Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Δέντρα

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του δέντρου:

Ορισμός

Ένα γράφημα G ονομάζεται δέντρο αν είναι συνεκτικό και δεν υπάρχει κύκλος στο G.

Δέντρα

Ορισμός

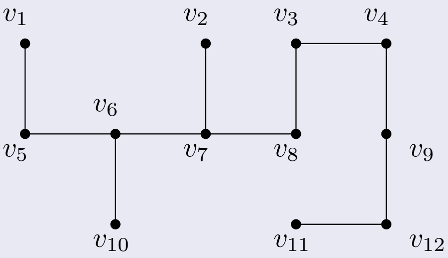
Έστω T ένα δέντρο και v μία κορυφή του T. Η v ονομάζεται:

- φύλλο αν $d_T(v) \leq 1$.
- εσωτερική κορυφή αν $d_T(v) \geq 2$.

Δέντρα

Παράδειγμα

Στο παρακάτω δέντρο οι κορυφές v_1, v_2, v_{10}, v_{11} είναι φύλλα και οι $v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{12}$ είναι εσωτερικές κορυφές.



Παράδειγμα

Ειδικές κατηγορίες δέντρων:

Γράφημα μονοπάτι P_n: οι n κορυφές του γραφήματος σχηματίζουν ένα μοναδικό μονοπάτι.

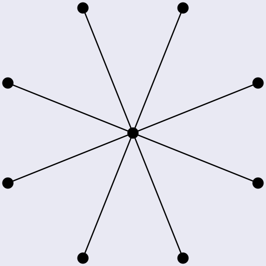
P_8

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ειδικές κατηγορίες δέντρων:

Αστέρι S_n: δέντρο με μία μόνο εσωτερική κορυφή και n φύλλα.

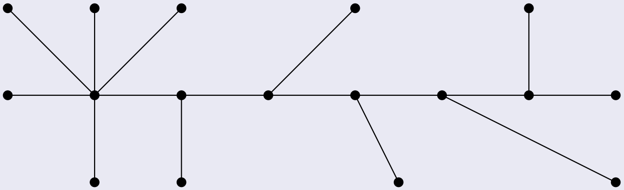
S_8



Παράδειγμα (συνέχεια)

Ειδικές κατηγορίες δέντρων:

Κάμπια: δέντρο στο οποίο υπάρχει ένα μονοπάτι, τέτοιο ώστε κάθε ακμή να έχει τουλάχιστον το ένα της άκρο στο μονοπάτι αυτό.



Δέντρα

Θεώρημα

Ένα γράφημα $G = (V, E)$ είναι δέντρο αν και μόνο αν για οποιεσδήποτε κορυφές $v, u \in V$ υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι απο την v στη u.

Απόδειξη

Για τη μία κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι για οποιεσδήποτε κορυφές v, u υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι απο την v στη u.

Τότε το γράφημα G είναι συνεκτικό.

Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι το G δεν περιέχει κύκλο.

Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Ας υποθέσουμε ότι το G περιέχει έναν κύκλο $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1$, $k \geq 3$.

Τότε υπάρχουν δύο μονοπάτια $x_1, x_2, \ldots, x_k$, και x_1, x_k από την x_1 στην x_k (άτοπο).

Συνεπώς το G δεν περιέχει κύκλο και επειδή είναι συνεκτικό, είναι δέντρο.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι το G είναι δέντρο.

Έστω δύο οποιεσδήποτε κορυφές $v, u \in V$. Επειδή κάθε δέντρο είναι συνεκτικό γράφημα, υπάρχει ένα μονοπάτι $p = x_1, x_2, \ldots, x_k$ (όπου $x_1 = v$ και $x_k = u$) από τη v στη u.

Θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι το μονοπάτι αυτό είναι μοναδικό.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και δεύτερο μονοπάτι $p' = y_1, y_2, \ldots, y_m$ (όπου $y_1 = v = x_1$ και $y_m = u = x_k$) από τη v στη u, διαφορετικό του p.

Έστω $s = \min\{i \mid 1 < i < k \text{ και } x_i \neq y_i\}$.

Το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό, επειδή τα δύο μονοπάτια είναι διαφορετικά.

Η κορυφή x_s είναι η πρώτη κορυφή στην οποία διαφέρουν τα δύο μονοπάτια. Συνεπώς $x_{s-1} = y_{s-1}$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επιπλέον, εστω
$r = \min\{i \mid s-1 < i \leq k$ και υπάρχει j τέτοιο ώστε $x_i = y_j\}$.

Το παραπάνω σύνολο είναι μη κενό, επειδή $x_k = y_m$, άρα το r είναι καλά ορισμένο.

