Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Συνεκτικότητα

Ορισμός

Η συνεκτικότητα κορυφών ενός γραφήματος G, η οποία συμβολίζεται με $\kappa(G)$, είναι το ελάχιστο πλήθος κορυφών που πρέπει να διαγραφούν από το G έτσι ώστε το γράφημα που θα προκύψει να μην είναι συνεκτικό ή να έχει μία μόνο κορυφή.

Συνεκτικότητα

Αν $\kappa(G) = k > 0$, τότε

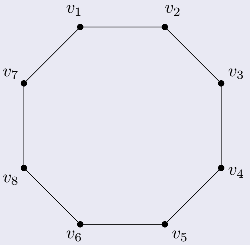
- υπάρχει ενα υποσύνολο κορυφών U του G με $|U| = k$ τέτοιο ώστε το $G - U$ να έχει περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες ή να έχει μία μόνο κορυφή και
- για κάθε υποσύνολο κορυφών W του G με $|W| < k$ το $G - W$ είναι συνεκτικό και έχει τουλάχιστον δύο κορυφές.

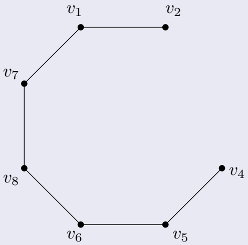
Αν $\kappa(G) = 0$ τότε το G είναι μη συνεκτικό ή έχει μία μόνο κορυφή.

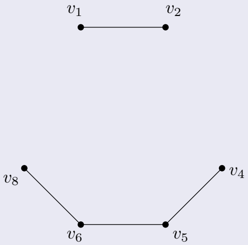
Συνεκτικότητα

Παράδειγμα

Ο κύκλος C_8 έχει συνεκτικότητα κορυφών $\kappa(C_8) = 2$. Αν διαγράψουμε μία κορυφή v_i από το C_8, τότε οι υπόλοιπες κορυφές σχηματίζουν ένα μονοπάτι Hamilton στο $C_8 - v_i$. Συνεπώς το $C_8 - v_i$ είναι συνεκτικό. Αν διαγράψουμε δύο μη γειτονικές κορυφές v_i και v_j από το C_8, τότε το γράφημα $C_8 - \{v_i, v_j\}$ είναι μη συνεκτικό.



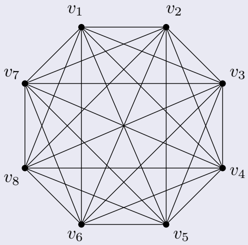


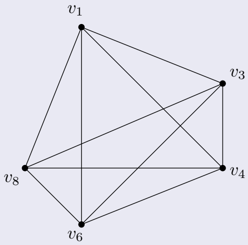


Συνεκτικότητα

Παράδειγμα

Το πλήρες γράφημα K_8 έχει συνεκτικότητα κορυφών $\kappa(K_8) = 7$. Αν διαγράψουμε $k \leq 6$ κορυφές από K_8, τότε το γράφημα που θα προκύψει θα έχει $8 - k \geq 2$ κορυφές, οι οποίες θα συνδέονται ανά δύο με ακμή. Το γράφημα αυτό είναι ισομορφικό με το K_{8-k} και είναι προφανώς συνεκτικό. Αν διαγράψουμε 7 κορυφές από K_8, τότε το γράφημα που θα προκύψει θα έχει μία μόνο κορυφή.





Συνεκτικότητα

Ορισμός

Ένα γράφημα G ονομάζεται k-συνεκτικό, αν $\kappa(G) \geq k$.

Ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό, αν έχει τουλάχιστον $k+1$ κορυφές και το γράφημα που προκύπτει μετά τη διαγραφή οποιωνδήποτε $k-1$ κορυφών από το G είναι συνεκτικό.

Ένα γράφημα είναι 1-συνεκτικό αν έχει τουλάχιστον δύο κορυφές και είναι συνεκτικό.

Ένα γράφημα G είναι 2-συνεκτικό αν έχει τουλάχιστον 3 κορυφές, και για κάθε κορυφή v το γράφημα $G-v$ είναι συνεκτικό.

