Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ

Χρήστος Νομικός

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

MMXXIII

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα

Λογική είναι η επιστήμη η οποία ασχολείται με τους *συλλογισμούς*.

Συλλογισμός ονομάζεται μια διαδικασία της σκέψης, η οποία από ένα σύνολο υποθέσεων εξάγει ένα συμπέρασμα.

Μαθηματική Λογική

Παράδειγμα

Ο παρακάτω είναι ένας έγκυρος συλλογισμός (οι προτάσεις πάνω από τη γραμμή είναι οι υποθέσεις και η πρόταση κάτω από τη γραμμή είναι το συμπέρασμα):

Κάθε Έλληνας είναι Ευρωπαίος
Ο Περικλής είναι Έλληνας

Ο Περικλής είναι Ευρωπαίος

Επειδή οι δύο υποθέσεις στον παραπάνω συλλογισμό είναι αληθείς και ο συλλογισμός είναι έγκυρος, μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε ότι και το συμπέρασμα είναι αληθές.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο συλλογισμός αυτός έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{array}{l} \text{Κάθε A είναι B} \\ \text{O X είναι A} \\ \hline \text{O X είναι B} \end{array}$$

το οποίο σε μαθηματική μορφή γράφεται:

$$\begin{array}{l} A \subseteq B \\ X \in A \\ \hline X \in B \end{array}$$

Παράδειγμα

Ο παρακάτω συλλογισμός έχει την ίδια μορφή με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος:

Κάθε Έλληνας είναι Ευρωπαίος
Ο Μέσι είναι Έλληνας

Ο Μέσι είναι Ευρωπαίος

Ο συλλογισμός αυτός είναι επίσης έγκυρος, παρότι η μία υπόθεση και το συμπέρασμα είναι ψευδή: Ένας έγκυρος συλλογισμός δεν μας λέει ότι οι υποθέσεις και το συμπέρασμα πρέπει να είναι αληθή, αλλά μας εγγυάται ότι αν οι υποθέσεις είναι αληθείς, τότε το ίδιο θα ισχύει και για το συμπέρασμα. Αν ο Μέσι ήταν Έλληνας, τότε θα ήταν Ευρωπαίος και θα μπορούσαμε να εξάγουμε αυτό το συμπέρασμα από τον παραπάνω συλλογισμό.

Παράδειγμα

Ο παρακάτω συλλογισμός έχει επίσης την ίδια μορφή με αυτόν του προηγούμενου παραδείγματος:

Κάθε Έλληνας είναι Ευρωπαίος
Ο Φερστάπεν είναι Έλληνας

Ο Φερστάπεν είναι Ευρωπαίος

Ο συλλογισμός αυτός είναι επίσης έγκυρος, αν και το συμπέρασμα είναι αληθές παρότι δεν αληθεύει μια από τις δύο υποθέσεις: Ένας έγκυρος συλλογισμός δεν αποκλείει το ενδεχόμενο να αληθεύει το συμπέρασμα χωρίς να αληθεύουν οι υποθέσεις.

Παράδειγμα

Ένας συλλογισμός της παρακάτω μορφής δεν είναι έγκυρος:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Κάθε A είναι B}\\ \text{O X είναι B}\end{array}}{\text{O X είναι A}}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ένας τέτοιος συλλογισμός ενδέχεται να μας οδηγήσει σε ψευδή συμπεράσματα, στην περίπτωση που οι υποθέσεις του αληθεύουν, όπως φαίνεται παρακάτω:

Κάθε φυσικός αριθμός είναι πραγματικός αριθμός
Ο 3.14 είναι πραγματικός αριθμός

Ο 3.14 είναι φυσικός αριθμός

Παράδειγμα (συνέχεια)

Ο παρακάτω συλλογισμός επίσης δεν είναι έγκυρος, παρότι το συμπέρασμα που προκύπτει είναι αληθές:

Κάθε φυσικός αριθμός είναι πραγματικός αριθμός
Ο 10 είναι πραγματικός αριθμός

Ο 10 είναι φυσικός αριθμός

(Η αλήθεια μιας πρότασης, δεν καθιστά ορθή την επιχειρηματολογία με την οποία αποδεικνύεται. Αλλιώς, στα μαθηματικά δεν θα είχαν νόημα ασκήσεις που ζητούν 'να αποδειχτεί ότι ...')

