Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Κρυπτογραφία

Υπάρχουν πολλοί εναλλακτικοί τρόποι για να περιγράψουμε μια ακολουθία (δηλαδή μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς):

- Απαρίθμηση των τιμών:

$$1, 3, 9, 27, \ldots, 3^n, \ldots$$

- Κλειστός τύπος:

$$a_n = 3^n$$

- Αναδρομική σχέση:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n, \; a_0 = 1$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα

Ακολουθία Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \;\; f_0 = f_1 = 1$$

$$f_n = \frac{1}{5} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{5} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}$$

Πρόβλημα: Δίνεται μια αναδρομική σχέση που περιγράφει μια ακολουθία και ζητείται να βρεθεί ένας κλειστός τύπος για την ακολουθία.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Γραμμικές αναδρομικές σχέσεις με σταθερούς συντελεστές

Η αναδρομική σχέση:

$$c_0 \cdot a_n + c_1 \cdot a_{n-1} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} = f_n$$

όπου τα c_i είναι πραγματικες σταθερές και $c_0 \neq 0, c_k \neq 0$ και f_n είναι μια ακολουθία, ονομάζεται γραμμική αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές τάξης k.

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική σχέση

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n^2 - 1$$

και έστω ότι

$$a_4 = 2, \; a_5 = 4$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η αναδρομική σχέση γράφεται:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n^2 - 1$$

Άρα

$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 + 6^2 - 1 = 43$$

$$a_7 = 3a_6 - 2a_5 + 7^2 - 1 = 169$$

$$\ldots$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Επίση η αναδρομική σχέση γράφεται:

$$a_{n-2} = \frac{3a_{n-1} - a_n + n^2 - 1}{2}$$

Άρα

$$a_3 = \frac{3a_4 - a_5 + 5^2 - 1}{2} = 13$$

$$a_2 = \frac{3a_3 - a_4 + 4^2 - 1}{2} = 26$$

$$\ldots$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Γενικά σε μια γραμμική αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές τάξης k, αν είναι γνωστές k συνεχόμενες τιμές $a_{m-k}, \cdots, a_{m-1}$ για κάποιο m τότε

$$a_m = -\frac{1}{c_0} \cdot (c_1 \cdot a_{m-1} + \cdots + c_k \cdot a_{m-k} - f_m)$$

Παρόμοια υπολογίζουμε τις τιμές

$$a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots.$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Επίσης:

$$a_{m-k-1} = -\frac{1}{c_k} \cdot (c_0 \cdot a_{m-1} + \cdots + c_{k-1} \cdot a_{m-k} - f_{m-1})$$

Παρόμοια υπολογίζουμε τις τιμές

$$a_{m-k-2}, a_{m-k-3}, \ldots, a_0.$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Λιγότερες από k τιμές δεν προσδιορίζουν μονοσήμαντα την ακολουθία. Για παράδειγμα η αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \;\; a_0 = 1$$

ικανοποιείται από ένα άπειρο πλήθος ακολουθιών:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 \ldots$$

$$\ldots$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Περισσότερες από k τιμές μπορεί να καθιστούν αδύνατη την ύπαρξη ακολουθίας που να ικανοποιεί την αναδρομική σχέση. Για παράδειγμα η αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \ a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 5.$$

δεν ικανοποιείται από καμία ακολουθία.

k μη διαδοχικές τιμές δεν ορίζουν πάντα μονοσήμαντα τη λύση ενώ μπορεί να καθιστούν αδύνατη την ύπαρξη ακολουθίας που να ικανοποιεί την αναδρομική σχέση.

Για παράδειγμα η αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = a_n + 1,\ \ a_0 = 1, a_2 = 3$$

δεν ικανοποιείται από καμία ακολουθία.

Αντίθετα η αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = a_n + 1, \;\; a_0 = 1, a_2 = 2$$

ικανοποιείται από ένα άπειρο πλήθος ακολουθιών:

$$1, 0, 2, 1, 3, 2, 4, 3, \ldots$$

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 3, \ldots$$

$$1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, \ldots$$

$$\ldots$$

Για μη γραμμικές σχέσεις γενικά δεν αρκούν k τιμές. Για παράδειγμα:

$$(a_n)^2 + a_{n-1} = 5,\ \ a_0 = 1$$

ικανοποιείται από ένα άπειρο πλήθος ακολουθιών:

$$1, 2, \sqrt{3}, \dots$$

$$1, 2, -\sqrt{3}, \dots$$

$$1, -2, \sqrt{7}, \dots$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Έστω η γραμμική αναδρομική σχέση

$$c_0 \cdot a_n + c_1 \cdot a_{n-1} + \cdots + c_k \cdot a_{n-k} = f_n$$

Έστω επίσης ότι δίνονται k συνεχόμενες τιμές

$$c_m, c_{m+1}, \ldots, c_{m+k-1}$$

Ονομάζουμε αυτές τις τιμές οριακές συνθήκες.