Συνεκτικότητα

Ορισμός

Η συνεκτικότητα ακμών ενός γραφήματος G, η οποία συμβολίζεται με $\lambda(G)$, είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να διαγραφούν από το G έτσι ώστε το γράφημα που θα προκύψει να μην είναι συνεκτικό ή να έχει μία μόνο κορυφή.

Συνεκτικότητα

Αν $\lambda(G) = \ell > 0$, τότε

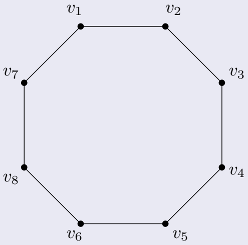
- υπάρχει ενα υποσύνολο ακμών F του G με $|F| = \ell$ τέτοιο ώστε το $G - F$ να έχει περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες και
- για κάθε υποσύνολο ακμών F' του G με $|F'| < \ell$ το $G - F'$ είναι συνεκτικό.

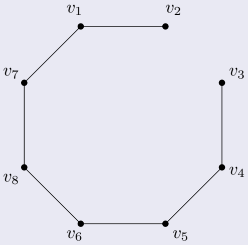
Αν $\lambda(G) = 0$ τότε το G είναι μη συνεκτικό ή έχει μία μόνο κορυφή.

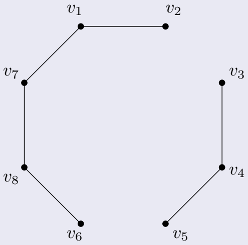
Συνεκτικότητα

Παράδειγμα

Ο κύκλος C_8 έχει συνεκτικότητα ακμών $\lambda(C_8) = 2$. Αν διαγράψουμε μία ακμη e από το C_8, τότε οι υπόλοιπες ακμές σχηματίζουν ένα μονοπάτι Hamilton στο $C_8 - e$. Άρα το $C_8 - e$ είναι συνεκτικό. Αν διαγράψουμε δύο οποιεσδήποτε ακμές e και e' από το C_8, τότε το γράφημα $C_8 - \{e, e'\}$ είναι μη συνεκτικό.







Συνεκτικότητα

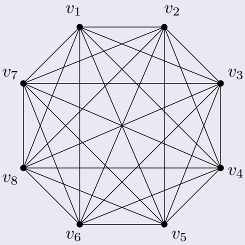
Παράδειγμα

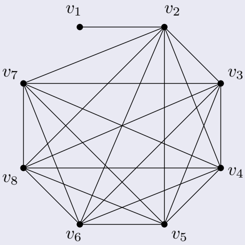
Το πλήρες γράφημα K_8 έχει συνεκτικότητα ακμών $\lambda(K_8) = 7$.

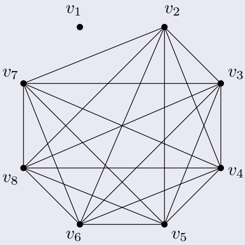
Αν διαγράψουμε $k \leq 6$ ακμές από K_8, τότε το άθροισμα των βαθμών δύο οποιωνδήποτε κορυφών v_i και v_j στο γράφημα G' που θα προκύψει θα είναι τουλάχιστον $7 + 7 - k - 1 \geq 14 - 6 - 1 = 7$ (μόνο η διαγραφή της ακμής $\{v_i, v_j\}$ μειώνει το βαθμό και των δύο κορυφών v_i και v_j κατά ένα). Άρα το G' έχει μονοπάτι Hamilton που συνεπάγεται ότι είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα

Αν διαγράψουμε τις 7 ακμές που προσπίπτουν σε κάποια κορυφή v_i από το K_8, τότε το γράφημα που θα προκύψει θα είναι μη συνεκτικό.







Συνεκτικότητα

Η απόδειξη του παρακάτω λήμματος αφήνεται ως άσκηση.

Λήμμα

Έστω G ένα γράφημα και F ένα σύνολο ακμών με $|F| = \lambda(G)$, τέτοιο ώστε το γράφημα $G - F$ να είναι μη συνεκτικό. Τότε τα άκρα κάθε ακμής $e \in F$ βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - F$.

