Διακριτά Μαθηματικά II

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

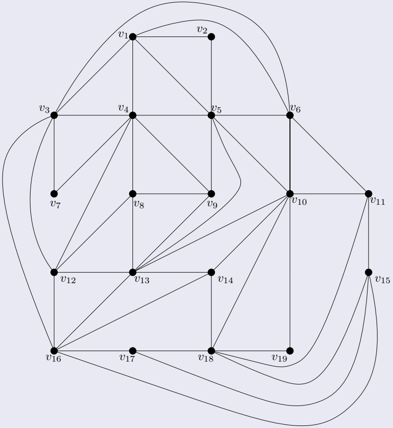
Επίπεδα Γραφήματα

Ορισμός

Ένα γράφημα G ονομάζεται επίπεδο γράφημα αν μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο χωρίς να υπάρχουν ακμές οι οποίες τέμνονται σε σημεία διαφορετικά από τα κοινά τους άκρα.

Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι επίπεδο γράφημα.



Επίπεδα Γραφήματα

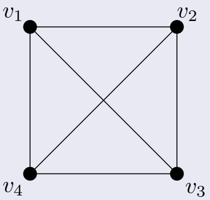
Αν ένα γράφημα έχει τουλάχιστον δύο ακμές, τότε μπορούμε να το σχεδιάσουμε έτσι ώστε κάποιες ακμές του να τέμνονται.

Συνεπώς ένα γράφημα ενδέχεται να είναι επίπεδο, ακόμη και αν το έχουμε σχεδιάσει έτσι ώστε να υπάρχουν ακμές που τέμνονται.

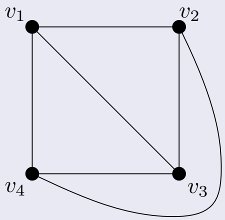
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα

Το γράφημα K_4 είναι επίπεδο γράφημα.



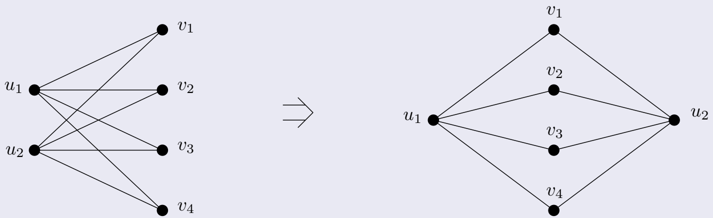
$\Rightarrow$



Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα

Το γράφημα $K_{2,4}$ είναι επίπεδο γράφημα.



Ορισμός

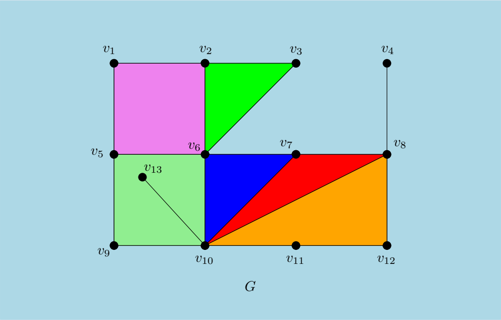
Έστω ένας σχεδιασμός ενός γραφήματος G στο επίπεδο. Ονομάζουμε περιοχή ένα μεγιστικό σύνολο σημείων του επιπέδου τα οποία μπορούν να ενωθούν με γραμμή, η οποία δεν έχει εσωτερικό σημείο το οποίο να ανήκει σε κάποια ακμή του G.

Λέμε ότι μία ακμή ανήκει σε μία περιοχή αν όλα τα σημεία της ακμής βρίσκονται στην περιοχή αυτή.

Παρατηρούμε ότι μία ακμή ενός γραφήματος ανήκει σε μία ή σε δύο περιοχές, σε οποιονδήποτε σχεδιασμό του γραφήματος.

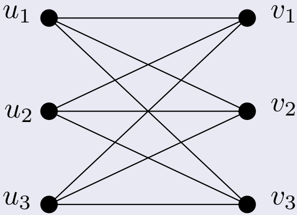
Παράδειγμα

Στο σχεδιασμό του παρακάτω γραφήματος G υπάρχουν 7 περιοχές, οι οποίες είναι χρωματισμένες με διαφορετικά χρώματα. Η περιοχή με το γαλάζιο χρώμα είναι η εξωτερική περιοχή, η οποία εκτείνεται απεριόριστα. Οι ακμές $\{v_4, v_8\}$ και $\{v_{10}, v_{13}\}$ ανήκουν σε μία μόνο περιοχή, ενώ καθεμία από τις υπόλοιπες ακμές ανήκει σε δύο περιοχές.



Παράδειγμα

Το γράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο γράφημα.



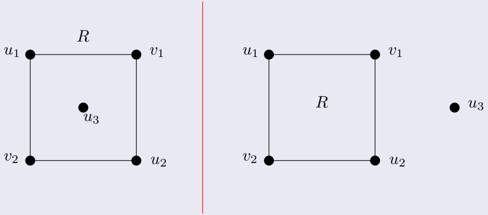
Θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθεσουμε ότι το $K_{3,3}$ είναι επίπεδο και ας θεωρήσουμε έναν σχεδιασμό του στο επίπεδο.