Συνοψίζοντας τις παρατηρήσεις από τα προηγούμενα παραδείγματα:

- Ένας έγκυρος συλλογισμός εξασφαλίζει ότι στην περίπτωση που αληθεύουν όλες οι υποθέσεις του, αληθεύει αναγκαστικά και το συμπέρασμα.
- Ένας έγκυρος συλλογισμός δεν λέει ότι θα πρέπει αναγκαστικά να αληθεύουν οι υποθέσεις και το συμπέρασμά του.
- Ένας έγκυρος συλλογισμός δεν λέει ότι όταν αληθεύει το συμπέρασμα, αναγκαστικά θα πρέπει να αληθεύουν και οι υποθέσεις του.
- Αν οι υποθέσεις ενός συλλογισμού δεν αληθεύουν, τότε ο συλλογισμός αυτός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαπιστώσουμε το αν αληθεύει ή όχι το συμπέρασμά του.
- Αν το συμπέρασμα ενός συλλογισμού είναι αληθές, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι και ο συλλογισμός είναι έγκυρος.

Η επιστήμη της Λογικής μελετά τους συλλογισμούς, δηλαδή αναζητά κανόνες μέσω των οποίων μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα από υποθέσεις.

Ένα συναφές ερώτημα είναι το εξής: με δεδομένο ένα σύνολο από κανόνες που περιγράφουν έγκυρους συλλογισμούς, είναι αυτό το σύνολο πλήρες, δηλαδή μπορούμε μέσω αυτών των κανόνων να εξάγουμε όλα τα συμπεράσματα που προκύπτουν από ένα σύνολο υποθέσεων;

Όπως αναφέραμε, ένας συλλογισμός είναι έγκυρος αν στην περίπτωση που οι υποθέσεις αληθεύουν, τότε αληθεύει αναγκαστικά και το συμπέρασμα.

Συνεπώς για να χαρακτηρίσουμε ένα συλλογισμό ως έγκυρο θα πρέπει να έχουμε έναν συστηματικό τρόπο για να χαρακτηρίζουμε τις προτάσεις που εμπλέκονται ως αληθείς ή ψευδείς.

Οι προτάσεις της φυσικής γλώσσας πολλές φορές είναι διφορούμενες ή περιέχουν ασάφειες.

Επίσης υπάρχουν προτάσεις οι οποίες εκφράζουν επιθυμίες, απορίες, θαυμασμό, ..., και οι οποίες δεν μπορούν να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς:

- Τι ωραία μέρα!
- Τι ώρα είναι;
- Μπράβο Χάρρυ!
- Ποιος Θανάσης;
- Όχι άλλο κάρβουνο!
- Μακάρι να είχα ένα παγωτό!

Υπάρχουν επίσης προτάσεις οι οποίες δεν μπορουν να χαρακτηριστούν αληθείς ή ψευδείς για βαθύτερα αίτια:

- Είμαι μια ψευδής πρόταση

Για τη συστηματική μελέτη των έγκυρων κανόνων συλλογισμού απαιτείται η χρήση μιας γλώσσας πιο απλής από τη φυσική, με αυστηρά καθορισμένους συντακτικούς κανόνες.

Μαθηματική Λογική

Συνοψίζοντας, οι στόχοι της Λογικής είναι οι παρακάτω:

- Η κατασκευή μιας τυπικής γλώσσας για την διατύπωση προτάσεων. Οι προτάσεις που μας ενδιαφέρουν θα πρέπει να μεταφράζονται ως προτάσεις αυτής της τυπικής γλώσσας.
- Η εύρεση ενός συστηματικού τρόπου για την ανάθεση τιμών αλήθειας στις προτάσεις της τυπικής γλώσσας. Αυτό μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε πότε μια πρόταση αποτελεί λογική συνέπεια ενός συνόλου προτάσεων.
- Η εύρεση συντακτικών κανόνων για εξαγωγή συμπερασμάτων. Οι κανόνες αυτοί μας επιτρέπουν να αποδεικνύουμε μια πρόταση από ένα σύνολο υποθέσεων. Ένας κανόνας είναι έγκυρος, αν το συμπέρασμα που εξάγει είναι λογική συνέπεια των υποθέσεών του. Οι κανόνες που θα επιλέξουμε θέλουμε εκτός από έγκυροι να είναι και πλήρεις: κάθε λογική συνέπεια ενός συνόλου υποθέσεων θέλουμε να αποδεικνύεται με βάση τους κανόνες.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Η Προτασιακή Λογική είναι μια λογική με περιορισμένη εκφραστική δυνατότητα, ωστόσο αποτελεί την βάση για πιο εκφραστικές λογικές, όπως είναι η Πρωτοβάθμια Λογική.

