Μάθημα 7

19/4/18

Παράδειγμα

τ.μ. X με pdf $p(x)=\alpha x^2$, $0 \leq x \leq \lambda$, $\lambda>0$

- Για ποια τιμή της παραμέτρου λ είναι $H(x)=0$;
(Τι σημαίνει ότι η εντροπία είναι μηδέν δηλ $H(x)=0$)

Λύση

Η παράμετρος α πρέπει να προσδιοριστεί. οπότε πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$

$$\int_0^\lambda \alpha x^2 dx = 1 \Rightarrow \alpha \int_0^\lambda x^2 dx = 1 \Leftrightarrow \alpha \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{\lambda^3}$$

$$H(x)=0 \Leftrightarrow -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln[p(x)]dx = 0 \Leftrightarrow -\int_0^\lambda \alpha x^2 \ln(\alpha x^2) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^\lambda \alpha x^2 \ln(\alpha) dx - \int_0^\lambda \alpha x^2 \ln(x^2) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\alpha \ln\alpha \int_0^\lambda x^2 dx - 2\alpha \int_0^\lambda x^2 \ln(x) dx = 1 \Leftrightarrow \; *$$

$$-\alpha \ln\alpha \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\lambda - 2\alpha \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)\right]_0^\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\lambda^3}{3}\right) - 2\left[\ln(\lambda) - \frac{1}{3}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$3\ln(\lambda) - \ln(3) - 2\ln(\lambda) + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(\lambda) = \ln(3) - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\lambda = e^{\ln(3) - \frac{2}{3}}}$$

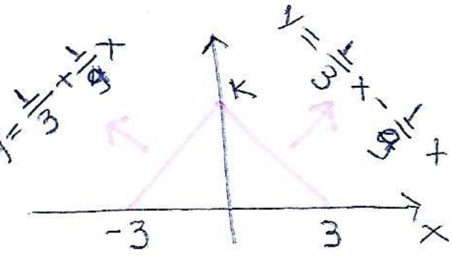
*

Τύπος

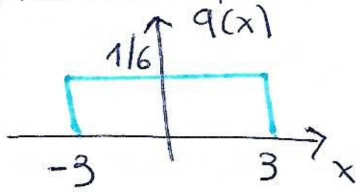
$$\int x^m \ln(x) dx = \frac{x^{m+2}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)$$

Παράδειγμα

τ.μ. X με pdf $p(x)$



- Να υπολογιστεί η $H(x)$
- Να συγκριθεί η $H(x)$ με την εντροπία της ομοιόμορφης κατανομής.



Λύση

Αρχικά πρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά κ

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot \kappa = 1 \iff \boxed{\kappa=\frac{1}{3}}$$

$$H(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\ln(p(x))\,dx = \underbrace{-\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)dx}_{I_1} -$$

$$\underbrace{\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x\right)\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)dx}_{I_2} = I_1+I_2$$

$$I_1 = -\int_0^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)dx = -9\int_0^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)\ln\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x\right)d\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right.$$

$\boxed{y=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}x}$: $I_1 = -9\int_0^{1/3} y\ln(y)\,dy = -9\left[\frac{y^2}{2}(\ln y - 1)\right]_0^{\frac{1}{3}} = \dots = \frac{1}{2}[\ln(3)+$