Παράδειγμα (συνέχεια)

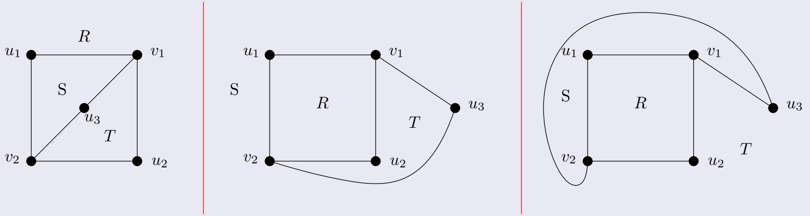
Το $K_{3,3}$ περιέχει το κύκλο u_1, v_1, u_2, v_2, u_1. Οι ακμές αυτού του κύκλου χωρίζουν τα σημεία του επιπέδου σε δύο περιοχές.

Συμβολίζουμε με R την περιοχή του επιπέδου η οποία δεν περιέχει την κορυφή u_3.



Παράδειγμα (συνέχεια)

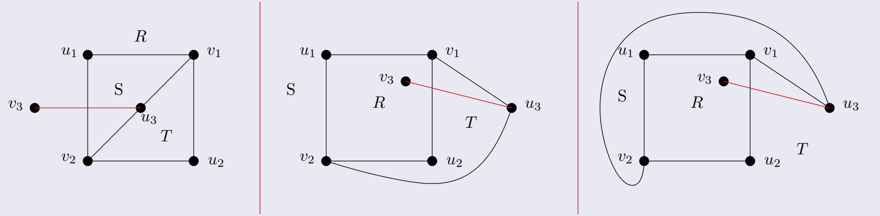
Οι ακμές $\{u_3, v_1\}$ και $\{u_3, v_2\}$ χωρίζουν την περιοχή στην οποία βρίσκεται η u_3 σε δύο περιοχές: την S η οποία περιέχει την u_1 και την T η οποία περιέχει την u_2.



Διακρίνουμε περιπτώσεις για τη θέση της v_3.

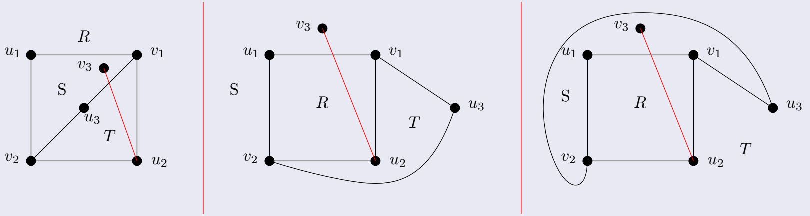
Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν η κορυφή v_3 βρίσκεται στην περιοχή R, τότε επειδή η κορυφή u_3 δεν βρίσκεται στην R και η v_3 δεν είναι κάποια από τις κορυφές στο όριο της R, η ακμή $\{u_3, v_3\}$ τέμνει κάποια ακμή στο όριο της περιοχής R.



Παράδειγμα (συνέχεια)

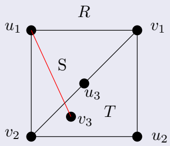
Αν η κορυφή v_3 βρίσκεται στην περιοχή S, τότε επειδή η κορυφή u_2 δεν βρίσκεται στην S και η v_3 δεν είναι κάποια από τις κορυφές στο όριο της S, η ακμή $\{u_2, v_3\}$ τέμνει κάποια ακμή στο όριο της περιοχής S.

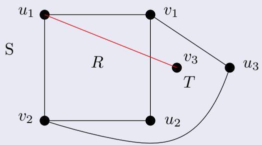


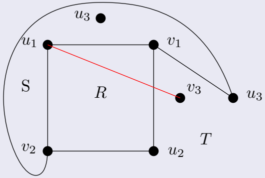
Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν η κορυφή v_3 βρίσκεται στην περιοχή T, τότε επειδή η κορυφή u_1 δεν βρίσκεται στην T και η v_3 δεν είναι κάποια από τις κορυφές στο όριο της T, η ακμή $\{u_1, v_3\}$ τέμνει κάποια ακμή στο όριο της περιοχής T.







Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνεπώς η v_3 δεν μπορεί να βρίσκεται σε καμία από τις R, S και T. Αυτό είναι άτοπο καθώς η ένωση των R, S και T περιέχει όλα τα σημεία του επιπέδου.

Λήμμα

Αν σε ένα γράφημα G ο βαθμός κάθε κορυφής είναι τουλάχιστον 2, τότε υπάρχει κύκλος στο G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 2.

Κατασκευάζουμε μία ακολουθία μονοπατιών $p_1, p_2, p_3, \ldots,$ όπου το p_i περιέχει i κορυφές, με τον παρακάτω τρόπο:

Επιλέγουμε μία κορυφή v και δύο γείτονές της u και w και θέτουμε $p_1 = u$, $p_2 = u, v$ και $p_3 = u, v, w$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για $i \geq 3$, έστω ότι $p_i = x_1, x_2, \ldots, x_i$.

Έστω $U = N_G(x_i) - \{x_{i-1}\}$.

Αν $U \cap \{x_1, \ldots, x_{i-2}\} \neq \emptyset$, τότε υπάρχει κάποιο j, $1 \leq j \leq i-2$, τέτοιο ώστε η κορυφή x_j να είναι γείτονας της x_i.

