{2})^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$(\frac{n}{4})^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$(\frac{n}{8})^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
...				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$(\frac{n}{2^i})^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
...				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$(\frac{n}{2})^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$(\frac{n}{4})^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$(\frac{n}{8})^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
...				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$(\frac{n}{2^i})^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
...				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^3	n^3
1	8	$\frac{n}{2}$	$\left(\frac{n}{2}\right)^3 = \frac{n^3}{8}$	n^3
2	64	$\frac{n}{4}$	$\left(\frac{n}{4}\right)^3 = \frac{n^3}{64}$	n^3
3	512	$\frac{n}{8}$	$\left(\frac{n}{8}\right)^3 = \frac{n^3}{512}$	n^3
$\ldots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\left(\frac{n}{2^i}\right)^3 = \frac{n^3}{2^{3i}} = \frac{n^3}{8^i}$	n^3
$\ldots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = (\log_2 n + 1) \cdot n^3 = \Theta(n^3 \log n)$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2 & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Το δέντρο της αναδρομής είναι το ίδιο με αυτό του πρώτου παραδείγματος, ωστόσο το πλήθος βημάτων σε κάθε επίπεδο διαφέρει:

Παράδειγμα

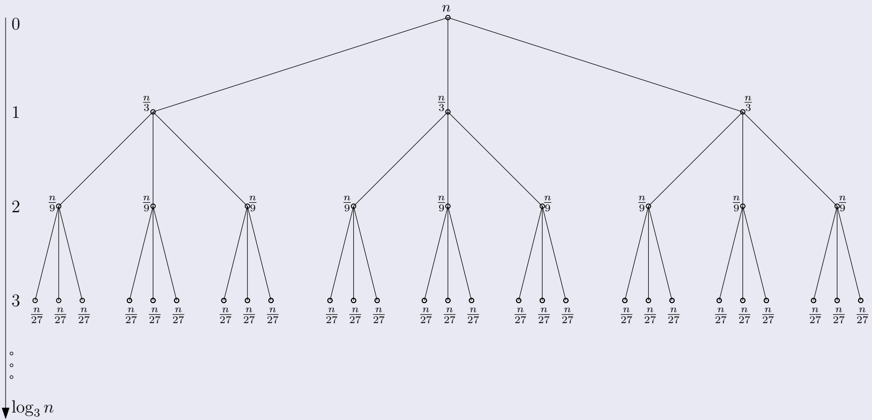
Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3 \cdot T(\frac{n}{3}) + n^2 & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Το δέντρο της αναδρομής είναι το ίδιο με αυτό του πρώτου παραδείγματος, ωστόσο το πλήθος βημάτων σε κάθε επίπεδο διαφέρει:

Παράδειγμα (συνέχεια)



Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$\left(\frac{n}{9}\right)^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$\left(\frac{n}{27}\right)^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\ldots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\left(\frac{n}{3^i}\right)^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\ldots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματά ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$\left(\frac{n}{9}\right)^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$\left(\frac{n}{27}\right)^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\dots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\left(\frac{n}{3^i}\right)^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\dots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηµάτα ανά στιγµιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$\left(\frac{n}{9}\right)^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$\left(\frac{n}{27}\right)^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\dots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\left(\frac{n}{3^i}\right)^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\dots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$\left(\frac{n}{9}\right)^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$\left(\frac{n}{27}\right)^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\dots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\left(\frac{n}{3^i}\right)^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\dots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$(\frac{n}{3})^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$(\frac{n}{9})^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$(\frac{n}{27})^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\ldots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$(\frac{n}{3^i})^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\ldots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$\left(\frac{n}{3}\right)^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$\left(\frac{n}{9}\right)^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$\left(\frac{n}{27}\right)^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\ldots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$\left(\frac{n}{3^i}\right)^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\ldots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^2	n^2
1	3	$\frac{n}{3}$	$(\frac{n}{3})^2 = \frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}$
2	9	$\frac{n}{9}$	$(\frac{n}{9})^2 = \frac{n^2}{81}$	$\frac{n^2}{9}$
3	27	$\frac{n}{27}$	$(\frac{n}{27})^2 = \frac{n^2}{729}$	$\frac{n^2}{27}$
$\ldots$				
i	3^i	$\frac{n}{3^i}$	$(\frac{n}{3^i})^2 = \frac{n^2}{3^{2i}} = \frac{n^2}{9^i}$	$\frac{n^2}{3^i}$
$\ldots$				
$\log_3 n$	$3^{\log_3 n} = n$	$\frac{n}{3^{\log_3 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = n^2 \cdot \sum_{i=0}^{log_3 n-1} (\frac{1}{3})^i + n$$