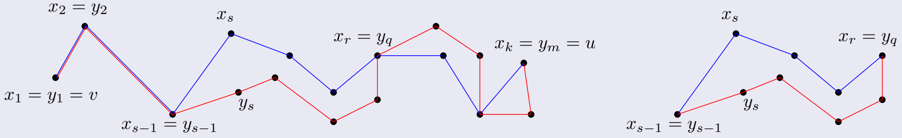
Η κορυφή x_r είναι η πρώτη κορυφή του μονοπατιού p μετά από την x_s η οποία ανήκει και στο μονοπάτι p'. Έστω $x_r = y_q$.

Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Από τον ορισμό των s, r, q προκύπτει ότι οι κορυφές $x_s, \ldots, x_r, y_s, \ldots, y_{q-1}$ είναι ανά δύο διαφορετικές κορυφές του G.

Τότε όμως η ακολουθία $x_{s-1}, x_s, \ldots, \underbrace{x_r}_{=y_q}, y_{q-1}, \ldots, y_s, \underbrace{y_{s-1}}_{=x_{s-1}}$ είναι ένας κύκλος στο G (άτοπο, επειδή το G είναι δέντρο).



Συνεπώς για οποιεσδήποτε κορυφές v, u υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι απο την v στη u. $\square$

Δέντρα

Λήμμα

Για κάθε δέντρο T με τουλάχιστον δύο κορυφές και κάθε φύλλο u του T, $d_T(u) = 1$ και το γράφημα $T - u$ είναι δέντρο.

Απόδειξη

Έστω $T = (V, E)$ ένα δέντρο με τουλάχιστον δύο κορυφές και u ένα φύλλο του T. Εξ ορισμού ισχύει $d_T(u) \leq 1$.

Επειδή το T είναι συνεκτικό και περιέχει μία τουλάχιστον κορυφή $v \neq u$, θα πρέπει να υπάρχει ένα μονοπάτι από τη u στη v στο T.

Το μονοπάτι αυτό πρέπει να περιέχει μια ακμή που προσπίπτει στην u, άρα $d_T(u) \geq 1$.

Από τις δύο ανισότητες προκύπτει ότι $d_T(u) = 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Το γράφημα $T - u$ δεν περιέχει κύκλο καθώς είναι υπογράφημα του T το οποίο είναι δέντρο και άρα δεν περιέχει κύκλο.

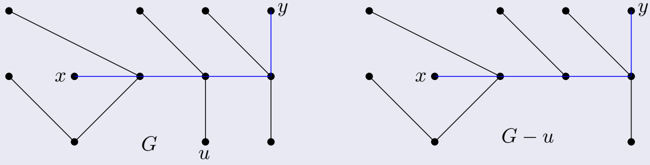
Απομένει να δείξουμε ότι το $T - u$ είναι συνεκτικό.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω δύο κορυφές x, y του T διαφορετικές από τη u. Επειδή το T είναι συνεκτικό, οι x, y συνδέονται στο T με ένα μονοπάτι p.

Το p δεν μπορεί να περιέχει την κορυφή u, γιατί κάθε εσωτερική κορυφή του p έχει δύο προσπίπτουσες ακμές στο p και άρα έχει βαθμό τουλάχιστον 2.

Συνεπώς το p είναι επίσης ένα μονοπάτι από την x στη y στο $T - u$.



Άρα το $T - u$ είναι συνεκτικό και επειδή δεν περιέχει κύκλο είναι δέντρο. □

Δέντρα

Θεώρημα

Κάθε δέντρο T με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο n.

Βάση της επαγωγής: Αν $n=1$, τότε το T δεν περιέχει ακμές και συνεπώς το πλήθος των ακμών του είναι $0 = 1-1 = n-1$.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι κάθε δέντρο με $n=k$ κορυφές έχει $k-1$ ακμές.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επαγωγικό βήμα: Έστω ένα δέντρο T με $k+1$ κορυφές και έστω m το πλήθος των ακμών του. Θα δείξουμε ότι $m=(k+1)-1=k$.

Το δέντρο T έχει τουλάχιστον μία κορυφή v η οποία είναι φύλλο, καθώς σε αντίθετη περίπτωση κάθε κορυφή του T θα είχε βαθμό τουλάχιστον 2. Τότε όμως, όπως έχουμε δείξει, το T θα περιείχε κύκλο και άρα δεν θα ήταν δέντρο.

Επειδή $k+1 \geq 2$, από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι $d_T(v)=1$ και ότι το $T-v$ είναι επίσης δέντρο.

Απόδειξη (συνέχεια)

Το T' έχει k κορυφές και $m-1$ ακμές (η μόνο ακμή του T που δεν υπάρχει στο T' είναι η ακμή που προσπίπτει στη v).