Η ακολουθία κορυφών $x_j, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_j$ είναι ένας κύκλος στο G

Απόδειξη (συνέχεια)

Αν $U \cap \{x_1, \ldots, x_{i-2}\} = \emptyset$, τότε επιλέγουμε μία οποιαδήποτε κορυφή $s \in U$ και θέτουμε $p_{i+1} = x_1, x_2, \ldots, x_i, s$ (η επιλογή του s είναι πάντα εφικτή, επειδή $|N_G(x_i)| \geq 2$ που συνεπάγεται $|U| \geq 1$).

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω $n = |V|$. Ισχυριζόμαστε ότι για κάποια τιμή του i, $3 \leq i \leq n$, θα βρούμε έναν κύκλο.

Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση θα σχηματίζαμε ένα μονοπάτι p_{n+1} αποτελούμενο από $n+1$ διαφορετικές κορυφές του G, το οποίο είναι άτοπο καθώς το G περιέχει μόνο n κορυφές.

Συνεπώς υπάρχει κύκλος στο G. □

Επίπεδα Γραφήματα

Θεώρημα

Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $v = |V|$ κορυφές και $e = |E|$ ακμές και έστω r το πλήθος των περιοχών σε έναν σχεδιασμό του G στο επίπεδο. Τότε ισχύει $v - e + r = 2$ (τύπος του Euler).

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο $n = v + e$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για $n = 1$, το γράφημα G αποτελείται από μία μοναδική κορυφή και δεν περιέχει ακμές.

Επίσης στο σχεδιασμό του G όλα τα σημεία του επιπέδου ανήκουν στην ίδια περιοχή.

Άρα έχουμε $v = 1$, $e = 0$ και $r = 1$, που συνεπάγεται $v - e + r = 1 - 0 + 1 = 2$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι ο τύπος ισχύει για $n \leq k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$.

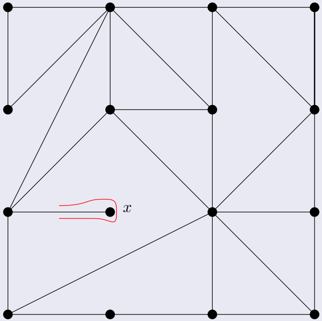
Έστω γράφημα G με $v + e = k + 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Επίπεδα Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

1η περίπτωση: Το G περιέχει τουλάχιστον μία κορυφή x με $d_G(x) = 1$.

Τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στις δύο μεριές της μοναδικής ακμής που προσπίπτει στην x μπορούν να συνδεθούν με μία γραμμή η οποία δεν τέμνει καμία ακμή του G.



Απόδειξη (συνέχεια)

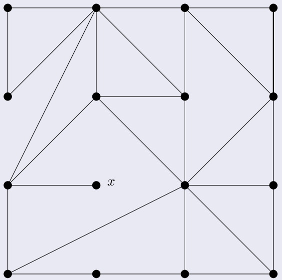
Συνεπώς τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στις δύο μεριές της μοναδικής ακμής που προσπίπτει στην x βρίσκονται στην ίδια περιοχή.

Άρα αν διαγράψουμε την ακμή αυτή, το γράφημα που θα προκύψει θα έχει το ίδιο πλήθος περιοχών.

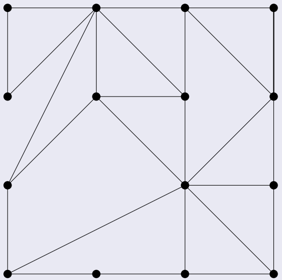
Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε το γράφημα $G' = G - x$.

Το G' έχει $v' = v - 1$ κορυφές, $e' = e - 1$ ακμές και $r' = r$ περιοχές και είναι επίσης συνεκτικό και επίπεδο.



G



$G' = G - x$

Απόδειξη (συνέχεια)

Επίσης για το G' ισχύει
$v' + e' = (v-1) + (e-1) = (v+e) - 2 = (k+1) - 2 = k - 1.$

Απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε
$v' - e' + r' = 2 \Rightarrow (v-1) - (e-1) + r = 2 \Rightarrow v - e + r = 2.$

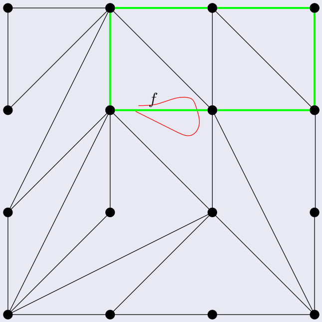
Απόδειξη (συνέχεια)

2η περίπτωση: Για κάθε κορυφή y του G, $d_G(y) \geq 2$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα το γράφημα περιέχει έναν κύκλο.

Στον σχεδιασμό του γραφήματος G, αυτός ο κύκλος αντιστοιχεί σε μια κλειστή γραμμή που χωρίζει τις περιοχές σε δύο κατηγορίες: αυτές που βρίσκονται μέσα στην κλειστή γραμμή και αυτές που βρίσκονται έξω από την κλειστή γραμμή.

Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε ακμή f σε αυτόν το κύκλο. Τα σημεία του επιπέδου που είναι από τη μία μεριά της f βρίσκονται μέσα στην κλειστή γραμμή, ενώ αυτά που είναι από την άλλη μεριά της f βρίσκονται έξω από την κλειστή γραμμή.



