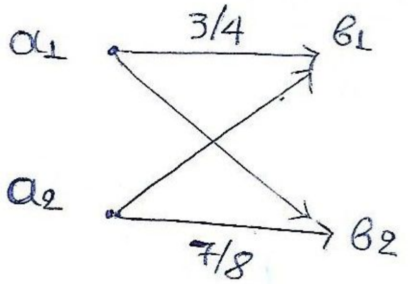
Μάθημα 8

26/4/18

Παράδειγμα



$$\Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/8 & 7/8 \end{bmatrix}$$

$P(a_1) = \frac{2}{3}$

$P(a_2) = \frac{1}{3}$

Προκύπτει ότι:

$P(a_1|b_1) = \frac{12}{13}$

$P(a_2|b_1) = \frac{1}{13}$

$P(a_1|b_2) = \frac{4}{11}$

$P(a_2|b_2) = \frac{7}{11}$

Πριν λάβει ο δέκτης B κάποιο σύμβολο, η μέση αβεβαιότητα που έχει είναι: $H(A) = 0{,}918$ bits/σύμβολο.

Πώς μεταβάλλεται η αβεβαιότητα αν ο δέκτης εμφανίσει το b_j;

$$H(A/b_j) = -\sum_i p(a_i/b_j) \log[P(a_i/b_j)]$$

Έστω ότι ο δέκτης λαμβάνει το b_2

$H(A/b_2) = 0{,}946$ bits/σύμβολο ?!

Αρχικά $p(a_1) = \frac{2}{3}$

πλησιάζει στο 1/2

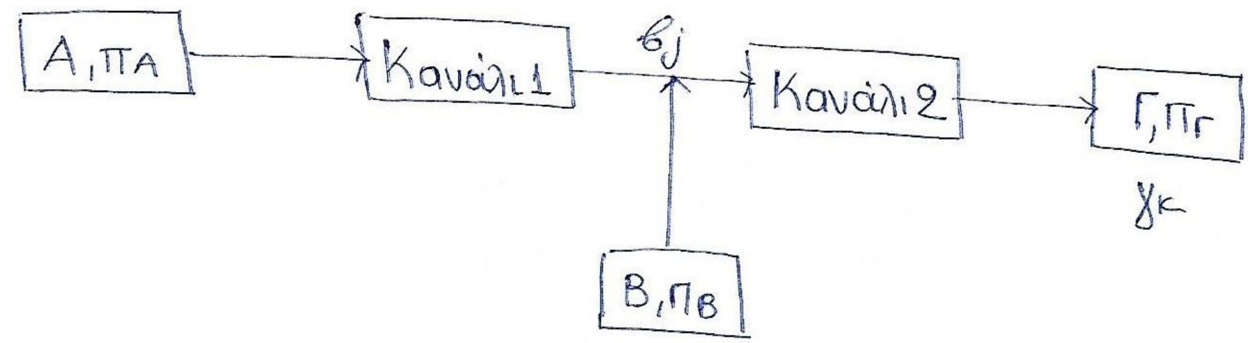
$\uparrow$

Λαμβάνοντας το b_2: $p(a_1/b_2) = \frac{4}{11} < \frac{2}{3} = p(a_1)$

$$H(A) \geq H(A/B)$$

$$H(A/B) = \underbrace{p(b_1)}_{\text{συντελεστής βάρους}} \cdot H(A/b_1) + \underbrace{p(b_2)}_{\text{συντελεστής βάρους}} \cdot H(A/b_2) = \sum_j p(b_j)\, H(A/b_j) \leq \underbrace{H(A)}_{\text{εντροπία πηγής}}$$

Αλυσίδες καναλιών

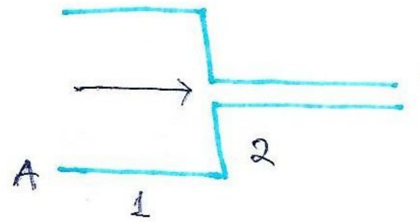


$I(A,\Gamma) = H(A) - H(A|\Gamma)$

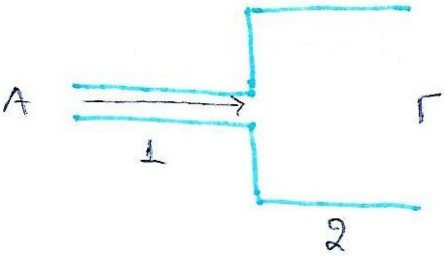
$I(A,B) = H(A) - H(A|B)$

Ισχύει πάντα: $\boxed{I(A,B) \geq I(A,\Gamma)}$

Προσομοίωση με ροή ρευστού:



$I(A,B) > I(A,\Gamma)$



$I(A,\Gamma) = I(A,B)$

$\boxed{I(A,B) - I(A,\Gamma) \geq 0}$

Απόδειξη: $I(A,B) - I(A,\Gamma) = H(A) - H(A|B) - [H(A) - H(A|\Gamma)] = H(A|\Gamma) - H(A|B)$

$= -\sum_i \sum_k \pi(\alpha_i, \gamma_k) \log[\pi(\alpha_i/\gamma_k)] + \sum_i \sum_j \pi(\alpha_i, \beta_j) \log[\pi(\alpha_i/\beta_j)]$

$\overset{\text{με άθροιση}}{=} -\sum_i \sum_j \sum_k \pi(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \log[\pi(\alpha_i/\gamma_k)] + \sum_i \sum_j \sum_k$

$+ \sum_i \sum_j \sum_k \pi(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \log[\pi(\alpha_i/\beta_j)] =$

$\sum_i \sum_j \sum_k \pi(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \log\left[\frac{\pi(\alpha_i/\beta_j)}{\pi(\alpha_i/\gamma_k)}\right]$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)\,\pi(\beta_j,\gamma_k)\, \mathrm{Log}\left[\frac{\pi(a_i/\beta_j)}{\pi(a_i/\gamma_k)}\right]$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k \pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)\, \mathrm{Log}\left[\frac{\pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)}{\pi(a_i,\gamma_k)}\right]$$

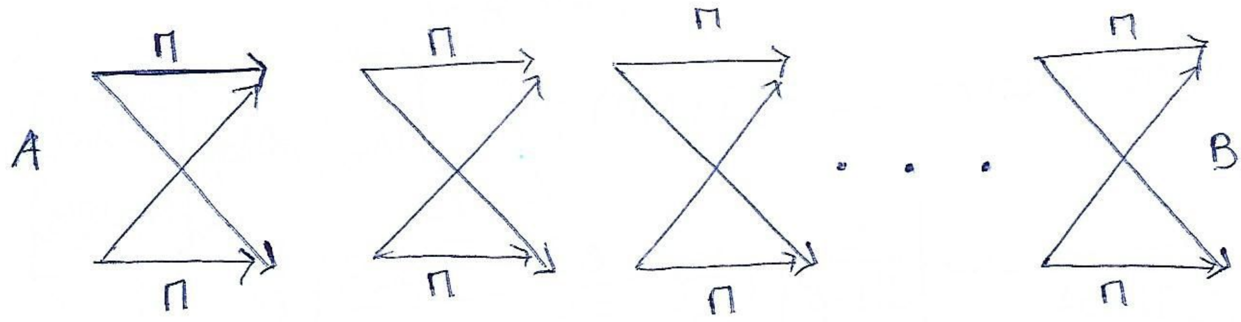
Ισχύει:
$\pi(a_i/\beta_j) = \pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)$
Τα κανάλια λειτουργ
ανεξάρτητα.

$$= \sum_j \sum_k \pi(\beta_j,\gamma_k) \sum_i \pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)\, \mathrm{Log}\left[\frac{\pi(a_i/\beta_j,\gamma_k)}{\pi(a_i,\gamma_k)}\right]$$

$$= \sum_j \sum_k \pi(\beta_j,\gamma_k)\cdot KL(\pi(A/\beta_j,\gamma_k)//\pi(A,\gamma_k)) \geq 0$$

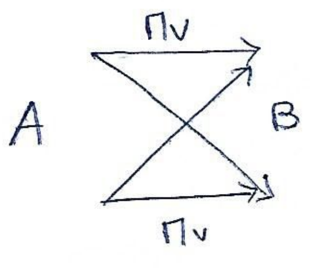
Το 1^{o} κανάλι πάντα θα περιορίζει την χωρητικότητα των άλλων.