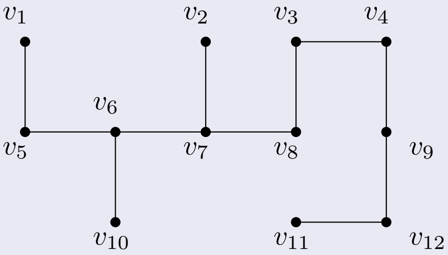
Από την επαγωγική υπόθεση το πλήθος των ακμών του T' είναι $k-1$.

Συνεπώς $m-1=k-1$, που συνεπάγεται $m=k$.

Άρα το T έχει k ακμές. □

Παράδειγμα

Το παρακάτω δέντρο έχει 12 κορυφές και 11 ακμές.



Δέντρα

Θεώρημα

Κάθε γράφημα G με n κορυφές και m ακμές έχει τουλάχιστον $n - m$ συνεκτικές συνιστώσες.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο πλήθος m των ακμών.

Βάση της επαγωγής: Αν $m = 0$, τότε το G αποτελείται από $n = n - 0 = n - m$ τετριμένες συνεκτικές συνιστώσες.

Επαγωγική υπόθεση: Κάθε γράφημα G με n κορυφές και k ακμές έχει τουλάχιστον $n - k$ συνεκτικές συνιστώσες.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επαγωγικό βήμα: Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές και $k+1$ ακμές. Θα δείξουμε ότι το G έχει τουλάχιστον $n-(k+1)=n-k-1$ συνεκτικές συνιστώσες.

Επιλέγουμε μια οποιαδήποτε ακμή e του G.

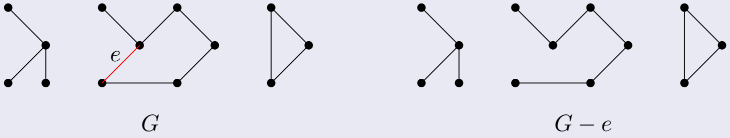
Συμβολίζουμε με c το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G και με c' το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $G-e$.

Το γράφημα $G-e$ έχει n κορυφές και k ακμές και από την επαγωγική υπόθεση ισχύει $c' \geq n-k$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις για την ακμή e:

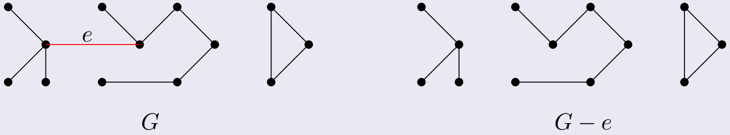
1η περίπτωση: Η e συνδέει δύο κορυφές που βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του του $G - e$.



Σε αυτή την περίπτωση το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών είναι το ίδιο στα γραφήματα $G - e$ και G. Άρα $c = c' \geq n - k > n - k - 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

2η περίπτωση: Η e συνδέει δύο κορυφές που βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του του $G - e$.



Σε αυτή την περίπτωση δύο συνεκτικές συνιστώσες του $G - e$ συνενώνονται σε μία συνεκτική συνιστώσα στο G. Άρα $c = c' - 1 \geq n - k - 1$.

Συνεπώς σε κάθε περίπτωση το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G είναι τουλάχιστον $n - k - 1$. $\square$

Λήμμα

Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα και $e = \{v, u\}$ μια ακμή του G, η οποία περιέχεται σε κάποιον κύκλο του G. Τότε το γράφημα $G - e$ είναι επίσης συνεκτικό.

Απόδειξη

Έστω ότι η ακμή $e = \{v, u\}$ περιέχεται στον κύκλο C του G.

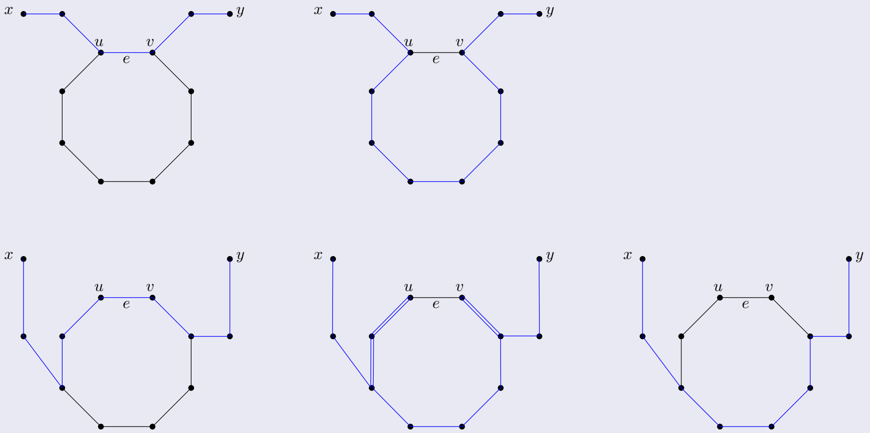
Οι ακμές του κύκλου C εκτός από την e σχηματίζουν ένα μονοπάτι p από τη v στη u στο G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν x, y είναι δύο κορυφές του G και q είναι ένα μονοπάτι από τη x στη y στο G το οποίο περιέχει την e, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια διαδρομή w από τη x στη y, αντικαθιστώντας στο q την ακμή $e = \{v, u\}$ με το μονοπάτι p.