Επίπεδα Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

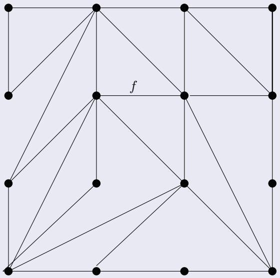
Συνεπώς τα σημεία του επιπέδου που βρίσκονται στις δύο μεριές της f ανήκουν σε διαφορετικές περιοχές.

Άρα αν διαγράψουμε την ακμή f από το G, τότε αυτές οι δύο περιοχές θα ενωθούν.

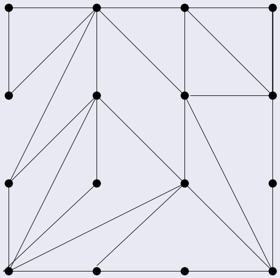
Απόδειξη (συνέχεια)

Θεωρούμε το γράφημα $G' = G - f$.

Το G' έχει $v' = v$ κορυφές, $e' = e - 1$ ακμές και $r' = r - 1$ περιοχές και είναι επίσης συνεκτικό και επίπεδο.



G



$G' = G - f$

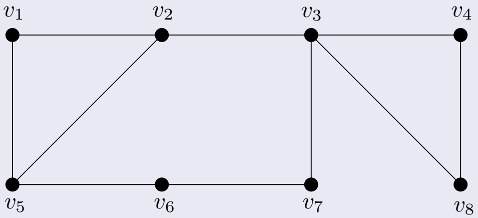
Απόδειξη (συνέχεια)

Επίσης για το G' ισχύει
$v' + e' = v + (e-1) = (v+e) - 1 = (k+1) - 1 = k.$

Απο την επαγωγική υπόθεση έχουμε
$v' - e' + r' = 2 \Rightarrow v - (e-1) + (r-1) = 2 \Rightarrow v - e + r = 2.$ $\square$

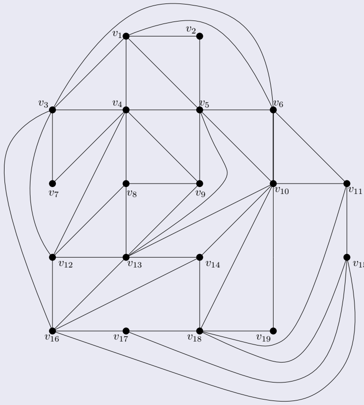
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $v = 8$ κορυφές και $e = 10$ ακμές και ο σχεδιασμός του έχει $r = 4$ περιοχές. Άρα επαληθεύεται ο τύπος του Euler: $v - e + r = 8 - 10 + 4 = 2$.



Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G είναι συνεκτικό επίπεδο γράφημα με $v = 19$ κορυφές και $e = 45$ ακμές και ο σχεδιασμός του έχει $r = 28$ περιοχές. Άρα επαληθεύεται ο τύπος του Euler: $v - e + r = 19 - 45 + 28 = 2$.



Επίπεδα Γραφήματα

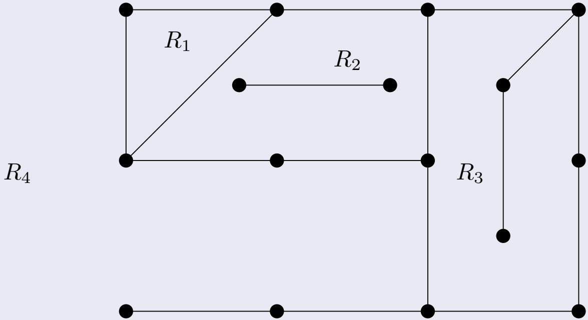
Ορισμός

Έστω ένας σχεδιασμός ενός επίπεδου γραφήματος G στο επίπεδο και R μία περιοχή του επιπέδου στο σχεδιασμό αυτό. Συμβολίζουμε με $b(R)$ το σύνολο των ακμών οι οποίες ανήκουν στην R και σε κάποια άλλη περιοχή, με $i(R)$ τις ακμές που ανήκουν μόνο στην R και με $deg(R) = |b(r)| + 2|i(r)|$ το βαθμό της περιοχής R.

Μία ακμή που ανήκει σε δύο περιοχές συνεισφέρει μία μονάδα στο βαθμό κάθε μίας από αυτές τις περιοχές, ενώ μία ακμή που ανήκει μόνο σε μία περιοχή συνεισφέρει δύο μονάδες στο βαθμό της περιοχής αυτής.

Παράδειγμα

Στο παρακάτω επίπεδο γράφημα G έχουμε $deg(R_1) = 3$, $deg(R_2) = 7$, $deg(R_3) = 10$, $deg(R_4) = 14$.



Λήμμα

Έστω ένας σχεδιασμός στο επίπεδο ενός επίπεδου γραφήματος $G = (V, E)$ με $|E| \geq 2$. Τότε για κάθε περιοχή R ισχύει $deg(R) \geq 3$.