Στην Προτασιακή Λογική μπορούμε να εκφράσουμε σύνθετες προτάσεις, οι οποίες σχηματίζονται χρησιμοποιώντας ειδικά συνδετικά σύμβολα που αντιστοιχούν σε συνδετικές λέξεις της φυσικής γλώσσας, όπως το 'δεν', το 'και' το (διαζευκτικό) 'ή', το 'αν ... τότε ...' και το 'αν και μόνο αν'.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Το αλφάβητο της Προτασιακής Λογικής αποτελείται από τα παρακάτω σύμβολα:

- τις προτασιακές μεταβλητές $p_0, p_1, p_2 \ldots$.
- τους λογικούς συνδέσμους $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (ονομάζονται αντίστοιχα άρνηση, σύζευξη, διάζευξη, συνεπαγωγή, ισοδυναμία).
- τα βοηθητικά σύμβολα (και) (αριστερή και δεξιά παρένθεση).

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Οι προτασιακές μεταβλητές χρησιμοποιούνται για να συμβολίζουμε προτάσεις της φυσικής γλώσσας στη γλώσσα της Προτασιακής Λογικής:

Για παράδειγμα μπορούμε με τις προτασιακές μεταβλητές $p0, p1, p2, p3$ να συμβολίσουμε τις παρακάτω προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

- το τραπέζι είναι τετράγωνο.
- το τραπέζι είναι άσπρο.
- το άλογο είναι άσπρο.
- η θάλασσα είναι βαθιά.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Η εκφραστική δυνατότητα της προτασιακής λογικής είναι περιορισμένη.

Για τη διατύπωση μαθηματικών προτάσεων χρειαζόμαστε μια λογική με μεγαλύτερη εκφραστική δυνατότητα.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Στα μαθηματικά οι προτάσεις που διατυπώνουμε αναφέρονται σε αντικείμενα (π.χ. αριθμούς) και περιγράφουν ιδιότητες των αντικειμένων αυτών ή σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων.

Στην προτασιακή λογική χρησιμοποιούμε προτασιακές μεταβλητές για να αναπαραστήσουμε συμβολικά τις προτάσεις. Ωστόσο το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται μια πρόταση και η ιδιότητα που αποδίδεται στο αντικείμενο αυτό, δεν αποτυπώνονται στη συμβολική αναπαράσταση της πρότασης.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα

Έστω ότι οι προτάσιακές μεταβλητές p, q, r συμβολίζουν τις παρακάτω προτάσεις:

- p: ο αριθμός 2 είναι πρώτος
- q: ο αριθμός 3 είναι πρώτος
- r: ο αριθμός 2 είναι άρτιος

Οι προτάσεις p και r αναφέρονται στον ίδιο αριθμό, ενώ οι προτάσεις p και q αποδίδουν την ίδια ιδιότητα σε δύο αριθμούς. Ωστόσο η πληροφορία αυτή χάνεται κατά την αναπαράσταση των προτάσεων αυτών με προτασιακές μεταβλητές.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα

Έστω ότι οι προτάσιακές μεταβλητές $p0, p1, p2, p3$ να συμβολίζουν τις παρακάτω προτάσεις της φυσικής γλώσσας:

- το τραπέζι είναι τετράγωνο.
- το τραπέζι είναι άσπρο.
- το άλογο είναι άσπρο.
- η θάλασσα είναι βαθιά.

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτες προτάσεις αναφέρονται στο ίδιο αντικείμενο, ενώ η δεύτερη και η τρίτη αποδίδουν την ίδια ιδιότητα σε δύο διαφορετικά αντικείμενα. Αυτό το γεγονός ωστόσο δεν μπορεί να απεικονιστεί στην προτασιακή λογική.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Στα μαθηματικά διατυπώνουμε καθολικές προτάσεις, οι οποίες δηλώνουν ότι κάτι είναι αληθεύει για οποιοδήποτε αντικείμενο.