Άρα

$$T(n) \geq n^2$$

και

$$T(n) \leq n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i + n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot n^2 + n = \frac{3}{2} \cdot n^2 + n \leq 3 \cdot n^2$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = n^2 \cdot \sum_{i=0}^{log_3 n-1} (\frac{1}{3})^i + n$$

Άρα

$$T(n) \geq n^2$$

και

$$T(n) \leq n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i + n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot n^2 + n = \frac{3}{2} \cdot n^2 + n \leq 3 \cdot n^2$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = n^2 \cdot \sum_{i=0}^{log_3 n-1} (\frac{1}{3})^i + n$$

Άρα

$$T(n) \geq n^2$$

και

$$T(n) \leq n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i + n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot n^2 + n = \frac{3}{2} \cdot n^2 + n \leq 3 \cdot n^2$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$T(n) = n^2 \cdot \sum_{i=0}^{log_3 n - 1} (\frac{1}{3})^i + n$$

Άρα

$$T(n) \geq n^2$$

και

$$T(n) \leq n^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i + n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \cdot n^2 + n = \frac{3}{2} \cdot n^2 + n \leq 3 \cdot n^2$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^2)$.

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + n & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Το δέντρο της αναδρομής είναι το ίδιο με αυτό του δεύτερου παραδείγματος, ωστόσο το πλήθος βημάτων σε κάθε επίπεδο διαφέρει:

Παράδειγμα

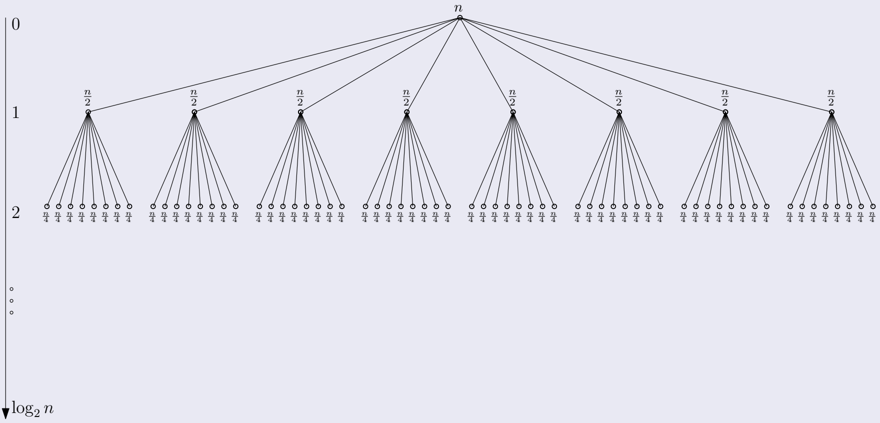
Έστω η αναδρομική εξίσωση:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8 \cdot T(\frac{n}{2}) + n & \text{αν } n > 1 \end{cases}$$

όπου $T(n)$ το πλήθος βημάτων που εκτελεί ένας αναδρομικός αλγόριθμος για είσοδο μεγέθους n.