Η διαδρομή w δεν περιέχει την ακμή e και όπως έχουμε δείξει περιέχει ένα μονοπάτι από τη v στη u, το οποίο προφανώς δεν περιέχει την ακμή e.

Απόδειξη (συνέχεια)



Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή το G είναι συνεκτικό, οποιεσδήποτε κορυφές x, y του G συνδέονται με μονοπάτι. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση υπάρχει ένα μονοπάτι $p_{x,y}$ που συνδέει τις x, y, το οποίο δεν χρησιμοποιεί την ακμή e.

Θεωρούμε το γράφημα $G - e$. Οποιεσδήποτε κορυφές x, y του $G - e$, συνδέονται στο $G - e$ από το μονοπάτι $p_{x,y}$ (καθώς το μονοπάτι αυτό δεν περιέχει την e και άρα δεν επηρεάζεται από τη διαγραφή της).

Συνεπώς το $G - e$ είναι συνεκτικό. $\square$

Δέντρα

Με βάση τον ορισμό του δέντρου και το προηγούμενο θεώρημα, κάθε δέντρο T με n κορυφές έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- είναι συνεκτικό
- δεν περιέχει κύκλο
- έχει $n-1$ ακμές

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι δύο οποιεσδήποτε από τις παραπάνω ιδιότητες συνεπάγονται την τρίτη.

Θεώρημα

Έστω ένα γράφημα G με n κορυφές. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Το G είναι δέντρο

(β) Το G έχει $n-1$ ακμές και δεν περιέχει κύκλο.

(γ) Το G έχει $n-1$ ακμές και είναι συνεκτικό.

Απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι (α)$\Rightarrow$(β).

Έστω ότι το G είναι δέντρο

Τότε εξ ορισμού δεν περιέχει κύκλο και όπως αποδείξαμε έχει $n-1$ ακμές.

Άρα το (α) συνεπάγεται το (β).

Δέντρα

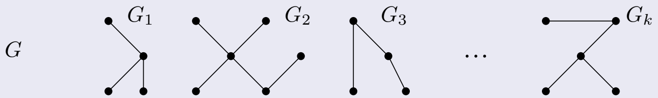
Απόδειξη (συνέχεια)

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι (β)⇒(γ).

Έστω ότι το G έχει $n-1$ ακμές και δεν περιέχει κύκλο. Αρκεί να δείξουμε ότι το G είναι συνεκτικό.

Έστω ότι το G έχει k συνεκτικές συνιστώσες $G_1, G_2, \ldots, G_k$ οι οποίες έχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k$ κορυφές αντίστοιχα.

Κάθε συνεκτική συνιστώσα G_i είναι εξ ορισμού συνεκτικό γράφημα και δεν περιέχει κύκλο (καθώς αποτελεί υπογράφημα του G, το οποίο δεν περιέχει κύκλο).



Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς κάθε συνεκτική συνιστώσα G_i είναι ένα δέντρο, το οποίο περιέχει n_i κορυφές και $n_i - 1$ ακμές (όπως έχουμε δείξει).

Το συνολικό πλήθος κορυφών του G είναι $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Το συνολικό πλήθος ακμών του G είναι
$\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} 1 = n - k$.

Επειδή το γράφημα G έχει $n-1$ ακμές, θα πρέπει $n - k = n - 1$, που συνεπάγεται $k = 1$.

Άρα το G αποτελείται από μία μόνο συνεκτική συνιστώσα, δηλαδή είναι συνεκτικό. Συνεπώς το (β) συνεπάγεται το (γ).

Απόδειξη (συνέχεια)

Τέλος δείχνουμε ότι (γ)⇒(α).

Έστω ότι το G έχει $n-1$ ακμές και είναι συνεκτικό.

Θα δείξουμε ότι το G δεν περιέχει κύκλο με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι το G περιέχει κύκλο.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω $e = \{v, u\}$ μια ακμή του G η οποία περιέχεται σε κάποιον κύκλο του G.

Όπως έχουμε δείξει, το γράφημα $G - e$ είναι συνεκτικό.

Ωστόσο το $G - e$ έχει n κορυφές και $n - 2$ ακμές. Άρα, όπως έχουμε αποδείξει το $G - e$ έχει τουλάχιστον $n - (n - 2) = 2$ συνεκτικές συνιστώσες (άτοπο).

Απόδειξη (συνέχεια)

Υποθέτοντας ότι το γράφημα G έχει κύκλο, καταλήξαμε σε άτοπο.