Η h ονομάζεται ομογενής λύση της αναδρομικής σχέσης αν ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$c_0 \cdot h_n + c_1 \cdot h_{n-1} + \cdots + c_k \cdot h_{n-k} = 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η ομογενής λύση μιας αναδρομικής σχέσης δεν ικανοποιεί την αναδρομική σχέση, αλλα μια άλλη αναδρομική σχέση που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το f_n με 0.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Αν h είναι ομογενής λύση τότε για κάθε πραγματική σταθερά c, η $c \cdot h$ είναι επίσης ομογενής λύση.

Αν h, h' είναι ομογενείς λύσεις τότε και η $h + h'$ είναι ομογενής λύση.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Η p ονομάζεται ειδική λύση της αναδρομικής σχέσης αν την ικανοποιεί:

$$c_0 \cdot p_n + c_1 \cdot p_{n-1} + \cdots + c_k \cdot p_{n-k} = f_n$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η ειδική λύση μιας αναδρομικής σχέσης δεν ικανοποιεί απαραίτητα τις οριακές συνθήκες.

Αν h είναι ομογενής λύση και p είναι ειδική λύση τότε η $h+p$ είναι επίσης ειδική λύση.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Για να βρούμε μια λύση σε μια γραμμική αναδρομική σχέση με σταθερούς συντελεστές, με δεδομένες οριακές συνθήκες ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. Βρίσκουμε μια οικογένεια ομογενών λύσεων.
2. Βρίσκουμε μια ειδική λύση p.
3. Επιλέγουμε μια ομογενή λύση h τέτοια ώστε η $h + p$ να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Η $h + p$ ονομάζεται ολική λύση.

Εύρεση των ομογενών λύσεων

Αναζητούμε ομογενείς λύσεις της μορφής λ^n. Το λ ονομάζεται χαρακτηριστική ρίζα.

Για να είναι η λ^n ομογενής λύση θα πρέπει:

$$c_0 \cdot \lambda^n + c_1 \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + c_k \cdot \lambda^{n-k} = 0$$

Διαιρώντας το πρώτο μέλος με λ^{n-k} προκύπτει η εξίσωση:

$$c_0 \cdot \lambda^k + c_1 \cdot \lambda^{k-1} + \cdots + c_k = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση.

Παρατηρούμε ότι επειδή $c_k \neq 0$, το 0 δεν είναι ρίζα της παραπάνω εξίσωσης.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει k ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ (όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους).

Παρατηρούμε ότι για κάθε επιλογή σταθερών $A_1, A_2, \ldots, A_k$ η ακολουθία

$$h = A_1 \cdot \lambda_1^n + A_2 \cdot \lambda_2^n + \cdots + A_k \cdot \lambda_k^n$$

είναι επίσης ομογενής λύση.

Αν οι ρίζες της χαρακτηριστικης εξίσωσης είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους τότε η ζητούμενη οικογένεια ομογενών λύσεων αποτελείται από όλες τις ακολουθίες που προκύπτουν από τον παραπάνω τύπο με αντικατάσταση των A_i από πραγματικές τιμές.

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική σχέση

$$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$$

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

με ρίζες $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$. Η οικογένεια των ομογενών λύσεων είναι:

$$A_1 \cdot (-2)^n + A_2 \cdot 3^n.$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε χαρακτηριστικές ρίζες με μεγαλύτερη πολλαπλότητα.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Λήμμα

Λήμμα: Έστω p πολυώνυμο. Αν λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας m της εξίσωσης $p(\lambda) = 0$, τότε είναι ρίζα πολλαπλότητας $m - 1$ της εξίσωσης $\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = 0$.