Παρόμοια: $I_2 = \frac{1}{2}\left[\ln(3)+\frac{1}{2}\right]$

Άρα $H(x) = \ln(3)+\frac{1}{2}$

$$H_q(x) = \ln(6) = \ln(2\cdot 3) = \ln(3)+\ln(2) > \ln(3)+\frac{1}{2} = H(x)$$

Η ομοιόμορφη κατανομή έχει την μεγαλύτερη εντροπία

Αμοιβαία Πληροφορία - Χωρητικότητα καναλιού

Πομπός → ΚΑΝΑΛΙ → Δέκτης

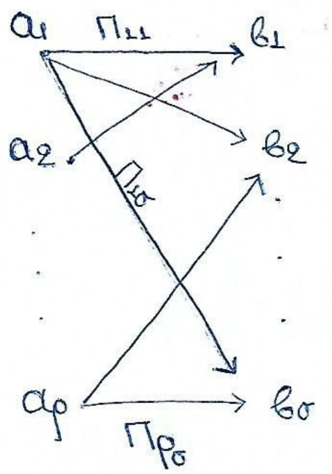
$A = \{a_1, a_2, \dots, a_\rho\}$

$\Pi_A = \{\pi(a_1), \dots, \pi(a_\rho)\}$

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_\sigma\}$

$\Pi_B = \{\pi(b_1), \dots, \pi(b_\sigma)\}$

Διάγραμμα καναλιού



$$\Pi_{ij} = \pi(b_j/a_i) : \Pi_{B|A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \dots & \Pi_{1\sigma} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \dots & \Pi_{2\sigma} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Pi_{\rho 1} & \Pi_{\rho 2} & \dots & \Pi_{\rho\sigma} \end{bmatrix}_{\rho \times \sigma}}_{\text{Πίνακας τού καναλιού: Στατιστική σύνδεση πομπού-δέκτη}} \begin{matrix} \to \pi(b_j/a_1) \\ \to \pi(b_j/a_2) \\ \vdots \\ \end{matrix}$$

Γενικά, μας δίνεται:

- $\Pi_{B|A} = \{\pi(b_j/a_i)\}$
- $\Pi_A = \{\pi(a_i)\}$

- Πριν λάβει ο δέκτης κάποιο σύμβολο, η πληροφορία (αβεβαιότητα) είναι: $-\log[\pi(a_i)]$
- Έστω ότι ο δέκτης λαμβάνει το σύμβολο b_j. Η πληροφορία τώρα γίνεται: $-\log[\pi(a_i/b_j)]$
- Ορίζω $I(a_i, b_j) = -\log[\pi(a_i)] - \{-\log[\pi(a_i/b_j)]\} =$
  $-\log[\pi(a_i)] + \log[\pi(a_i/b_j)]$

Υπολογίζω την αναμενόμενη τιμή

$$I(A,B)=\sum_{i=1}^{\rho}\sum_{j=1}^{\sigma}\pi(a_i,b_j)\,I(a_i,b_j)=-\sum_i\sum_j\pi(a_i,b_j)\log[\pi(a_i)]+$$

$$\sum_i\sum_j\pi(a_i,b_j)\log[\pi(a_i/b_j)]=-\sum_i\Big\{\underbrace{\sum_j\pi(a_i,b_j)}_{\text{Νόμος της άθροισης } \pi(a_i)}\Big\}\log[\pi(a_i)]-H(A|B)$$

$$-\sum_i\pi(a_i)\log[\pi(a_i)]-H(A|B)=H(A)-H(A|B)$$

$$I(A,B)=H(A)-H(A|B)$$

→ Αμοιβαία πληροφορία ή Διαπληροφορία

<u>Ιδιότητες</u>

- $I(A,B)=I(B,A)$
- $I(A,B)\geq 0$

▶ Για δεδομένα $\pi(a_i)$: $\max\{I(A,B)\}=H(A)$!!sos!

Δηλαδή, $H(A/B)=0$ $(\pi(a_i/b_j)=1$ ή $\emptyset)$

→ Εντροπία θορύβου

Απόδειξη της $I(A,B) = I(B,A)$

$$\boxed{I(A,B)} = H(A) - H(A/B) = -\sum_i \pi(a_i)\operatorname{Log}[\pi(a_i)] + \sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j)\operatorname{Log}[\pi(a_i/b_j)]$$

$$= -\sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j)\operatorname{Log}[\pi(a_i)] + \sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j)\operatorname{Log}\left[\frac{\pi(a_i, b_j)}{\pi(b_j)}\right]$$

$$= \boxed{\sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j)\operatorname{Log}\left[\frac{\pi(a_i, b_j)}{\pi(a_i)\pi(b_j)}\right]} \longrightarrow \text{Αντιμεταθετική ως προς } a_i, b_j$$

$$= I(B,A)$$

Δείκτης την "ανεξαρτησίας" "sos"
μεταξύ των τ.μ A και B.

$$H(A,B) = H(A) + H(B/A)$$

$$\Downarrow$$

$$I(A,B) = H(A) + H(B) - H(A,B)$$

Χωρητικότητα καναλιού

Είναι το μέγιστο της αμοιβαίας πληροφορίας ως προς τις πιθανότητες των συμβόλων a_i του πομπού:

$$C = \max_{\{\pi(a_i)\}}\left\{I(A,B)\right\} = \max_{\{\pi(a_i)\}} \sum_i \sum_j \underbrace{\pi(a_i, b_j)}_{\pi(a_i)\cdot\pi(b_j/a_i)} \operatorname{Log}\left[\frac{\pi(a_i, b_j)}{\pi(a_i)\pi(b_j)}\right]$$