Άρα το G δεν περιέχει κύκλο και συνεπώς το (γ) συνεπάγεται το (α). $\square$

Δέντρα

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

Ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

(α) Κάθε δέντρο T με $n \geq 2$ κορυφές έχει τουλάχιστον δύο φύλλα.

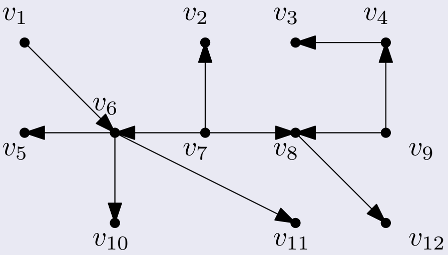
(β) Κάθε δέντρο T με $n \geq 3$ κορυφές έχει τουλάχιστον μία εσωτερική κορυφή.

Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ ονομάζεται κατευθυνόμενο δέντρο αν το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του G είναι δεντρο.

Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα είναι κατευθυνόμενο δέντρο.



v_1

Δέντρα

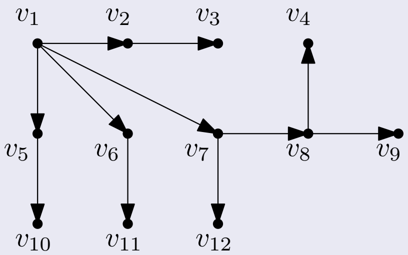
Ορισμός

Ένα κατευθυνόμενο δέντρο $T = (V, E)$ ονομάζεται δέντρο με ρίζα αν έχει ακριβώς μία κορυφή $r \in V$ με εισερχόμενο βαθμό 0. Η κορυφή r ονομάζεται ρίζα του δέντρου T.

Δέντρα

Παράδειγμα

Το παρακάτω κατευθυνόμενο γράφημα είναι δέντρο με ρίζα. Η μόνη κορυφή με εισερχόμενο βαθμό 0 είναι η v_1. Παρατηρούμε ότι κάθε άλλη κορυφή έχει εισερχόμενο βαθμό 1.



Ορισμός

Έστω δέντρο $T = (V, E)$ ένα δέντρο με ρίζα. Μία κορυφή $v \in V$ ονομάζεται:

- φύλλο αν $d^+_T(v) = 0$
- εσωτερική κορυφή (ή εσωτερικός κόμβος) αν $d^+_T(v) > 0$.

Η ρίζα r ενός δέντρου με ρίζα είναι εσωτερικός κόμβος αν το δέντρο έχει τουλάχιστον δύο κορυφές και φύλλο σε αντίθετη περίπτωση.

Σημειώνεται ότι αν για τη ρίζα r ενός δέντρου με ρίζα T ισχύει $d^+_T(r) = 1$, τότε η r δεν είναι φύλλο του T, παρότι είναι φύλλο στο υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του T.

Θεώρημα

Έστω $T = (V, E)$ ένα δέντρο με ρίζα την κορυφή r. Τότε κάθε κορυφή του T διαφορετική από την r έχει εισερχόμενο βαθμό 1.

Δέντρα

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών του T.

Αν το T έχει μία κορυφή, τότε δεν έχει άλλες κορυφές εκτός από τη ρίζα και άρα ο ισχυρισμός αληθεύει τετριμένα.

Έστω ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για κάθε δέντρο με ρίζα το οποίο έχει k κορυφές.

Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω T ένα δέντρο με ρίζα το οποίο έχει $k+1$ κορυφές.

Το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα T^* του T έχει τουλάχιστον δύο φύλλα. Έστω w ένα φύλλο του T^* διαφορετικό από τη ρίζα r.

Επειδή η κορυφή w δεν μπορεί να έχει εισερχόμενο βαθμό 0 (καθώς η ρίζα R είναι η μοναδική κορυφή με αυτή την ιδιότητα και $w \neq r$), η μοναδική προσπίπτουσα ακμή στη w θα πρέπει να είναι εισερχόμενη ακμή σε αυτή. Συνεπώς $d_T^-(w) = 1$.

Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε το δέντρο $T' = T - w$. Για κάθε κορυφή $v \in V - \{w\}$ ισχύει $d^-_{T'}(v) = d^-_T(v)$, καθώς η μοναδική ακμή που διαφοροποιεί τα δύο δέντρα είναι ακμή που εισέρχεται στην w, η οποία είναι εξερχόμενη από κάποια κορυφή του $V - \{w\}$ και άρα η διαγραφή της δεν επηρεάζει τους εισερχόμενους βαθμούς των κορυφών του συνόλου αυτού.

Συνεπώς στο T' η μόνη κορυφή με εισερχόμενο βαθμό 0 είναι η r και άρα το T' είναι δέντρο με ρίζα, το οποίο έχει k κορυφές.

Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι για κάθε κορυφή v του T' διαφορετική από τη ρίζα ισχύει $d^-_{T'}(v) = 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς για κάθε κορυφή v του T διαφορετική από τις w και r ισχύει $d^-_T(v) = d^-_{T'}(v) = 1$ και επιπλέον έχουμε δείξει ότι $d^-_T(w) = 1$.

Άρα κάθε κορυφή του T που είναι διαφορετική από τη ρίζα έχει εισερχόμενο βαθμό 1. □

Δέντρα

Ορισμός

Έστω δέντρο $T = (V, E)$ ένα δέντρο με ρίζα και $v, u, w \in V$ κορυφές του T.

- Αν $(v, u) \in E$, τότε η u ονομάζεται παιδί της v και η v πατέρας της u.
- Αν η v είναι πατέρας της u και της w τότε οι u και w ονομάζονται αδέρφια.
- Αν υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από την v στην u τότε η u ονομάζεται απόγονος της v και η v πρόγονος της u.

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι σε ένα δέντρο με ρίζα, κάθε κορυφή εκτός από τη ρίζα έχει έναν μοναδικό πατέρα.

Δέντρα

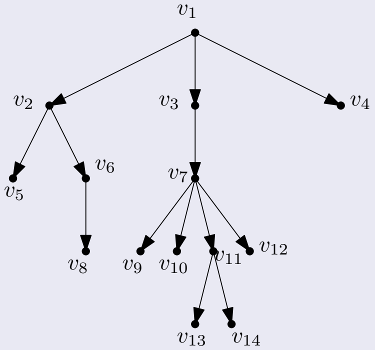
Συνήθως όταν σχεδιάζουμε ένα δέντρο με ρίζα, τοποθετούμε τις κορυφές έτσι ώστε κάθε κορυφή να βρίσκεται πιο πάνω από τα παιδιά της.

Αυτό επιτρέπει αν θέλουμε να παραλείπουμε τις κατευθύνσεις των ακμών, καθώς αυτές υπονοούνται από την τοποθέτηση των κορυφών.

Δέντρα

Παράδειγμα

Στα εικονιζόμενο δέντρο με ρίζα, η κορυφή v_1 έχει παιδιά τις κορυφές v_2, v_3 και v_4. Ο πατέρας της κορυφής v_8 είναι η v_6. Οι κορυφές v_9, v_{10}, v_{11} και v_{12} είναι αδέλφια. Οι κορυφές v_7, v_9, v_{10}, v_{11} v_{12}, v_{13} και v_{14} είναι απόγονοι της v_3. Οι κορυφές v_1, v_3, και v_7 είναι πρόγονοι της v_{12}.

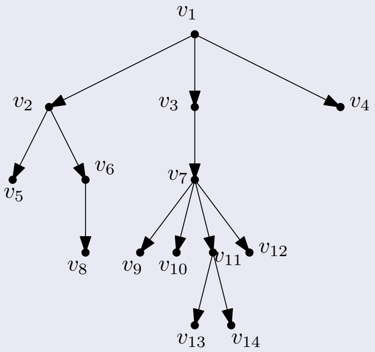


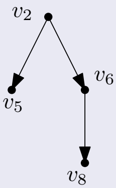
Ορισμός

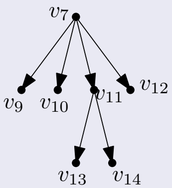
Έστω δέντρο $T = (V, E)$ ένα δέντρο με ρίζα και v μία κορυφή του T. Το υπογράφημα του T το οποίο παράγεται από το σύνολο κορυφών V' που αποτελείται από την v και όλους τους απογόνους της ονομάζεται υποδέντρο του T με ρίζα τη v.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζεται ένα δέντρο με ρίζα T και τα υποδέντρα του με ρίζες τις κορυφές v_2 και v_7.







Δέντρα

Ορισμός

Ονομάζουμε διατεταγμένο δέντρο ένα ζεύγος $T = (T', \prec)$ όπου $T' = (V, E)$ είναι ένα δεντρο με ρίζα και $\prec$ είναι μία διμελής σχέση επί του V τέτοια ώστε:

- Για κάθε κορυφή $v \in V$ με $d^+_{T'}(v) \geq 2$ ο περιορισμός της $\prec$ στο $N^+_{T'}(v)$ είναι ολική διάταξη.
- Για οποιεσδήποτε κορυφές $v, u \in V$ με $v \neq u$, αν $N^-_{T'}(v) \cap N^-_{T'}(u) = \emptyset$ τότε $v \not\prec u$.

Η πρώτη συνθήκη λέει ότι αν μία εσωτερική κορυφή έχει τουλάχιστον δύο παιδιά τότε αυτά διατάσσονται πλήρως με βάση την $\prec$. Η δεύτερη συνθήκη λέει ότι η $\prec$ δεν διατάσσει κορυφές με διαφορετικό πατέρα.