Ορισμός

Έστω ένα γράφημα G. Συμβολίζουμε με $\delta(G)$ τον ελάχιστο βαθμό ανάμεσα σε όλες τις κορυφές του G.

Συνεκτικότητα

Θεώρημα

Για κάθε γράφημα G ισχύει $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Απόδειξη

Αν $\delta(G) = 0$, τότε το γράφημα είναι μή συνεκτικό ή έχει μία μόνο κορυφή. Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $\lambda(G) = 0$ και άρα ισχύει $\lambda(G) \leq \delta(G)$.

Αν $\delta(G) \geq 1$, τότε αν επιλέξουμε μία κορυφή v του G με βαθμό $\delta(G)$ και διαγράψουμε από το G τις ακμές που προσπίπτουν στη v, το γράφημα που προκύπτει είναι μη συνεκτικό. Αυτό συνεπάγεται ότι $\lambda(G) \leq \delta(G)$. □

Θεώρημα

Για κάθε γράφημα G ισχύει $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Απόδειξη

Αν $\lambda(G) = 0$, τότε το γράφημα είναι μή συνεκτικό ή έχει μία μόνο κορυφή. Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $\kappa(G) = 0$ και άρα ισχύει $\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $\lambda(G) \geq 1$, τότε έστω F ένα υποσύνολο των ακμών του G με $|F| = \lambda(G)$, τέτοιο ώστε το γράφημα $G - F$ να είναι μη συνεκτικό.

Έστω μία οποιαδήποτε ακμή $\{v, u\} \in F$. Κατασκευάζουμε ένα σύνολο κορυφών U το οποίο περιέχει ένα άκρο διαφορετικό από τις v και u για κάθε ακμή του $F - \{v, u\}$.

Ισχύει $|U| \leq |F| - 1 = \lambda(G) - 1 < \lambda(G)$ (όπου η πρώτη ανισότητα ισχύει στην περίπτωση που δύο ακμές του $F - \{v, u\}$ έχουν ένα κοινό άκρο, το οποίο αντιπροσωπεύει και τις δύο αυτές ακμές στο σύνολο U).

Συνεκτικότητα

Απόδειξη (συνέχεια)

Επειδή $v, u \notin U$, οι κορυφές αυτές είναι γειτονικές κορυφές στο γράφημα $G - U$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις, με βάση τις ιδιότητες του $G - U$.

1η Περίπτωση: Το γράφημα $G - U$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε ισχύει $\kappa(G) \leq |U| < \lambda(G)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

2η Περίπτωση: Το $G - U$ είναι συνεκτικό και έχει δύο κορυφές. Τότε το γράφημα $(G - U) - v$ έχει μία μόνο κορυφή.

Όμως $(G - U) - v = G - (U \cup \{v\})$.

Συνεπώς αν από το G διαγραφούν οι κορυφές του συνόλου $U \cup \{v\}$ το γράφημα που προκύπτει έχει μία μόνο κορυφή και άρα
$\kappa(G) \leq |U \cup \{v\}| = |U| + 1 \leq (\lambda(G) - 1) + 1 = \lambda(G)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

3η περίπτωση: Το $G - U$ είναι συνεκτικό και έχει τουλάχιστον τρεις κορυφές.

Τότε μία από τις κορυφές v, u θα πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 2 (αν οι v και u είχαν βαθμό 1 στο $G - U$, τότε δεν υπήρχε μονοπάτι που να συνδέει τις v και u με τις υπόλοιπες κορυφές του $G - U$ και άρα το $G - U$ δεν θα ήταν συνεκτικό).

Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο $d_{G-U}(u) \geq 2$. Τότε, στο γράφημα $(G - U) - u$ η κορυφή v βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από τους υπόλοιπους γείτονες της u στο $G - U$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Ο τελευταίος ισχυρισμός αποδεικνύεται με τον παρακάτω τρόπο:

Παρατηρούμε αρχικά ότι το $(G - U) - v$ είναι υπογράφημα του $G - F$, καθώς κάθε ακμή του F έχει ένα άκρο στο σύνολο $U \cup \{v\}$ και άρα, αν από το G διαγράψουμε τις κορυφές του U και τη v, τότε διαγράφονται και όλες οι ακμές του F.