Απόδειξη

Αν όλα τα σημεία του επιπέδου ανήκουν σε μία μοναδική περιοχή R, τότε $i(R) = E$ και $deg(R) = 2 \cdot |E| \geq 2 \cdot 2 = 4 > 3$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Σε αντίθετη περίπτωση για κάθε περιοχή R οι ακμές που διαχωρίζουν την R από την ένωση των υπολοίπων περιοχών σχηματίζουν ένα κύκλο στο G.

Οι ακμές αυτές ανήκουν στο σύνολο $b(R)$.

Επειδή το μήκος οποιουδήποτε κύκλου ενός γραφήματος είναι 3, συμπεραίνουμε ότι $b(R) \geq 3$ και άρα $deg(R) \geq 3$. □

Λήμμα

Έστω ένας σχεδιασμός στο επίπεδο ενός επίπεδου γραφήματος $G = (V, E)$ καί έστω $\mathcal{R}$ το σύνολο των περιοχών στο σχεδιασμό αυτό. Τότε

$$\sum_{R \in \mathcal{R}} deg(R) = 2 \cdot |E|$$

Απόδειξη

Κάθε ακμή του γραφήματος συνεισφέρει είτε από μία μονάδα στους βαθμούς δύο περιοχών είτε δύο μονάδες στο βαθμό μίας περιχής.

Σε κάθε περίπτωση, κάθε ακμή συνεισφέρει δύο μονάδες στο άθροισμα των βαθμών των κορυφών και άρα το άθροισμα αυτό είναι ίσο με $2 \cdot |E|$. □

Επίπεδα Γραφήματα

Θεώρημα

Για κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα G με v κορυφές και $e \geq 2$ ακμές ισχύει: $e \leq 3v - 6$.

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{R}$ το σύνολο των περιοχών σε ένα σχεδιασμό του G και $r = |\mathcal{R}|$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Από τα δύο προηγούμενα λήμματα έχουμε:

$$2e = 2 \cdot |E| = \sum_{R \in \mathcal{R}} deg(R) \geq \sum_{R \in \mathcal{R}} 3 = 3r$$

που συνεπάγεται $r \leq \frac{2}{3}e$.

Από το τύπο του Euler έχουμε $v - e + r = 2$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει $v - e + \frac{2}{3}e \geq 2$ που ισοδυναμεί με $e \leq 3v - 6$. □

Θεώρημα

Το K_5 δεν είναι επίπεδο γράφημα.

Απόδειξη

Το K_5 είναι συνεκτικό και έχει $v = 5$ κορυφές και $e = 10$ ακμές (ισχύει $e \geq 2$).

Επειδή $3v - 6 = 9 < 10 = e$, το K_5 δεν ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος και άρα δεν είναι επίπεδο. $\square$

Επίπεδα Γραφήματα

Παρατηρούμε ότι η συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή.

Πράγματι το γράφημα $K_{3,3}$ έχει $v = 6$ κορυφές και $e = 9$ ακμές και άρα $3v - 6 = 12 > 9 = e$. Ωστόσο όπως έχουμε δείξει το $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο.

Επίπεδα Γραφήματα

Θεώρημα

Σε κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$ υπάρχει μία κορυφή $v \in V$ τέτοια ώστε $d_G(v) \leq 5$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε ότι το Θεώρημα δεν ισχύει. Συνεπώς υπάρχει κάποιο επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε κορυφή $v \in V$, $d_G(v) \geq 6$.

Για μία οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα $G' = (V', E')$ ισχύει επίσης $d_{G'}(v) = d_G(v) \geq 6$, για κάθε $v \in V'$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Τότε $\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) \geq \sum_{v \in V'} 6 = 6 \cdot |V'|$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι $\sum_{v \in V'} d_{G'}(v) = 2|E'|$.

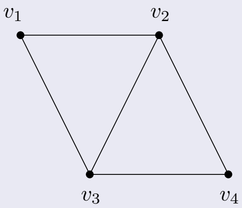
Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει $2|E'| \geq 6 \cdot |V'|$ που συνεπάγεται $|E'| \geq 3 \cdot |V'|$. Αυτό είναι άτοπο επειδή G' είναι επίπεδο συνεκτικό γράφημα (καθώς είναι συνεκτική συνιστώσα ενός επίπεδου γραφήματος) και άρα θα πρέπει $|E'| \leq 3 \cdot |V'| - 6$. □

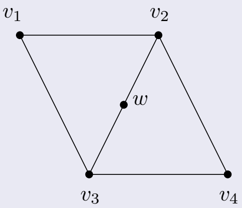
Ορισμός

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και $e = \{v, u\} \in E$ μία ακμή του G. Ονομάζουμε στοιχειώδη υποδιαίρεση της ακμης e την αντικατάσταση της e από δύο ακμές $\{v, w\}$ και $\{w, u\}$, όπου $w \notin V$ είναι μία νέα κορυφή. Το γράφημα που παράγεται από την υποδιαίρεση της ακμής e είναι το $G' = (V \cup \{w\}, (E - \{e\}) \cup \{\{v, w\}, \{w, u\}\})$.

Παράδειγμα

Το γράφημα στα δεξιά προκύπτει από το γράφημα στα αριστερά με υποδιαίρεση της ακμής $\{v_2, v_3\}$.