Χωρητικότητα "απλών" καναλιών

- Ιδανικό κανάλι

$$a_1 \xrightarrow{1} b_1$$

$$a_2 \xrightarrow{1} b_2$$

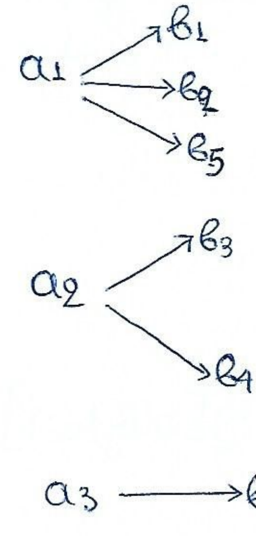
$$a_3 \xrightarrow{1} b_3$$

$$\pi(B/A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \max\{H(A)\} = \max\{H(B)\} = \operatorname{Log}\sigma$$

$$I(A,B) = H(A) - \cancel{H(A/B)}^{\varnothing}$$

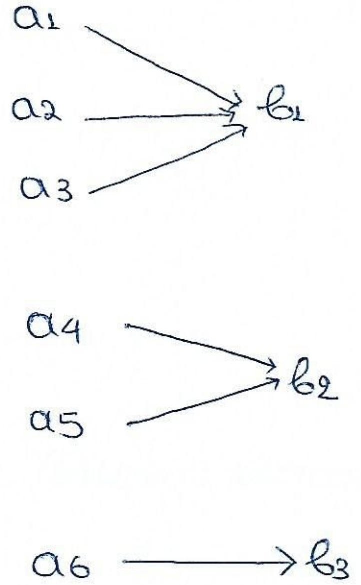
- Κανάλι χωρίς απώλειες



$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & 0 & 0 & \Pi_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{23} & \Pi_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \max\{H(A)\} = \log \rho$$

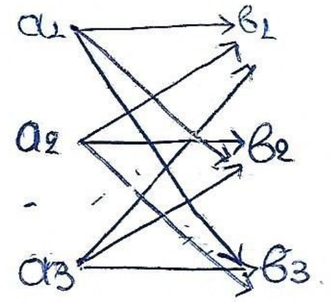
- Καθοριστικό κανάλι



$$\Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \max\{H(B)\} = \log \sigma$$

- Ομοιόμορφο κανάλι



π.χ. $\Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} = \{\pi(b_j|a_i)\}$

• όλες οι γραμμές τού πίνακα τού καναλιού $\Pi_{B|A}$ είναι αναδιατάξεις κάποιας γραμμής.
• // στήλες // στήλης.

$$I(A,B) = H(B) - H(B/A) \quad , \quad C = \max_{\pi(a_i)} \left\{ I(A,B) \right\}$$

$$H(B/A) = -\sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j) \log\left[\pi(b_j|a_i)\right] = -\sum_i \sum_j \pi(a_i)\pi(b_j|a_i)\log\left[\pi(b_j|a_i)\right]$$

$$= -\sum_i \left\{ \underbrace{\sum_j \pi(b_j|a_i) \log\left[\pi(b_j|a_i)\right]}_{\text{σταθερή ποσότητα } \forall \text{ στήλη τού } \Pi_{B|A}} \right\} \pi(a_i) =$$

$$= \left\{ \sum_i \pi(b_j|a_i) \log\left[\pi(b_j/a_i)\right] \right\} \left\{ \sum_i \pi(a_i) \right\}$$

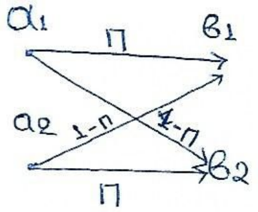
$$= \underbrace{-\sum_j \pi(b_j|a_i) \log\left[\pi(b_j/a_i)\right]}_{\text{Δεν εξαρτάται από τα } \pi(a_i)}$$

Η $I(A,B)$ μεγιστοποιείται για εκείνη την $\pi(a_i)$ που μεγιστοποιούν την $H(B)$, άρα για εκείνα τα $\pi(a_i)$ για τα οποία $\pi(b_j) = \frac{1}{\sigma}$

Τότε $I(A,B) = \log(\sigma) + H(B/A)$

"SOS"

'Δυαδικό συμμετρικό κανάλι' (Bianary Symmetric Channel – BSC)