Συνεπώς αν δύο κορυφές βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα στο $(G - U) - u$, τότε βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα και στο $G - F$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω w ένας γείτονας της u στο γράφημα $G - U$ διαφορετικός από τη v.

Στο γράφημα $G - F$ η κορυφή v βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από την u, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα.

Αντίθετα, η κορυφή w βρίσκεται ίδια συνεκτική συνιστώσα του $G - F$ με τη u.

Συνεπώς η κορυφή w βρίσκεται σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από τη v στο $G - F$, άρα το ίδιο ισχύει και στο γράφημα $(G - U) - u$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς αν από το G διαγραφούν οι κορυφές του συνόλου $U \cup \{u\}$ το γράφημα που προκύπτει έχει δέν είναι συνεκτικό και άρα $\kappa(G) \leq |U \cup \{u\}| = |U| + 1 \leq (\lambda(G) - 1) + 1 = \lambda(G)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Άρα σε κάθε περίπτωση ισχύει $\kappa(G) \leq \lambda(G)$. $\square$

Συνεκτικότητα

Ορισμός

Έστω G ενα γράφημα, v, u δύο κορυφές του G και $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $k \geq 2$, μονοπάτια στο G τα οποία συνδέουν τις v και u. Τα $p_1, p_2, \ldots, p_k$ λέγονται ανεξάρτητα αν δεν έχουν ανά δύο κοινές εσωτερικές κορυφές.

Συνεκτικότητα

Έστω δύο μη γειτονικές κορυφές v και u σε ένα γράφημα G.

Αν υπάρχει ένα σύνολο κορυφών U με $|U| = k$ τετοιο ώστε οι κορυφές v και u να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - U$, τότε είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν περισσότερα από k ανεξάρτητα μονοπάτια μεταξύ v και u, καθώς καθένα από αυτά τα μονοπάτια θα πρέπει να περνάει από μία διαφορετική κορυφή του U.

Συνεκτικότητα

Ο Menger απέδειξε ένα πιο ισχυρό αποτέλεσμα που συσχετίζει το πλήθος κορυφών που διαχωρίζουν δύο μη γειτονικές κορυφές v και u με το πλήθος των ανεξάρτητων μονοπατιών μεταξύ v και u. Το παρακάτω θεώρημα δίνεται χωρίς απόδειξη

Θεώρημα (Menger)

Έστω v και u δύο μη γειτονικές κορυφές ενός γραφήματος G. Τότε, ο ελάχιστος αριθμός κορυφών που πρέπει να διαγραφούν από το G έτσι ώστε οι v και u να βρεθούν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες ισούται με το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονοπατιών μεταξύ v και u.

Συνεκτικότητα

Αν για δύο μη γειτονικές κορυφές v και u ενός γραφήματος G βρούμε ένα σύνολο κορυφών U με $|U| = k$ τέτοιο ώστε οι v και u να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - U$ και k ανεξάρτητα μονοπάτια που να συνδέουν τις κορυφές v και u, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- το ελάχιστο πλήθος κορυφών που πρέπει να διαγραφεί από το G ώστε οι v και u να βρεθούν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες είναι k και
- το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονοπατιών μεταξύ v και u είναι επίσης k.

Συνεκτικότητα

Το θεώρημα του Menger μας εξασφαλίζει ότι για οποιοδήποτε γράφημα G και οποιεσδήποτε μη γειτονικές κορυφές v και u του G, μπορούμε για κάποιον αριθμό k να βρούμε

- ένα σύνολο κορυφών U με $|U| = k$ τέτοιο ώστε οι v και u να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - U$ και
- k ανεξάρτητα μονοπάτια που να συνδέουν τις κορυφές v και u.