Δέντρα

Συνήθως όταν σχεδιάζουμε ένα διατεταγμένο δέντρο, το παιδιά μίας κορυφής σχεδιάζονται σε σε αύξουσα τάξη (ως προς την $\prec$) από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Με αυτό τον τρόπο η διάταξη ορίζεται έμμεσα από το σχεδιασμό του δέντρου.

Δέντρα

Ορισμός

Ένα διατεταγμένο δέντρο T ονομάζεται m-αδικό δέντρο, αν κάθε κορυφή του έχει εξερχόμενο βαθμό το πολύ m.

Σε ένα m-αδικό δέντρο κάθε κορυφή έχει το πολύ m παιδιά.

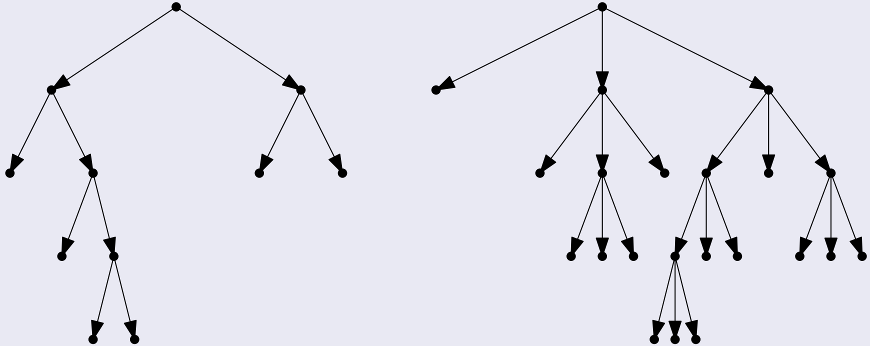
Ορισμός

Ένα διατεταγμένο δέντρο T ονομάζεται γεμάτο m-αδικό δέντρο, αν κάθε εσωτερική κορυφή του έχει εξερχόμενο βαθμό m.

Σε ένα m-αδικό δέντρο κάθε κορυφή έχει ακριβώς m παιδιά ή είναι φύλλο.

Παράδειγμα

Παρακάτω εικονίζεται ένα γεμάτο δυαδικό (2-αδικό) δέντρο (αριστερά) και ένα γεμάτο τριαδικό (3-αδικό) δέντρο (δεξιά).



Δέντρα

Θεώρημα

Για κάθε γεμάτο δυαδικό δέντρο $T = (V, E)$ με t φύλλα και i εσωτερικές κορυφές, ισχύει $i = t - 1$.

Απόδειξη

Έστω $n = |V|$ και $e = |E|$.

Επειδή το υποκείμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα του T είναι δέντρο, ισχύει $e = n - 1 = t + i - 1$.

Επίσης ισχύει $e = \sum_{v \in V} d_T^+(v) = 2i$ (όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή κάθε εσωτερική κορυφή έχει εξερχόμενο βαθμό 2 και κάθε φύλλο έχει εξερχόμενο βαθμό 0).

Από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι $t + i - 1 = 2i$ που ισοδυναμεί με $i = t - 1$. $\square$

Δέντρα

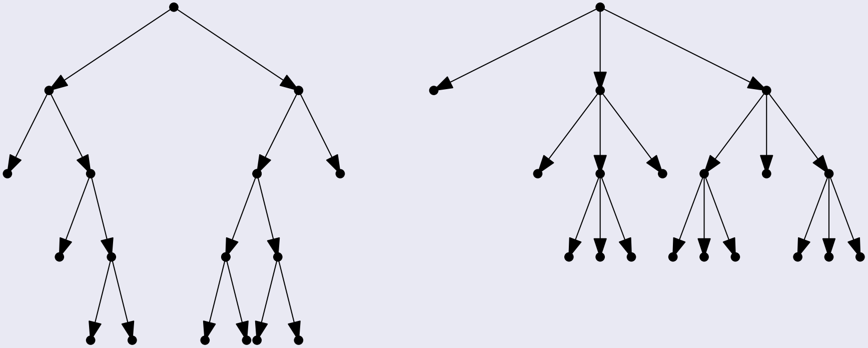
Ορισμός

Ονομάζουμε ύψος ενός δέντρου με ρίζα το μέγιστο μήκος μονοπατιού από τη ρίζα προς κάποιο φύλλο του δέντρου.

Δέντρα

Παράδειγμα

Το δέντρο στα αριστερά έχει ύψος 4 και το δέντρο στα δεξιά έχει ύψος 3.



Θεώρημα

Κάθε γεμάτο δυαδικό δέντρο T με ύψος h έχει τουλάχιστον h εσωτερικές κορυφές και $h+1$ φύλλα.

Απόδειξη

Εφόσον το ύψος του δέντρου T είναι h, υπάρχει μονοπάτι μήκους h από τη ρίζα προς κάποιο φύλλο.