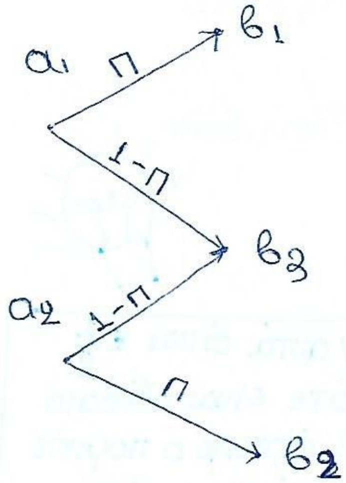
$$\Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} \pi & 1-\pi \\ 1-\pi & \pi \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$C = 1 + \pi \log(\pi) + (1-\pi)\log(1-\pi) = 1 - H(\pi) \quad (\text{bits}/\text{σύμβολο})$$

"SOS"

'Δυαδικό κανάλι εξάλειψης' (Bianary Erasure Channel – BEC)

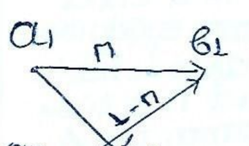


π η πιθανότητα να μην ξέρουμε τι μας έστειλε

$$\Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} \pi & 0 & 1-\pi \\ 0 & \pi & 1-\pi \end{bmatrix}$$

$$C = \pi \quad (\text{bits}/\text{σύμβολο})$$

<u>Παράδειγμα</u> (Δυαδικό κανάλι)



$a = \frac{3}{4}$ $\quad b = 0{,}9$ $\quad \Pi_{B|A} = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix} = \{ \pi(b$

$\pi(a_1) = \frac{1}{4}$

Να υπολογιστούν: $H(A)$, $H(B)$, $H(A|B)$, $H(B|A)$, $\cancel{I(A|B)}$ $I(A,B)$

α) $H(A) = -\sum_{i=1}^{2} p(a_i) \log[p(a_i)] = -\frac{1}{4}\log\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\log\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}91$ bits/σύμβολο

β) $H(B) = -\sum_{i=1}^{2} p(b_j) \log[p(b_j)] = \ldots = 0{,}8305$ bits/σύμβολο

$p(b_j|a_i) \cdot p(a_i) = p(a_i, b_j)$

$p(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j)$

$p(b_j) = \sum_i p(a_i, b_j) = \sum_i p(a_i)\, p(b_j|a_i)$

$p(b_1) = p(a_1) \cdot p(b_1|a_1) + p(a_2) p(b_1|a_2) = \frac{1}{4}a + \frac{3}{4}(1-b) = 0{,}2625$

$p(b_2) = p(a_1) \cdot p(b_2|a_1) + p(a_2) p(b_2|a_2) = \frac{1}{4}(1-a) + \frac{3}{4}b = 0{,}7375$

γ) $H(A|B) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(a_i, b_j) \log[p(a_i|b_j)] = 0{,}535$ bits/σύμβολο

$p(a_i, b_j) = p(a_i) \cdot p(b_j|a_i)$

$p(a_1, b_1) = \frac{1}{4}a = 0{,}7578$

$p(a_1, b_2) = \frac{1}{4}(1-a) = 0{,}625$

$p(a_2, b_1) = \frac{3}{4}(1-b) = 0{,}0075$

$p(a_2, b_2) = \frac{3}{4}b = 0{,}675$

$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i, b_j)}{p(b_j)}$

$p(a_1|b_1) = 0{,}714$

$p(a_1|b_2) = 0{,}085$

$p(a_2|b_1) = 0{,}286$

$p(a_2|b_2) = 0{,}915$

* Αν αυτά είναι $\frac{1}{2}$ τότε είναι αβέβαιο τι έστειλε ο πομπός γιατί παρεμβάλλεται το κανάλι και μας τα χαλάει όλα. Ακόμα και αν το α είχε πιθανότητα εμφάνισης 0 και το άλλο 1. Γιατί πρακτικά η Β είναι ανεξάρτητη της Α.

δ) $H(B|A) = H(A,B) - H(A) = H(B) + H(A|B) - H(A) = 0{,}8305 + 0{,}535 - 0{,}91$

$= 0{,}455$ bits/σύμβολο.

ε) $I(A,B) = H(A) - H(A|B) = 0{,}41 - 0{,}535 = 0{,}375$ bits/σύμβολο

στ) $I(A,B)$ "ισό" αν $a = b = \frac{1}{2}$ * Δεν έχουμε καμία πληροφορία.

$H_{x}(20\infty$

$H(A) = H(A|B)$