Μάθημα 9

*** 3/5/18 ***

Κωδικοποίηση πηγής

Πομπός → ΚΑΝΑΛΙ → Δέκτης

↑ πηγή και κωδικοποιητής

Κώδικες:
- Ευκρινείς
- Μονοσήμαντοι
- Στιγμιαία Αποκωδικοποιήσιμοι (ΣΑ)

* Δεν ισχύει η προθεματική ιδιότητα

Αν π.χ φτάσω στο κωδικό σύμβολο 8 μπορώ να πω ότι μέχρι το 5 είναι αυτό το σύμβολο και μετά αυτό

Παράδειγμα

Σύμβολα	Κώδικας 1	Κώδικας 2	Κώδικας 3	Κώδικας 4
a_1	00	10	10	1
a_2	01	100	100	01
a_3	01	1010	1000	001
a_4	11	1100	1100	0001)

Κώδικας 1: Μη ευκρινής (λόγω a_2, a_3)

Κώδικας 2: Μη μονοσήμαντος

(π.χ. $a_3 a_1 \rightarrow 101010$
$a_1 a_3 \rightarrow 101010$)

Κώδικας 3: Μονοσήμαντος
π.χ. $a_2 a_1 a_3 \rightarrow 100\,1\,01000$
Μή Σ.Α.

Κώδικας 4: Σ.Α.

Μέσο μήκος κωδικής λέξης : $\Lambda = \sum_i \pi_i \lambda_i$ → πιθανότητα εμφάνισης του συμβόλου a_i $(\pi(a_i))$

Θεώρημα Kraft

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη Σ.Α. κώδικα με r κωδικά σύμβολα για την πηγή πληροφορίας $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, $\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_q\}$ είναι:

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$$

Απόδειξη

Έστω $C(a_i)$ η κωδική λέξη για το a_i

Έστω $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_q$

Μήκος κωδικής λέξης l_1 για την $C(a_1)$
↓
μήκος κωδικής λέξης

πόσες κωδικές λέξεις μήκους l_1 μπορώ να πάρω; : r^{l_1} επιλογές

Για την $C(a_2)$ με μήκος κωδικής λέξης l_2 έχω r^{l_2} επιλογές

* Δεν πρέπει να ισχύει η προθεματική ιδιότητα μεταξύ $C(a_1)$ και $C(a_2)$

$\underbrace{\underbrace{01001}_{C(a_1)\ \text{μήκος}\ l_1}110}_{C(a_2)\ \text{μήκος}\ l_2} \longrightarrow r^{l_2 - l_1}$

Επιλογές για τη $C(a_2)$ για Σ.Α. κώδικα:

$r^{l_2} - r^{l_2 - l_1}$ (Γιατί από όλες δεν θέλω τα ~~[illegible]~~ $r^{l_2 - l_1}$)

Συνεχίζοντας για τη $C(a_3)$ έχω: $r^{l_3} - r^{l_3 - l_2} - r^{l_3 - l_1}$ επιλογές

Για τη $C(a_i)$: $r^{l_i} - r^{l_i - l_{i-1}} - r^{l_i - l_{i-2}} - \ldots - r^{l_i - l_1}$ επιλογές

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\pi_i) - \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\tau_i) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log(\pi_i) \leq -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\tau_i)$$

$$\Leftrightarrow H(A) \leq -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\tau_i)$$

$$\Leftrightarrow H(A) \leq -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma^{-\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_j}}\right)$$

$$\Leftrightarrow H(A) \leq -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\sigma^{-\lambda_i}) + \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}\left[\sum_{j=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_i}\right]$$

$$\Leftrightarrow H(A) \leq \underbrace{\operatorname{Log}(\sigma)}_{1 \text{ αν η βάση είναι } \sigma} \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \lambda_i + \left[\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i\right] \operatorname{Log}\left[\sum_{j=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_i}\right]$$

$$\Leftrightarrow H(A) \leq \Lambda + \operatorname{Log}\left[\sum_{i=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_i}\right]$$

Θεώρημα Kraft: $\sum_{i=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_i} \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Log}\left[\sum_{i=1}^{\rho} \sigma^{-\lambda_i}\right] \leq 0$

$H(A) \leq \Lambda$

κάτω φράγμα του ΣΑΚ.

Η ισότητα ισχύει αν $\lambda_i = -\operatorname{Log}(\pi_i)$

- Άνω φράγμα για το $\Lambda = \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \lambda_i$

$$-\operatorname{Log}(\pi_i) \leq \lambda_i \leq \operatorname{Log}(\pi_i) + 1 \Leftrightarrow$$

$$-\sum_{i=1}^{\pi} \pi_i \operatorname{Log}(\pi_i) \leq \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \lambda_i \leq -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \operatorname{Log}(\pi_i) + \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \Leftrightarrow$$

$$H(A) \leq \Lambda \leq H(A) + 1$$

ν-οστή επέκταση

$A = \{a, b\}$

$A^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$

• Για τη ν-οστή επέκταση της πηγής: $H(A^\nu) \leq L \leq H(A^\nu) + 1 \Leftrightarrow$

