ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ: 2023-24
ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Χ.ΝΟΜΙΚΟΣ

2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 1

Βρείτε το χρόνο εκτέλεσης $\mathtt{T}_M(m,n)$ της μηχανής Turing M του παραδείγματος 36.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Για κάθε κατάσταση v, υπολογίστε το πλήθος των βημάτων που εκτελεί η μηχανή βρισκόμενη στην κατάσταση v, ως συνάρτηση των m και n.

Άσκηση 2

(α) Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k, η συνάρτηση n^k είναι χρονικά-κατασκευάσιμη.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση 2^n είναι χρονικά-κατασκευάσιμη.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\lfloor \log n \rfloor$ δεν είναι χρονικά-κατασκευάσιμη.

(δ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $n \cdot \lfloor \log n \rfloor$ είναι χρονικά-κατασκευάσιμη.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Στην απάντηση των υποερωτημάτων (α), (β) και (δ) δε χρειάζεται να δώσετε πλήρη περιγραφή των μηχανών Turing που υπολογίζουν τις συναρτήσεις n^k, 2^n και $n \cdot \lfloor \log n \rfloor$, παρά μόνο μία υψηλού επιπέδου περιγραφή της λειτουργίας τους.

Άσκηση 3

Έστω $L_{prime} = \{1^p \mid p \text{ είναι πρώτος αριθμός}\}$. Σχεδιάστε μία μη ντετερμινιστική μηχανή Turing η οποία να αποφασίζει το συμπλήρωμα $\overline{L_{prime}}$ της L_{prime}.

Άσκηση 4

Έστω μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, S)$. Συμβολίζουμε με d_M τον βαθμό μη ντετερμινισμού της M, ο οποίος ισούται με το μέγιστο πλήθος επιλογών που έχει η M σε κάποιο βήμα της:

$$d_M = \max\{|\delta(q, \sigma_1, \ldots, \sigma_k)| \mid q \in K, \sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma\}$$

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M = (K, \Sigma, \delta, S)$ με $d_M > 2$ υπάρχει μια μη ντετερμινιστική μηχανή Turing $M' = (K', \Sigma, \delta', S)$, τέτοια ώστε

(i) $d_{M'} = \lceil \frac{d_M}{2} \rceil$,

(ii) $M'(x) = M(x)$, για κάθε $x \in \Sigma^*$ και

(iii) $\mathtt{T}_{M'}(n) \leq 2 \cdot \mathtt{T}_{M(n)}$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), αποδείξτε ότι αν $L \in \mathbf{NTIME}(f(n))$, τότε υπάρχει μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M τέτοια ώστε $d_M \leq 2$, η οποία αποφασίζει την L και λειτουργεί σε χρόνο $\mathcal{O}(f(n))$.

Άσκηση 5

Δείξτε ότι κάθε γλώσσα $L \in \mathbf{P}$ τέτοια ώστε $L \neq \emptyset$, $L \neq \Sigma^*$ είναι $\mathbf{P}$-πλήρης ως προς $\leq_p$.

Να παραδοθούν μέχρι τις 26/4/2024.