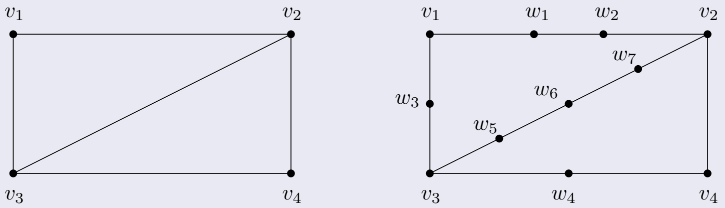
Ορισμός

Έστω G, G' δύο γραφήματα. Το G' ονομάζεται υποδιαίρεση του G αν υπάρχει ακολουθία γραφημάτων $G_1, G_2, \ldots, G_k$, $k \geq 1$, τέτοια ώστε $G_1 = G$, $G_k = G'$ και για κάθε i, όπου $1 \leq i \leq k-1$ το G_{i+1} να προκύπτει από το G_i με στοιχειώδη υποδιαίρεση κάποιας ακμής του G_i.

Επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα

Το γράφημα στα δεξιά είναι υποδιαίρεση του γραφήματος στα αριστερά:



Επίπεδα Γραφήματα

Είναι προφανές ότι αν ένα γράφημα G είναι επίπεδο, τότε το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε υπογράφημά του.

Επίσης ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν οποιαδήποτε υποδιαίρεσή του είναι επίπεδο γράφημα.

Συνεπώς, οι υποδιαιρέσεις του K_5 και του $K_{3,3}$ δεν είναι επιπέδα γραφήματα και το ίδιο ισχύει και για οποιοδήποτε γράφημα έχει κάποιο υπογράφημα το οποίο είναι ισομορφικό με μία υποδιαίρεση του του K_5 και του $K_{3,3}$.

Επίπεδα Γραφήματα

Η τελευταία πρόταση δίνει μία αναγαία συνθήκη, η οποία πρέπει να ικανοποιείται έτσι ώστε ένα γράφημα G να είναι επίπεδο.

Ο Πολωνός μαθηματικός Kuratowski απέδειξε ότι η συνθήκη αυτή είναι και ικανή.

Το παρακάτω Θεώρημα δίνεται χωρίς απόδειξη:

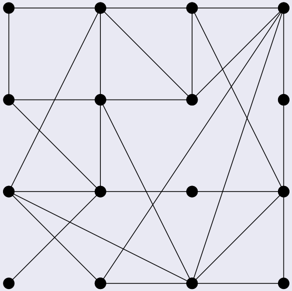
Θεώρημα (Kuratowski)

Ένα γράφημα G είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν περιέχει υπογράφημα ισομορφικό με κάποια υποδιαίρεση του K_5 ή του $K_{3,3}$.

Επίπεδα Γραφήματα

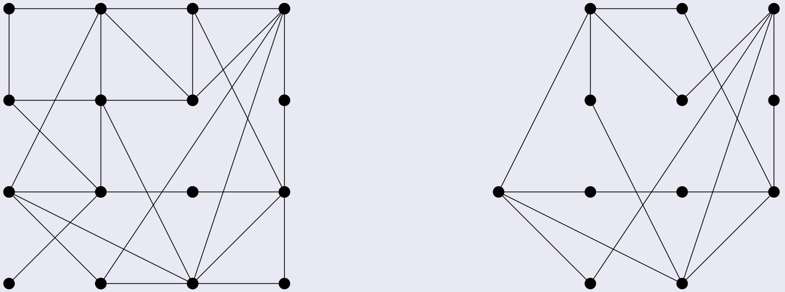
Παράδειγμα

Το παρακάτω γράφημα G δεν είναι επίπεδο.



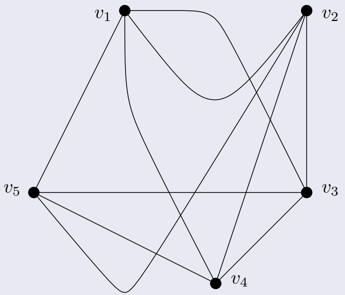
Παράδειγμα

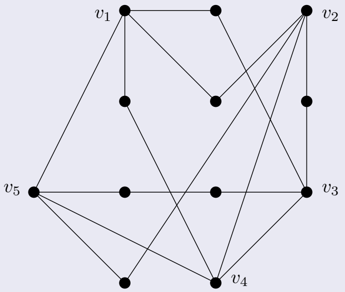
Το G έχει υπογράφημα το G' που εικονίζεται στο δεξιά.



Παράδειγμα

Το G' είναι ισομορφικό μέ μία υποδιαίρεση του K_5.





Θεώρημα

Για κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$, ισχύει $\chi(G) \leq 6$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών n του G.

Για $n = 1$ το γράφημα έχει μία μοναδική κορυφή, που μπορεί να χρωματιστεί με ένα χρώμα. Άρα $\chi(G) = 1 \leq 6$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = k$, δηλαδή για κάθε επίπεδο γράφημα G με $n = k$ κορυφές, ισχύει $\chi(G) \leq 6$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ένα επίπεδο γράφημα G με $n = k + 1$ κορυφές.

Το G περιέχει μία κορυφή v με $d_G(v) \leq 5$.