Οι ακμές αυτού του μονοπατιού ξεκινούν από εσωτερικές κορυφές.

Αρα το T έχει τουλάχιστον h εσωτερικές κορυφές, και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι έχει τουλάχιστον $h+1$ φύλλα. $\square$

Δέντρα

Θεώρημα

Κάθε δυαδικό δέντρο T με ύψος h έχει το πολύ 2^h φύλλα.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο h.

Για $h = 0$, το δέντρο δεν περιέχει άλλη κορυφή εκτός από τη ρίζα, η οποία είναι το μοναδικό φύλλο του δέντρου. Άρα το πλήθος των φύλλων είναι $1 = 2^0 = 2^h$.

Συνεπώς ο ισχυρισμός αληθεύει για $h = 0$.

Δέντρα

Απόδειξη (συνέχεια)

Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για κάθε δυαδικό δέντρο με ύψος το πολύ k.

Έστω T ένα δυαδικό δέντρο με ύψος $k+1$ και έστω r η ρίζα του t.

Θεωρούμε τα υποδέντρα του T που έχουν ως ρίζα κάποιο παιδί της r.

Υπάρχουν το πολύ δύο τέτοια υποδέντρα, καθένα από τα οποία είναι δυαδικό δέντρο με ύψος k. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι κάθε τέτοιο υποδέντρο έχει το πολύ 2^k φύλλα.

Επιπλέον κάθε φύλλο του T είναι φύλλο κάποιου από αυτά τα υποδέντρα και αντίστροφα.

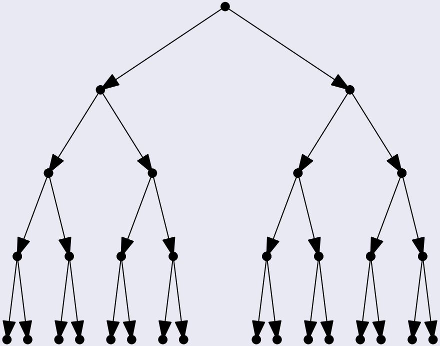
Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς το T έχει το πολύ $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ φύλλα. $\square$

Δέντρα

Παράδειγμα

Το εικονιζόμενο δυαδικό δέντρο ύψος 4 και 16 φύλλα. Το πλήθος των φύλλων είναι το μέγιστο δυνατό με δεδομένο το ύψος του δέντρου.



Θεώρημα

Κάθε δυαδικό δέντρο T με ύψος h έχει το πολύ $2^{h+1} - 1$ κορυφές.

Απόδειξη

Έστω ότι το T έχει i εσωτερικές κορυφές και t φύλλα. Το συνολικό πλήθος κορυφών του T είναι $n = i + t$.

Κατασκευάζουμε ένα γεμάτο δυαδικό δέντρο T', προθέτοντας για κάθε εσωτερική κορυφή v του T η οποία έχει ένα παιδί ένα νέο φύλλο w_v και την ακμή (v, w_v).

Απόδειξη (συνέχεια)

Το T' έχει i εσωτερικές κορυφές (τις ίδιες με το T) και $t' \geq t$ φύλλα.

Επειδή το T' είναι γεμάτο δυαδικό δέντρο, ισχύει $i = t' - 1$.

Επίσης, το T' έχει επίσης ύψος h, άρα από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι $t' \leq 2^h$.

Συνδυάζοντας τά παραπάνω έχουμε ότι

$$n = i + t \leq i + t' = (t' - 1) + t' = 2t' - 1 \leq 2 \cdot 2^h - 1 = 2^{h+1} - 1$$

$\square$

Θεώρημα

Κάθε δυαδικό δέντρο με n κόμβους έχει ύψος τουλάχιστον $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Απόδειξη

Έστω h το ύψος του δέντρου. Τότε

$$
\begin{aligned}
n \leq 2^{h+1} - 1 \quad &\Rightarrow \quad n < 2^{h+1} \\
&\Rightarrow \quad \log_2 n < \log_2 2^{h+1} \\
&\Rightarrow \quad \log_2 n < h + 1 \\
&\Rightarrow \quad \lfloor \log_2 n \rfloor < h + 1 \\
&\Rightarrow \quad \lfloor \log_2 n \rfloor \leq h
\end{aligned}
$$

$\square$

Δέντρα

Η απόδειξη των παρακάτω θεωρημάτων αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα

Για κάθε γεμάτο m-αδικό δέντρο $T = (V, E)$ με t φύλλα και i εσωτερικές κορυφές, ισχύει $i = \frac{t-1}{m-1}$.

Θεώρημα

Κάθε γεμάτο m-αδικό δέντρο T με ύψος h έχει τουλάχιστον h εσωτερικές κορυφές και $h \cdot (m-1) + 1$ φύλλα.