Το δέντρο της αναδρομής είναι το ίδιο με αυτό του δεύτερου παραδείγματος, ωστόσο το πλήθος βημάτων σε κάθε επίπεδο διαφέρει:

Παράδειγμα (συνέχεια)



Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
...				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
...				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3 \log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
$\dots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
$\dots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
$\dots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
$\dots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
$\dots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
$\dots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
...				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
...				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
$\dots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
$\dots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βηματά ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n	n
1	8	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$4n$
2	64	$\frac{n}{4}$	$\frac{n}{4}$	$16n$
3	512	$\frac{n}{8}$	$\frac{n}{8}$	$64n$
$\ldots$				
i	8^i	$\frac{n}{2^i}$	$\frac{n}{2^i}$	$4^i n$
$\ldots$				
$\log_2 n$	$8^{\log_2 n} = 2^{3\log_2 n} = 2^{\log_2 n^3} = n^3$	$\frac{n}{2^{\log_2 n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	n^3

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$\begin{aligned} T(n) &= n \cdot \sum_{i=0}^{log_2 n-1} 4^i + n^3 \\ &= n \cdot \frac{4^{log_2 n}-1}{4-1} + n^3 \\ &= n \cdot \frac{n^{log_2 4}-1}{3} + n^3 \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n^3 \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$\begin{aligned} T(n) &= n \cdot \sum_{i=0}^{log_2 n-1} 4^i + n^3 \\ &= n \cdot \frac{4^{log_2 n}-1}{4-1} + n^3 \\ &= n \cdot \frac{n^{log_2 4}-1}{3} + n^3 \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n^3 \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$\begin{aligned} T(n) &= n \cdot \sum_{i=0}^{log_2 n-1} 4^i + n^3 \\ &= n \cdot \frac{4^{log_2 n}-1}{4-1} + n^3 \\ &= n \cdot \frac{n^{log_2 4}-1}{3} + n^3 \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n^3 \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$\begin{aligned}
T(n) &= n \cdot \sum_{i=0}^{log_2 n-1} 4^i + n^3 \\
&= n \cdot \frac{4^{log_2 n}-1}{4-1} + n^3 \\
&= n \cdot \frac{n^{log_2 4}-1}{3} + n^3 \\
&= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n^3 \\
&= \Theta(n^3)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αθροίζοντας τα συνολικά βήματα για κάθε επίπεδο έχουμε:

$$\begin{aligned} T(n) &= n \cdot \sum_{i=0}^{log_2 n-1} 4^i + n^3 \\ &= n \cdot \frac{4^{log_2 n}-1}{4-1} + n^3 \\ &= n \cdot \frac{n^{log_2 4}-1}{3} + n^3 \\ &= \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + n^3 \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση, για την επίλυση αναδρομικών εξισώσεων παρόμοιων με αυτές των προηγούμενων παραδειγμάτων, μπορούμε να εφαρμόσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα (Κυριαρχίας)

Έστω η αναδρομική εξίσωση $T(n) = a \cdot T(\frac{n}{b}) + f(n)$, όπου $a \geq 1$ και $b > 1$ σταθερές και $f(n)$ ασυμπτωτικά θετική συνάρτηση.

1. Αν $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Αν $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, τότε $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
3. Αν $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, για κάποια σταθερά $\epsilon > 0$ και υπάρχουν σταθερές n_0 και $c < 1$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geq n_0$, $af(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$, τότε $T(n) = \Theta(f(n))$.