$$\nu H(A) \leq L \leq \nu H(A) + 1 \Leftrightarrow$$

$$H(A) \leq \frac{L}{\nu} \leq H(A) + \frac{1}{\nu}$$

Για $\nu \to +\infty$: $\boxed{H(A) \leq \Lambda \leq H(A)}$

Για να κατασκευάσω κώδικα πρέπει να εξασφαλιστεί η ύπαρξη τουλάχιστον μίας κωδικής λέξης για κάθε αi:

$$\left.\begin{array}{l} r^{l_1} \geq 1 \\ r^{l_2} - r^{l_2 - l_1} \geq 1 \\ r^{l_3} - r^{l_3 - l_2} - r^{l_3 - l_2} \geq 1 \\ \vdots \\ r^{l_q} - r^{l_q - l_{q-1}} - \dots - r^{l_q - l_1} \geq 1 \end{array}\right\} \text{Πολ/ζω την } i\text{-οστή ανισότητα με } r^{-l_i} \iff \begin{array}{l} r^{-l_1} \leq 1 \\ r^{-l_2} + r^{l_1} \leq 1 \\ \vdots \\ r^{-l_q} + r^{-l_{q-1}} + \dots + r^{-l_1} \leq 1 \end{array}$$

Αν ισχύει η τελευταία τότε ισχύουν όλες

Άρα $\sum_{i=1}^{q} r^{-l_i} \leq 1$.

Αυτό ισχύει για Σ.Α κώδικες όπως και για μονοσήμαντους κώδικες (η απόδειξη του είναι πιο σύνθετα - θεώρημα McMillan)

"SOS"

Πρώτο Θεώρημα του Shannon

Έστω πηγή πληροφορίας $A=\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p\}$ που κωδικοποιείται από Σ.Α. κώδικα συμβόλων $\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\sigma\}$ με κωδικές λέξεις $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

Το μέσο μήκος κωδικής λέξης $\Lambda = \sum_{i=1}^{p} \pi_i l_i$ μπορεί να προσεγγίσει όσο είναι επιθυμητό το κάτω του φράγμα που είναι η εντροπία της πηγής.

έχει να κάνει με την επέκταση της πηγής.

Άλλη διατύπωση: Κωδικοποιώντας τη ν-οστή επέκταση της πηγής για $\nu \to +\infty$ υπάρχει Σ.Α. κώδικας με μέσο μήκος κωδικής λέξης την εντροπία της πηγής $H(A) = -\sum_i \pi_i \operatorname{Log}(\pi_i)$

Πρέπει νδο
- $\Lambda \geq H(A)$
- Σε επεκτάσεις της πηγής $\Lambda_\nu \simeq H(A^\nu)$

Απόδειξη: Υποθέτω εναλλακτική κατανομή για την Α; έστω T_A:

$$\tau_i = \frac{\sigma^{-\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{p} \sigma^{-\lambda_i}}, \quad 0 \leq \tau_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{p} \tau_i = 1.$$

$$KL(\Pi_A // T_A) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i \operatorname{Log}\left(\frac{\pi_i}{\tau_i}\right) \geq 0$$

Απομένει να υπολογιστεί τα βέλτιστα λ_i για τα οποία το $\Lambda = \sum_{i=1}^{p} \pi_i \lambda_i$ ελαχιστοποιεί-
ται $\min_{\lambda_i} \left\{ \sum_{i=1}^{p} \pi_i \lambda_i \right\}$ υπό τον περιορισμό $\sum_{i=1}^{p} \sigma^{-\lambda_i} \leq 1$.

$$J(\pi_i, \lambda_i) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i \lambda_i + \kappa \left(\sum_{i=1}^{p} \sigma^{-\lambda_i} - 1 \right)$$

Το πρώτο θεώρημα τού Shannon μας δίνει μέσο μήκος κωδικής λέξης, αλλά όχι πώς να το πιάσουμε.

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = 0 \iff \pi_i + \kappa(-1) \cdot \sigma^{-\lambda_i} \cdot \ln(\sigma) = 0$$

$$\iff \pi_i - \kappa \sigma^{-\lambda_i} \ln(\sigma) = 0$$

$$\iff \boxed{\sigma^{-\lambda_i} = \frac{\pi_i}{\kappa \ln(\sigma)}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \kappa} = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} \sigma^{-\lambda_i} - 1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} \sigma^{-\lambda_i} = 1$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} \frac{\pi_i}{\kappa \ln(\sigma)} = 1$$

$$\iff \frac{1}{\kappa \ln(\sigma)} \overbrace{\sum_{i=1}^{p} \pi_i}^{1} = 1$$

$$\iff \boxed{\kappa \ln(\sigma) = 1} \quad (2)$$

$(1) \wedge (2)$: $\sigma^{-\lambda_i} = \pi_i \iff \boxed{\lambda_i = -\log(\pi_i)} \longrightarrow$ βέλτιστα

Ασκήσεις από pdf επάνω στο θεώρημα τού Shannon