Αλυσίδα δυαδικών και συμμετρικών καναλιών



, με $\pi \geq \frac{1}{2}$

$$\Pi(B/A) = \begin{bmatrix} \pi_\nu & 1-\pi_\nu \\ 1-\pi_\nu & \pi_\nu \end{bmatrix}, \text{ με } \pi_\nu = \frac{1+(2\pi-1)^\nu}{2}$$



Είδαμε ότι η χωρητικότητα του BSC είναι: $C = 1 + H(\pi_\nu) = 1 - \pi_\nu \mathrm{Log}(\pi_\nu) - (1-\pi_\nu)\log(1-\pi$

Τι γίνεται αν $\nu \to +\infty$

$$\lim_{\nu \to +\infty} \Pi_\nu = \lim_{\nu \to +\infty} \left[\frac{1 + (2\pi - 1)^\nu}{2} \right] = \frac{1}{2} + \lim_{\nu \to +\infty} \frac{(2\pi-1)^\nu}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\nu \to +\infty} C = 1 + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Συνεχές κανάλι - Συνεχής ροή πληροφορίας

$$\boxed{A, \Pi_A} \longrightarrow \boxed{\text{ΚΑΝΑΛΙ}} \longrightarrow \boxed{B, \Pi_B}$$

$A \sim N(0, \sigma_A)$

$$P_A(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_A} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_A^2}}$$

Γενικά: $B = \kappa \cdot A + \lambda$

Εδώ: $\lambda = 0$: $B = \kappa \cdot A$

$B \sim N(0, \sigma_B^2)$

$$P_B(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_B} e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma_B^2}}$$

Αντίστοιχα με τις διακριτές τ.μ. η $I(A,B) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{AB}(\alpha,\beta) \log\left[\frac{P_{AB}(\alpha,\beta)}{P_A(\alpha) P_B(\beta)}\right] d\alpha\, d\beta$

$$P_{AB}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi\sigma_A\sigma_B\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\alpha^2}{\sigma_A^2} + \frac{\beta^2}{\sigma_B^2} - \frac{2\rho\alpha\beta}{\sigma_A\sigma_B}\right)\right]$$

Υπενθύμιση: Πολυδιάστατη Gaussian : $(x \in \mathbb{R}^d)$

$$P(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}} \exp\left[(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right], \quad X \sim N(\mu, \Sigma)$$

$\mu \in \mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$

Εδώ $d=2$: $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \rho\sigma_A\sigma_B \\ \rho\sigma_A\sigma_B & \sigma_B^2 \end{bmatrix}$

$$\rho = \frac{E[AB]}{\sigma_A \sigma_B}$$ → συντελεστής συσχέτισης των A, B

$$E[AB] = \iint ab\, p_{AB}(a,b)\, da\, db$$

$$I(A,B) = -\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{AB}(a,b)\, da\, db}_{1} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho^2)}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{AB}(a,b)\left[\frac{a^2}{\sigma_A^2} + \frac{b^2}{\sigma_B^2} - \frac{2ab}{\rho\sigma_A\sigma_B}\right] da\, db}_{0} = -\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)$$

"SOS" η απόδειξη ότι κάνει 0

- $\rho = 0 \Rightarrow I(A,B) = 0$
- $\rho = 1 \Rightarrow I(A,B) \to +\infty$

Περίπτωση Τυχαίου θορύβου

$B = A + n$, με $n \sim N(0, \sigma_n)$

$$\rho = \frac{E[AB]}{\sigma_A \sigma_B}$$

$$E[AB] = E[A(A+n)] = E[A^2 + An] = E[A^2] + E[An] = \sigma_A^2 + E[A]\cancelto{0}{E[n]} = \sigma_A^2$$

Άρα $\rho = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A \sigma_B} = \frac{\sigma_A}{\sigma_B}$

Αποδεικνύεται ότι: $E[B^2] = \sigma_B^2 = \sigma_A^2 + \sigma_n^2$

$$I(A,B) = -\frac{1}{2}\log(1-\rho^2) = -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}\right) = -\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2+\sigma_n^2}\right)$$

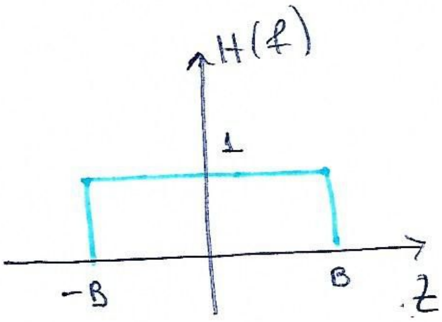
$$= \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_n^2}\right)$$

$\sigma_A^2 \longrightarrow$ μέση ισχύς του σήματος A $(E[A^2]=\sigma_A^2)$ συμβολίζεται με S

$\sigma_n^2 \longrightarrow$ μέση ισχύς του θορύβου n $(E[n^2]=\sigma_n^2)$ συμβολίζεται με N

$$I(A,B) = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

Έστω ότι το κανάλι χρησιμοποιεί εύρος ζώνης μέγιστης συχνότητας B(Hz)