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βήματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$\left(\frac{n}{b}\right)^d = \frac{n^d}{b^d}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$\left(\frac{n}{b^2}\right)^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^2 \cdot n^d$
$\ldots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$\left(\frac{n}{b^i}\right)^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^i \cdot n^d$
$\ldots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βήματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$\left(\frac{n}{b}\right)^d = \frac{n^d}{b^d}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$\left(\frac{n}{b^2}\right)^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^2 \cdot n^d$
$\ldots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$\left(\frac{n}{b^i}\right)^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^i \cdot n^d$
$\ldots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βημάτα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$(\frac{n}{b})^d = \frac{n^d}{b^d}$	$(\frac{a}{b^d}) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$(\frac{n}{b^2})^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$(\frac{a}{b^d})^2 \cdot n^d$
$\ldots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$(\frac{n}{b^i})^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$(\frac{a}{b^d})^i \cdot n^d$
$\ldots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βήματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$\left(\frac{n}{b}\right)^d = \frac{n^d}{b^d}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$\left(\frac{n}{b^2}\right)^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^2 \cdot n^d$
$\cdots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$\left(\frac{n}{b^i}\right)^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^i \cdot n^d$
$\cdots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βημάτα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$(\frac{n}{b})^d = \frac{n^d}{b^d}$	$(\frac{a}{b^d}) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$(\frac{n}{b^2})^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$(\frac{a}{b^d})^2 \cdot n^d$
$\ldots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$(\frac{n}{b^i})^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$(\frac{a}{b^d})^i \cdot n^d$
$\ldots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Για να γίνει πιο κατανοητός ο ρόλος της ποσότητας $\log_b a$ στο παραπάνω θεώρημα, ας υποθέσουμε ότι $f(n) = n^d$ και ότι $T(0) = 1$. Το πλήθος των βημάτων για κάθε επίπεδο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Επίπεδο	Πλήθος στιγμιοτύπων	Μέγεθος στιγμιοτύπου	Βήματα ανά στιγμιότυπο	Βήματα στο επίπεδο
0	1	n	n^d	n^d
1	a	$\frac{n}{b}$	$\left(\frac{n}{b}\right)^d = \frac{n^d}{b^d}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right) \cdot n^d$
2	a^2	$\frac{n}{b^2}$	$\left(\frac{n}{b^2}\right)^d = \frac{n^d}{b^{2d}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^2 \cdot n^d$
$\dots$				
i	a^i	$\frac{n}{b^i}$	$\left(\frac{n}{b^i}\right)^d = \frac{n^d}{b^{id}}$	$\left(\frac{a}{b^d}\right)^i \cdot n^d$
$\dots$				
$\log_b n$	$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$	$\frac{n}{b^{\log_b n}} = \frac{n}{n} = 1$	1	$n^{\log_b a}$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Η συνθήκη ώστε δύο διαδοχικά επίπεδα να έχουν το ίδιο πλήθος βημάτων είναι:

$$\frac{a}{b^d} = 1 \Leftrightarrow b^d = a \Leftrightarrow \log_b a = d$$

Συνεπώς

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = (\log_b n + 1) \cdot n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n).$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Η συνθήκη ώστε δύο διαδοχικά επίπεδα να έχουν το ίδιο πλήθος βημάτων είναι:

$$\frac{a}{b^d} = 1 \Leftrightarrow b^d = a \Leftrightarrow \log_b a = d$$

Συνεπώς

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = (\log_b n + 1) \cdot n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n).$$

Η συνθήκη ώστε δύο διαδοχικά επίπεδα να έχουν το ίδιο πλήθος βημάτων είναι:

$$\frac{a}{b^d} = 1 \Leftrightarrow b^d = a \Leftrightarrow \log_b a = d$$

Συνεπώς

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η δεύτερη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = (\log_b n + 1) \cdot n^{\log_b a} = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n).$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Η συνθήκη ώστε το πλήθος των βημάτων να μειώνεται από επίπεδο σε επίπεδο είναι:

$$\frac{a}{b^d} < 1 \Leftrightarrow b^d > a \Leftrightarrow d > \log_b a$$

Επιλέγοντας $\epsilon = d - \log_b a$ έχουμε

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a + \epsilon} = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η τρίτη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Η συνθήκη ώστε το πλήθος των βημάτων να μειώνεται από επίπεδο σε επίπεδο είναι:

$$\frac{a}{b^d} < 1 \Leftrightarrow b^d > a \Leftrightarrow d > \log_b a$$

Επιλέγοντας $\epsilon = d - \log_b a$ έχουμε

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a + \epsilon} = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η τρίτη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a}$$

Άρα

$$T(n) \geq n^d$$

και

$$T(n) \leq n^d \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} = \frac{1}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d + n^{\log_b a} \leq \frac{2-\frac{a}{b^d}}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^d)$.

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a}$$

Άρα

$$T(n) \geq n^d$$

και

$$T(n) \leq n^d \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} = \frac{1}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d + n^{\log_b a} \leq \frac{2-\frac{a}{b^d}}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^d)$.