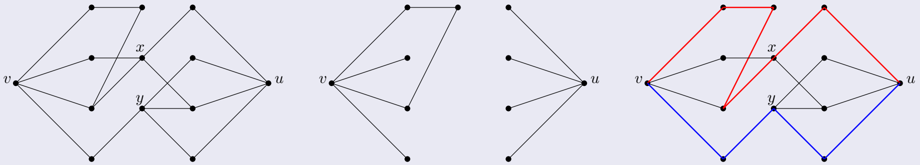
Έχοντας βρει τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- το ελάχιστο πλήθος κορυφών που πρέπει να διαγραφεί από το G ώστε οι v και u να βρεθούν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες είναι k και
- το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονοπατιών μεταξύ v και u είναι επίσης k.

Συνεκτικότητα

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα G οι κορυφές v και u βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $G - \{x, y\}$ και υπάρχουν δύο ανεξάρτητα μονοπάτια που συνδέουν τις v και u.



Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς ο αριθμός 2 είναι το ελάχιστο πλήθος κορυφών που πρέπει να διαγράψουμε από το G έτσι ώστε οι κορυφές v και u βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος που θα προκύψει και επίσης το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων μονοπατιών που συνδέουν τις v και u στο G.

Ανάλογα αποτελέσματα μπορούν να αποδεικτούν στην περίπτωση που εξετάσουμε τις ακμές αντί για τις κορυφές ενός γραφήματος.

Ορισμός

Έστω G ενα γράφημα, v, u δύο κορυφές του G και $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $k \geq 2$, μονοπάτια στο G τα οποία συνδέουν τις v και u. Τα $p_1, p_2, \ldots, p_k$ λέγονται ανεξάρτητα ως προς τις ακμές αν δεν έχουν ανά δύο κοινές ακμές.

Συνεκτικότητα

Έστω δύο οποιεσδήποτε κορυφές v και u σε ένα γράφημα G.

Αν υπάρχει ένα σύνολο ακμών F με $|F| = k$ τετοιο ώστε οι κορυφές v και u να βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G - F$, τότε είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν περισσότερα από k ανεξάρτητα ως προς τις ακμές μονοπάτια μεταξύ v και u, καθώς καθένα από αυτά τα μονοπάτια θα πρέπει να περνάει από μία διαφορετική ακμή του F.

Το παρακάτω θεώρημα, το οποίο δίνεται επίσης χωρίς απόδειξη, συσχετίζει το πλήθος ακμών που διαχωρίζουν δύο κορυφές v και u με το πλήθος των ανεξάρτητων ως προς τις ακμές μονοπατιών μεταξύ v και u.

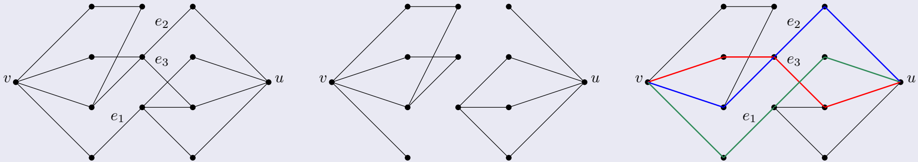
Θεώρημα (Menger)

Έστω v και u δύο κορυφές ενός γραφήματος G. Τότε, ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να διαγραφούν από το G έτσι ώστε οι v και u να βρεθούν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες ισούται με το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων ως προς τις ακμές μονοπατιών μεταξύ v και u.

Συνεκτικότητα

Παράδειγμα

Στο παρακάτω γράφημα G οι κορυφές v και u βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος $G - \{e_1, e_2, e_3\}$ και υπάρχουν τρία ανεξάρτητα ως προς τις ακμές μονοπάτια που συνδέουν τις v και u.



Συνεκτικότητα

Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς ο αριθμός 3 είναι το ελάχιστο πλήθος ακμών που πρέπει να διαγράψουμε από το G έτσι ώστε οι κορυφές v και u βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος που θα προκύψει και επίσης το μέγιστο πλήθος ανεξάρτητων ως προς τις ακμές μονοπατιών που συνδέουν τις v και u στο G.