Στην προτασιακή λογική δεν μπορούμε γενικά να αναπαραστήσουμε μια καθολική πρόταση η οποία δηλώνει ότι κάθε αντικείμενο έχει μια ιδιότητα με τρόπο που να απεικονίζει τη σχέση αυτής της πρότασης με τις αντίστοιχες επιμέρους προτάσεις, καθεμία από τις οποίες δηλώνει ότι ένα συγκεκριμένο αντικείμενο έχει την ιδιότητα αυτή.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα

Έστω ότι οι προτάσιακές μεταβλητές $p_0, p_1, p_2, \ldots$ συμβολίζουν αντίστοιχα τις προτάσεις '*ο αριθμός 0 έχει την ιδιότητα I*', '*ο αριθμός 1 έχει την ιδιότητα I*', '*ο αριθμός 2 έχει την ιδιότητα I*', ...

Πώς θα μπορούσαμε να αναπαραστήσουμε την πρόταση '*κάθε αριθμός έχει την ιδιότητα I*' ως μια πρόταση ϕ της προτασιακής λογικής έτσι ώστε η ϕ να είναι αληθής αν και μόνο αν οι προτασιακές μεταβλητές $p_0, p_1, p_2, \ldots$ είναι όλες αληθείς;

Η απάντηση είναι ότι κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό.

Παράδειγμα (συνέχεια)

Πράγματι, για οποιαδήποτε πρόταση ϕ της προτασιακής λογικής υπάρχει κάποια προτασιακή μεταβλητή p_i ανάμεσα στις $p_0, p_1, p_2, \ldots$ που δεν εμφανίζεται στη ϕ (το πλήθος των μεταβλητών που εμφανίζεται στην ϕ θα πρέπει να είναι πεπερασμένο, ενώ οι προτασιακές μεταβλητές $p_0, p_1, p_2, \ldots$ είναι άπειρες).

Έστω v η ανάθεση αληθοτιμών η οποία αναθέτει την τιμή A σε κάθε προτασιακή μεταβλητή και v' η ανάθεση αληθοτιμών που αναθέτει την τιμή Ψ στην p_i και την τιμή A σε όλες τις υπόλοιπες προτασιακές μεταβλητές.

Επειδή οι v και v' διαφέρουν μόνο στην τιμή της p_i η οποία δεν εμφανίζεται στη ϕ, ισχύει $\overline{v}(\phi) = \overline{v'}(\phi)$.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα (συνέχεια)

Οι προτάσεις $p_0, p_1, p_2, \ldots$ όλες αληθείς με βάση τη v, άρα θα πρέπει να ισχύει $\overline{v}(\phi) = \mathrm{A}$.

Η πρόταση p_i είναι ψευδής με βάση την α'. Άρα δεν ισχύει ότι όλες οι προτάσεις $p_0, p_1, p_2, \ldots$ όλες αληθείς με βάση τη v' και συνεπώς θα πρέπει $\overline{v'}(\phi) = \Psi$.

Καταλήξαμε σε άτοπο, καθώς όπως έχουμε δείξει θα πρέπει $\overline{v}(\phi) = \overline{v'}(\phi)$.

Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει πρόταση ϕ της προτασιακής λογικής η οποία να είναι αληθής αν και μόνο αν η προτάσεις $p_0, p_1, p_2, \ldots$ είναι όλες αληθείς

Παράδειγμα (συνέχεια)

Στην πραγματικότητα η ζητούμενη πρόταση ϕ θα πρέπει να οριστεί ως η άπειρη σύζευξη όλων των προτασιακών μεταβλητών $p_0, p_1, p_2, \ldots,$ η οποία ωστόσο δεν αποτελεί πρόταση της προτασιακής λογικής.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Τέλος ορισμένοι αποδεικτικοί κανόνες που εφαρμόζουμε στις μαθηματικές αποδείξεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν στην προτασιακή λογική.

Πρωτοβάθμια Λογική (άτυπη περιγραφή)

Παράδειγμα

Από τις προτάσεις '*κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι περιττός*' και '*ο 5 είναι πρώτος αριθμός μεγαλύτερος του 2*' μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα '*ο 5 είναι περιττός αριθμός*'.

Ωστόσο ο παραπάνω συλλογισμός δεν μπορεί να γίνει στην προτασιακή λογική.

Για να αναπαραστήσουμε τις τρεις προτάσεις θα χρησιμοποιήσουμε τρεις διαφορετικές προτασιακές μεταβλητές. p, q, r. Ωστόσο από το γεγονός ότι αληθεύουν οι p, q δεν μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρσμα ότι αληθεύει η r.