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a}$$

Άρα

$$T(n) \geq n^d$$

και

$$T(n) \leq n^d \cdot \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} = \frac{1}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d + n^{\log_b a} \leq \frac{2-\frac{a}{b^d}}{1-\frac{a}{b^d}} \cdot n^d$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^d)$.

Σε αυτή την περίπτωση

$$T(n) = n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n - 1} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a}$$

Άρα

$$T(n) \geq n^d$$

και

$$T(n) \leq n^d \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} = \frac{1}{1 - \frac{a}{b^d}} \cdot n^d + n^{\log_b a} \leq \frac{2 - \frac{a}{b^d}}{1 - \frac{a}{b^d}} \cdot n^d$$

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $T(n) = \Theta(n^d)$.

Η συνθήκη ώστε το πλήθος των βημάτων να αυξάνεται από επίπεδο σε επίπεδο είναι:

$$\frac{a}{b^d} > 1 \Leftrightarrow b^d < a \Leftrightarrow d < \log_b a$$

Επιλέγοντας $\epsilon = \log_b a - d$ έχουμε

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a - \epsilon} = O(n^{\log_b a - \epsilon}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η πρώτη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Η συνθήκη ώστε το πλήθος των βημάτων να αυξάνεται από επίπεδο σε επίπεδο είναι:

$$\frac{a}{b^d} > 1 \Leftrightarrow b^d < a \Leftrightarrow d < \log_b a$$

Επιλέγοντας $\epsilon = \log_b a - d$ έχουμε

$$f(n) = n^d = n^{\log_b a - \epsilon} = O(n^{\log_b a - \epsilon}).$$

(που είναι η συνθήκη ώστε να εφαρμόζεται η πρώτη περίπτωση του θεωρήματος Κυριαρχίας)

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n-1} (\tfrac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a}{b^d})^{\log_b n} - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a^{\log_b n}}{(b^d)^{\log_b n}}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{\log_b a}}{(b^{\log_b n})^d}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} n^{\log_b a} - \frac{1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a^{\log_b n}}{(b^d)^{\log_b n}}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{(b^{\log_b n})^d}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} n^{\log_b a} - \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta\left(n^{\log_b a}\right)
\end{aligned}
$$

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{log_b n}-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a^{log_b n}}{(b^d)^{log_b n}}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{(b^{log_b n})^d}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} n^{log_b a} - \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} (\tfrac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a}{b^d})^{log_b n} - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a^{log_b n}}{(b^d)^{log_b n}}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{log_b a}}{(b^{log_b n})^d}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{log_b a}}{n^d}) - 1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} n^{log_b a} - \frac{1}{(\frac{a}{b^d}) - 1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$

Σε αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n} - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a^{\log_b n}}{(b^d)^{\log_b n}}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{(b^{\log_b n})^d}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right) - 1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} n^{\log_b a} - \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right) - 1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}$$

Επίλυση Αναδρομικών Εξισώσεων

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^d}\right)^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n}-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{a^{\log_b n}}{(b^d)^{\log_b n}}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{(b^{\log_b n})^d}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{\left(\frac{n^{\log_b a}}{n^d}\right)-1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} n^{\log_b a} - \frac{1}{\left(\frac{a}{b^d}\right)-1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$

Σε αυτή την περίπτωση

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n^d \cdot \sum_{i=0}^{log_b n-1} (\tfrac{a}{b^d})^i + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a}{b^d})^{log_b n}-1}{(\frac{a}{b^d})-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{a^{log_b n}}{(b^d)^{log_b n}})-1}{(\frac{a}{b^d})-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{log_b a}}{(b^{log_b n})^d})-1}{(\frac{a}{b^d})-1} + n^{\log_b a} \\
&= n^d \cdot \frac{(\frac{n^{log_b a}}{n^d})-1}{(\frac{a}{b^d})-1} + n^{\log_b a} \\
&= \frac{1}{(\frac{a}{b^d})-1} n^{log_b a} - \frac{1}{(\frac{a}{b^d})-1} n^d + n^{\log_b a} \\
&= \Theta(n^{\log_b a})
\end{aligned}
$$