$\longrightarrow$ 2B σύμβολα/sec

$$\left.\begin{array}{l} \longrightarrow 2B \text{ σύμβολα/sec} \\ I(A,B)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{S}{N}\right) \text{ bits/sec} \end{array}\right\} *$$

$$* \; C = B\log\left(1+\frac{S}{N}\right) \text{ bits/sec}$$

Θόρυβος: $N = nB$, $n\,(W/Hz)$, $B\,(Hz)$ WAGN (White Additive Gaussian Noise

n: φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου (W/Hz)

$$C = B\log\left(1+\frac{S}{nB}\right) \Longleftrightarrow \lim_{B\to+\infty}\left[B\log\left(1+\frac{S}{nB}\right)\right] = 1,44\,\frac{S}{n}$$

Παράδειγμα

Ο Narimer στέλνει εικόνες από τον Άρη με $S = 10\,W$, $SNR = 200dB$ $n = 1/2 \cdot 10^{-21}\, W/Hz$. Η εικόνα 200×200 pixels, 64 επίπεδα του γκρι. Να υπολογιστεί ο χρόνος που μεσολαβεί από την αποστολή της εικόνας μέχρι τη λήψη της στη Γη.

$$C = B \log\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

$$SNR = 200dB \Leftrightarrow 10 \log\left(\frac{S}{N}\right) = 200 \Leftrightarrow \log\left(\frac{S}{N}\right) = 20$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{N} = 10^{20} \Leftrightarrow N = \frac{S}{10^{20}} \Leftrightarrow N = 10^{-19} W$$

$$N = nB \Leftrightarrow B = \frac{N}{n} \Leftrightarrow B = \frac{10^{-19}}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-21}} \Leftrightarrow B = 200\,Hz$$

$$C = 200 \log\left(1 + \frac{10}{10^{-19}}\right) = 200 \log(1 + 10^{20}) = 13\,290 \text{ bits/sec}$$

Αριθμός bits εικόνας: 200x200 pixels 6 bits/pixel $= 24 \cdot 10^4$ bit

$$t = \frac{24 \cdot 10^4}{13290} = 18 sec$$

Κωδικοποίηση πηγής

Λόγοι: Συμπίεση, βέλτιστη εκμετάλλευση τού καναλιού

Κωδικοποίηση: Αντικατάσταση συμβόλων ή ομάδων συμβόλων με άλλα σύμβολα

Κώδικας: Αλγόριθμος με τον οποίο γίνεται η κωδικοποίηση

Κωδικά σύμβολα: Νέα σύμβολα του κώδικα

Π.χ. πηγή πληροφορίας το αλφάβητο ASCII και κώδικας είναι ακολουθίες από 0 και 1.

Π.χ. κώδικα Morse { ".", "_", " " }

- Ταξινόμηση κωδικών ως προς το μήκος των κωδικών λέξεων
  - κώδικες σταθερού μήκους (π.χ. ASCII)
  - κώδικες μεταβλητού μήκους (π.χ. Morse, Huffmann)
- Ταξινόμηση ως προς την αντιστοιχία συμβόλων της πηγής σε κωδικές λέξεις
  - δομικοί κώδικες: προκαθορισμένη αντιστοιχία (π.χ. ASCII, Morse, Huffman)
  - συνελικτικοί κώδικες: η αντιστοιχία μεταβάλλεται (Αλγόριθμος LZW, αρχείο ".rar")
- Ταξινόμηση κωδικών ως προς την αποκωδικοποίηση.
  - ευκρινείς κώδικες: Διαφορετική κωδική λέξη για κάθε σύμβολο της πηγής.
  - μονοσήμαντος κώδικας: κάθε κωδική λέξη μπορεί να αναγνωριστεί σε μια μακρά ακολουθία κωδικών συμβόλων.
  - στιγμιαία αποκωδικοποιήσιμος κώδικας (ΣΑΚ): μονοσήμαντος κώδικας που επιτρέπει την αποκωδικοποίηση χωρίς να εξετάσει επόμενα κωδικά σύμβολα σε μια ακολουθία κωδικών συμβόλων.

Στους ΣΑΚ: Δεν πρέπει οι κώδικες λέξεις να έχουν την προθεματική ισότητα

↓

Μια κωδική λέξη πρόθεμα άλλης (π.χ. 1010 και 101011).