Απόδειξη

Ισχύει

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m \cdot q(\lambda)$$

για κάποιο πολυώνυμο q.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Απόδειξη (συνέχεια)

Άρα

$$\begin{aligned}\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} &= m \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m-1} \cdot q(\lambda) + (\lambda - \lambda_1)^m \cdot \frac{dq(\lambda)}{d\lambda} \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m-1} \cdot (m \cdot q(\lambda) + (\lambda - \lambda_1) \cdot \frac{dq(\lambda)}{d\lambda})\end{aligned}$$

Άρα πράγματι το λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας $m-1$ της $\frac{dp(\lambda)}{d\lambda} = 0$. □

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Θεώρημα

Αν λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας m της

$$c_0 \cdot \lambda^k + c_1 \cdot \lambda^{k-1} + \cdots + c_k = 0$$

τότε για κάθε $n \geq k$ και για κάθε i, $0 \leq i < m$ η λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας $m - i$ της

$$\begin{aligned} c_0 \cdot n^i \cdot \lambda^n + c_1 \cdot (n-1)^i \cdot \lambda^{n-1} & \\ + \cdots + c_k \cdot (n-k)^i \cdot \lambda^{n-k} &= 0 \end{aligned}$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Απόδειξη

Με επαγωγή στο i.

Για $i = 0$ ισχύει (αρκεί να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της χαρακτηριστική εξίσωσης με λ^{n-k}).

Έστω ότι ισχύει για $i = j$ και $j + 1 < m$. Θα δείξω ότι ισχύει και για $i = j + 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Η λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας $m-j$ της:

$$\begin{aligned} c_0 \cdot n^j \cdot \lambda^n + c_1 \cdot (n-1)^j \cdot \lambda^{n-1} & \\ + \cdots + c_k \cdot (n-k)^j \cdot \lambda^{n-k} &= 0 \end{aligned}$$

Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι η λ_1 είναι ρίζα πολλαπλότητας $m-j-1>0$ της

$$\begin{aligned} & c_0 \cdot n^{j+1} \cdot \lambda^{n-1} \\ & + c_1 \cdot (n-1)^{j+1} \cdot \lambda^{n-2} \\ & + \cdots + c_k \cdot (n-k)^{j+1} \cdot \lambda^{n-k-1} = 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη (συνέχεια)

συνεπώς και της

$$
\begin{aligned}
& c_0 \cdot n^{j+1} \cdot \lambda^n \\
& + c_1 \cdot (n-1)^{j+1} \cdot \lambda^{n-1} \\
& + \cdots + c_k \cdot (n-k)^{j+1} \cdot \lambda^{n-k} = 0
\end{aligned}
$$

□

Πόρισμα

Αν η λ είναι ρίζα πολλαπλότητας m της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε: $\lambda^n, n \cdot \lambda^n, \ldots, n^{m-1} \cdot \lambda^n$ είναι ομογενείς λύσεις.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell$ με πολλαπλότητες $m_1, m_2, \cdots, m_\ell$, τότε για κάθε επιλογή σταθερών $A_{i,j}$ η παρακάτω συνάρτηση είναι ομογενής λύση:

$$\begin{aligned}
h_n &= A_{1,0} \cdot \lambda_1^n + A_{1,1} \cdot n \cdot \lambda_1^n + \cdots + A_{1,m_1-1} \cdot n^{m_1-1} \cdot \lambda_1^n \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + A_{\ell,0} \cdot \lambda_\ell^n + A_{\ell,1} \cdot n \cdot \lambda_\ell^n + \cdots + A_{\ell,m_\ell-1} \cdot n^{m_\ell-1} \cdot \lambda_\ell^n \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n
\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική σχέση

$$a_n + 6a_{n-1} + 12a_{n-2} + 8a_{n-3} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda + 2)^3 = 0$$

η οποία έχει μόνο μία ρίζα $\lambda_1 = -2$ πολλαπλότητας 3. Η οικογένεια των ομογενών λύσεων είναι:

$$h_n = (A_{1,2} \cdot n^2 + A_{1,1} \cdot n + A_{1,0}) \cdot (-2)^n$$

Παράδειγμα

Έστω η αναδρομική σχέση

$$4a_n - 20a_{n-1} + 17a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$4\lambda^3 - 20\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

η οποία έχει ρίζες $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ πολλαπλότητας 2 και $\lambda_2 = 4$ πολλαπλότητας 1. Η οικογένεια των ομογενών λύσεων είναι:

$$h_n = (A_{1,1} \cdot n + A_{1,0}) \cdot (\frac{1}{2})^n + A_{2,0} \cdot 4^n$$

Εύρεση ειδικής λύσης

Δεν υπάρχει γενική μέθοδος για την εύρεση μιας ειδικής λύσης μιας γραμμικής αναδρομικής σχέσης με σταθερούς συντελεστές.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Ανάλογα με την f_n, προσδιορίζουμε μια γενική μορφή για την ειδική λύση, αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση και βρίσκουμε μια ειδική λύση, καθορίζοντας τις σταθερές που υπάρχουν στη γενική μορφή.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Περίπτωση 1η: Αν η f_n είναι πολυώνυμο βαθμού r και το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε θεωρούμε ότι και η ειδική λύση είναι πολυώνυμο βαθμού r:

$$A_r \cdot n^r + \cdots + A_1 \cdot n + A_0$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση και προσδιορίζουμε τις σταθερές A_i.