Το γράφημα $G - v$ είναι επίσης επίπεδο και έχει k κορυφές. Από επαγωγική υπόθεση, $\chi(G - v) \leq 6$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω ένας χρωματισμός c του $G - v$ με 6 χρώματα. Επειδή η v έχει το πολύ 5 γείτονες, υπάρχει ένα χρώμα z τέτοιο ώστε για κάθε $u \in N_G(v)$, $c(u) \neq z$.

Η ανάθεση χρωμάτων c', όπου $c'(u) = c(u)$ αν $u \in V - \{v\}$ και $c'(v) = z$ είναι ένας χρωματισμός του G με 6 χρώματα. □

Επίπεδα Γραφήματα

Έχει αποδειχτεί το παρακάτω πιο ισχυρό θεώρημα (το οποίο είναι γνωστό ως το `Θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων'):

Θεώρημα

Για κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$, ισχύει $\chi(G) \leq 4$.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού έχει γίνει με τη βοήθεια υπολογιστή, καθώς εξετάζει ένα πολύ μεγάλο πλήθος περιπτώσεων και είναι πρακτικά αδύνατο να ελεγχθεί από το άνθρωπο.

Για αυτό το λόγο η επάρκεια αυτής της απόδειξης αμφισβητήθηκε από πολλούς μαθηματικούς.

Μπορούμε να αποδείξουμε ένα πιο ασθενές αποτέλεσμα:

Θεώρημα

Για κάθε επίπεδο γράφημα $G = (V, E)$, ισχύει $\chi(G) \leq 5$.

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με επαγωγή στο πλήθος των κορυφών n του G.

Για $n = 1$ ισχύει $\chi(G) = 1 \leq 5$.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = k$. Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$.

Έστω ένα επίπεδο γράφημα G με $n = k + 1$ κορυφές.

Απόδειξη (συνέχεια)

Το G περιέχει μία κορυφή v με $d_G(v) \leq 5$.

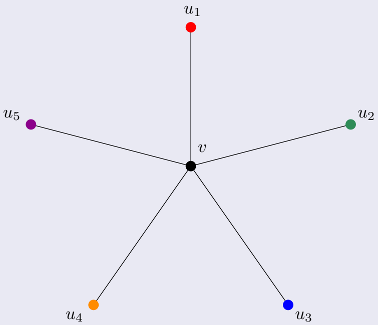
Το γράφημα $G - v$ είναι επίσης επίπεδο και έχει k κορυφές. Από επαγωγική υπόθεση, $\chi(G - v) \leq 5$.

Έστω ένας χρωματισμός c του $G - v$ με 5 χρώματα.

Αν υπάρχει κάποιο χρώμα z από τα 5 διαθέσιμα χρώματα δεν έχει ανατεθεί σε κανέναν γείτονα της v, τότε η ανάθεση χρωμάτων c', όπου $c'(u) = c(u)$ αν $u \in V - \{v\}$ και $c'(v) = z$, είναι ένας χρωματισμός του G με 5 χρώματα.

Απόδειξη (συνέχεια)

Σε αντίθετη περίπτωση θα πρέπει να ισχύει $d_G(v) = 5$. Έστω u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 οι γείτονες της v σε ωρολογιακή φορά και c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 αντίστοιχα τα χρώματά τους (τα οποία είναι ανά δύο διαφορετικά).



Απόδειξη (συνέχεια)

Συμβολίζουμε με $H_{i,j}$ το υπογράφημα του G που παράγεται από το σύνολο κορυφών $U_{i,j} = \{u \in V \mid c(u) = c_i$ ή $c(u) = c_j\}$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχουν δείκτες $p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, όπου $p \neq q$, τέτοιοι ώστε οι κορυφές u_p και u_q ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $H_{p,q}$.

Απόδειξη (συνέχεια)

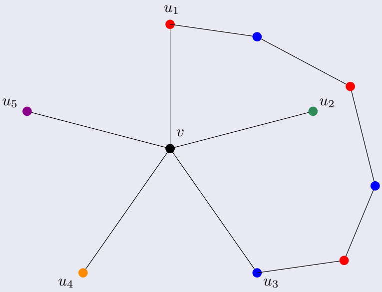
Αν οι u_1 και u_3 ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $H_{1,3}$, τότε ο ισχυρισμός μας ισχύει για $p = 1$ και $q = 3$.

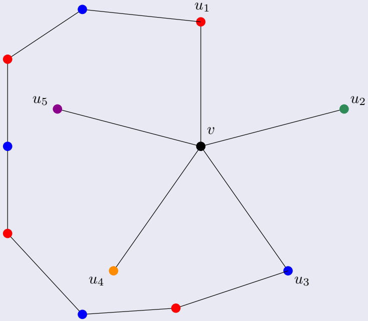
Σε αντίθετη περίπτωση υπάρχει ένα μονοπάτι $u_1, x_1, x_2 \ldots, x_k, u_3$ το οποίο συνδέει τις u_1 και u_3 στο $H_{1,3}$ (και στο G), τέτοιο ώστε $c(x_i) \in \{c_1, c_3\}$ για κάθε i, $1 \leq i \leq k$.

Τότε, η ακολουθία κορυφών $v, u_1, x_1, x_2 \ldots, x_k, u_3, v$ είναι ένας κύκλος στο γράφημα G.

Απόδειξη (συνέχεια)

Επιπλέον, μία από τις κορυφές u_2, u_4 βρίσκεται μέσα στον κύκλο, ενώ η άλλη βρίσκεται έξω από τον κύκλο.





Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς κάθε μονοπάτι που συνδέει τις u_2, u_4 θα πρέπει να περιέχει μία κορυφή του κύκλου.

Άρα δεν υπάρχει μονοπάτι στο G που να συνδέει τις u_2, u_4 και κάθε κορυφή του να έχει χρώμα c_2 ή c_4.

Αυτό συνεπάγεται ότι κορυφές u_2 και u_4 ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $H_{2,4}$.

Σε αυτή την περίπτωση ο ισχυρισμός μας ισχύει για $p = 2$ και $q = 4$.

Επίπεδα Γραφήματα

Απόδειξη (συνέχεια)

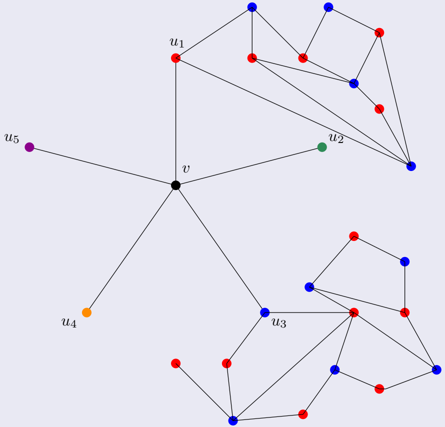
Έστω $W \subset U_{p,q}$ το σύνολο των κορυφών του $H_{p,q}$ που ανήκουν στην ίδια συνιστώσα με τη u_p.

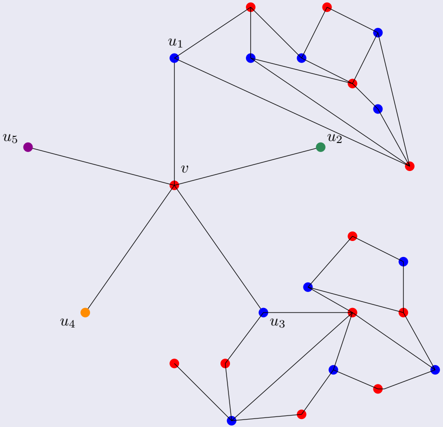
Θεωρούμε την παρακάτω ανάθεση χρωμάτων c' στις κορυφές του G η οποία προκύπτει από το χρωματισμό c αν εναλλάξουμε τα χρώματα c_p και c_q στις κορυφές του W και χρωματίσουμε με το χρώμα c_p την κορυφή v_1:

- $c'(x) = c(x)$, αν $x \in V - (W \cup \{v\})$
- $c'(x) = c_p$, αν $x \in W$ και $c(x) = c_q$
- $c'(x) = c_q$, αν $x \in W$ και $c(x) = c_p$
- $c'(v) = c_p$

Απόδειξη (συνέχεια)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα παράδειγμα κατασκευής του c' για $p = 1$ και $q = 3$.





Απόδειξη (συνέχεια)

Θα δείξουμε ότι για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$, ισχύει $c'(x) \neq c'(y)$.

Αρχικά εξετάζουμε τις ακμές που δεν έχουν άκρο τη v.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$ με $x, y \in V - (W \cup \{v\})$, ισχύει $c'(x) = c(x)$, $c'(y) = c(y)$ και $c(x) \neq c(y)$, επειδή η $\{x, y\}$ είναι ακμή του γραφήματος $G - v$. Συνεπώς $c'(x) \neq c'(y)$.

Για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$ με $x \in W$ και $y \in V - (W \cup \{v\})$, ισχύει $c'(x) \in \{c_p, c_q\}$ και $c'(y) \notin \{c_p, c_q\}$ (καθώς αν ίσχυε $c'(y) \in \{c_p, c_q\}$ η y θα βρισκόταν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του $H_{p,q}$ με τη x και άρα θα ήταν στοιχείο του W). Συνεπώς $c'(x) \neq c'(y)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$ με $x, y \in W$, ισχύει $c(x) \neq c(y)$, επειδή η $\{x, y\}$ είναι ακμή του γραφήματος $G - v$.

Συνεπώς ισχύει $c(x) = c_p$ και $c(y) = c_q$, που συνεπάγεται $c'(x) = c_q$ και $c'(y) = c_p$, ή $c(x) = c_q$ και $c(y) = c_p$, που συνεπάγεται $c'(x) = c_p$ και $c'(y) = c_q$.

Σε κάθε περίπτωση $c'(x) = c(y)$ και $c'(y) = c(x)$.

Συνεπώς $c'(x) \neq c'(y)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Απομένει να εξετάσουμε τις ακμές που προσπίπτουν στη v.

Για κάθε κορυφή $y \in N_G(v) - \{u_p\}$ ισχύει $y \notin W$ και άρα $c'(y) = c(y) \neq c_p = c'(v)$.

Επίσης $c(u_p) = c_q \neq c_p = c'(v)$.

Άρα για κάθε ακμή $\{x, y\} \in E$ με $x = v$ ισχύει $c(y) \neq c(v)$.

Απόδειξη (συνέχεια)

Συνεπώς η ανάθεση χρωμάτων c' είναι ένας χρωματισμός των κορυφών του G με 5 χρώματα. □