Παράδειγμα

$$a_n + 3a_{n-1} - 5a_{n-2} = 2$$

Το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Θεωρούμε γενική μορφή για την ειδική λύση $p_n = A$. Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση έχουμε:

$$A + 3A - 5A = 2 \Leftrightarrow A = -2$$

Μία ειδική λύση είναι η $p_n = -2$.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα

$$a_n - 2a_{n-1} + 3a_{n-2} = 2n^2 - 12n + 20$$

Το 1 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Θεωρούμε γενική μορφή για την ειδική λύση

$$p_n = A \cdot n^2 + B \cdot n + C$$

Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} & A \cdot n^2 + B \cdot n + C \\ & -2A \cdot (n-1)^2 - 2B \cdot (n-1) - 2C \\ & +3A \cdot (n-2)^2 + 3B \cdot (n-2) + 3C \\ = \; & 2n^2 - 12n + 20 \end{aligned}$$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} & 2A \cdot n^2 + \\ & +(-8A + 2B) \cdot n \\ & +(10A - 4B + 2C) \\ = \; & 2n^2 - 12n + 20 \end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει το σύστημα:

$2A = 2$

$-8A + 2B = -12$

$10A - 4B + 2C = 20$

Το παραπάνω σύστημα έχει λύση

$$A = 1, B = -2, C = 1$$

Μία ειδική λύση είναι η $p_n = n^2 - 2 \cdot n + 1$

Περίπτωση 2η: Αν $f_n = c \cdot \beta^n$, τότε θεωρούμε ότι η ειδική λύση έχει τη γενική μορφή

$$A \cdot n^m \cdot \beta^n$$

όπου m η πολλαπλότητα της β ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

(Αν β είναι ρίζα πολλαπλότητας m της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε $\beta^n, n \cdot \beta^n, \ldots, n^{m-1} \cdot \beta^n$ είναι ομογενείς λύσεις.)

Παράδειγμα

$$a_n - 4a_{n-1} = 5 \cdot 2^n$$

Θεωρούμε γενική μορφή για την ειδική λύση $p_n = A \cdot 2^n$ (το 2 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης). Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση:

$$\begin{aligned} & A \cdot 2^n - 4A \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^n \\ \Rightarrow \quad & (A-2) \cdot 2^n = 5 \cdot 2^n \\ \Rightarrow \quad & A = 7 \end{aligned}$$

Μία ειδική λύση είναι η $p_n = 7 \cdot 2^n$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα

$$a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 4 \cdot 3^{n-1}$$

Παρατηρούμε ότι $f_n = 4 \cdot 3^{n-1} = \frac{4}{3} \cdot 3^n$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ με ρίζες $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 3$.

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα

Επειδή το 3 είναι ρίζα πολλαπλότητας 1, θεωρούμε γενική μορφή για την ειδική λύση

$$p_n = A \cdot n \cdot 3^n$$

Αντικαθιστώντας στην αναδρομική σχέση έχουμε:

Παράδειγμα

$$
\begin{aligned}
& A \cdot n \cdot 3^n - 4A \cdot (n-1) \cdot 3^{n-1} \\
& +3A \cdot (n-2) \cdot 3^{n-2} \\
= \quad & 4 \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& (3^n - 4 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2}) \cdot A \cdot n \\
& +(4 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-2}) \cdot A \\
= \quad & 4 \cdot 3^{n-1}
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα

Ισχύει $3^n - 4 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 3^{n-2} = 0$

Από τη σχέση $(4 \cdot 3^{n-1} - 6 \cdot 3^{n-2}) \cdot A = 4 \cdot 3^{n-1}$ προκύπτει $A = 2$.

Μία ειδική λύση είναι η $p_n = 2 \cdot n \cdot 3^n$

Γενική περίπτωση: Αν $f_n = q_n \cdot \beta^n$ όπου q_n πολυώνυμο βαθμού r και β ρίζα πολλαπλότητας m της χαρακτηριστικής εξίσωσης τότε θεωρούμε ότι η ειδική λύση έχει τη γενική μορφή:

$$p_n = n^m \cdot (A_r \cdot n^r + \cdots + A_0) \cdot \beta^n$$

Αν $f_n = f'_n + f''_n$, τότε βρίσκουμε ειδικές λύσεις p'_n για την f'_n και p''_n για την f''_n και θέτουμε $p_n = p'_n + p''_n$.

Εύρεση ολικής λύσης

Όπως έχουμε αναφέρει ήδη το άθροισμα μιας ειδικής λύσης και μιας ομογενούς λύσης είναι επίσης ειδική λύση:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} A_{i,j} \cdot n^j \cdot \lambda_i^n + p_n$$

Η παραπάνω συνάρτηση έχει k σταθερές οι οποίες μπορούν να προσδιοριστούν ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες.

Παράδειγμα

Εστω η αναδρομική σχέση

$$a_n - 3a_{n-1} + 4a_{n-3} = 9 \cdot (n-2) \cdot 2^n$$

με οριακές συνθήκες

$$a_0 = 5,\ a_1 = 0,\ a_2 = 6$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ομογενείς λύσεις:

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

Ισχύει

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda + 1)$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει ρίζες $\lambda_1 = 2$ με πολλαπλότητα 2 και $\lambda_2 = -1$ με πολλαπλότητα 1.

Η ομογενής λύση έχει τη γενική μορφή:

$$h_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot n \cdot 2^n + A_3 \cdot (-1)^n$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ειδική λύση:

Έχουμε $f_n = 9(n-2)\cdot 2^n$. Επειδή το 2 είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 θεωρούμε γενική μορφή για την ειδική λύση

$$
\begin{aligned}
p_n &= n^2\cdot(An+B)\cdot 2^n \\
&= (An^3+Bn^2)\cdot 2^n
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αντικαθιστούμε στην αναδρομική σχέση:

$$
\begin{array}{rl}
& (An^3 + Bn^2) \cdot 2^n \\
& -3(A(n-1)^3 + B(n-1)^2) \cdot 2^{n-1} \\
& +4(A(n-3)^3 + B(n-3)^2) \cdot 2^{n-3} \\
= & 9(n-2) \cdot 2^n \\
\Leftrightarrow & \\
& (An^3 + Bn^2) \cdot 2^3 \\
& -3(A(n-1)^3 + B(n-1)^2) \cdot 2^2 \\
& +4(A(n-3)^3 + B(n-3)^2) \\
= & 9(n-2) \cdot 2^3 \\
\Leftrightarrow &
\end{array}
$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\begin{aligned}
& 8(An^3 + Bn^2) \\
& -12(A(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + B(n^2 - 2n + 1)) \\
& +4(A(n^3 - 9n^2 + 27n - 27) + B(n^2 - 6n + 9)) \\
= \quad & 72(n-2) \cdot \\
\Leftrightarrow \quad & (8A - 12A + 4A) \cdot n^3 \\
& +(8B + 36A - 12B - 36A + 4B) \cdot n^2 \\
& +(-36A + 24B + 108A - 24B) \cdot n \\
& +(12A - 12B - 108A + 36B) \\
= \quad & 72(n-2) \\
\Leftrightarrow \quad & 0n^3 + 0n^2 + 72An + (-96A + 24B) = 72n - 144 \\
\Leftrightarrow \quad & 3An + (-4A + B) = 3n - 6
\end{aligned}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το σύστημα:
$3A = 3$
$B - 4A = -6$

Η λύση του παραπάνω συστήματος δίνει
$A = 1,\ B = -2.$

Μία ειδική λύση είναι $p_n = n^2 \cdot (n-2) \cdot 2^n$.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ολική λύση:

$$\begin{aligned} a_n &= h_n + p_n \\ &= A_1 \cdot 2^n + A_2 \cdot n \cdot 2^n + A_3 \cdot (-1)^n \\ &\quad + n^2 \cdot (n-2) \cdot 2^n \end{aligned}$$

Για να προσδιορίσουμε τις σταθερές A_1, A_2, A_3 χρησιμοποιούμε τις οριακές συνθήκες:

$a_0 = A_1 + A_3 = 5$

$a_1 = 2A_1 + 2A_2 - A_3 - 2 = 0$

$a_2 = 4A_1 + 8A_2 + A_3 = 6$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η λύση του παραπάνω συστήματος είναι
$A_1 = 3, A_2 = -1, A_3 = 2.$

Γραμμικές Αναδρομικές Σχέσεις

Παράδειγμα (συνέχεια)

Η ολική λύση είναι:

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n \\ &\quad + n^2 \cdot (n-2) \cdot 2^n \\ &= (n^3 - 2n^2 - n + 3) \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n \end{aligned}$$