Μάθημα 6

29/3/18

Παράδειγμα Πηγή με μνήμη Markov

$A=\{a_1, a_2, a_3\}$

Για $\{\frac{1}{3}, \frac{16}{27}, \frac{2}{27}\}$

Πίνακας μεταβάσεων: → Να εμφανιστεί το a_3 δεδομένου ότι πριν εμφανίστηκε το a_1

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{bmatrix}$$

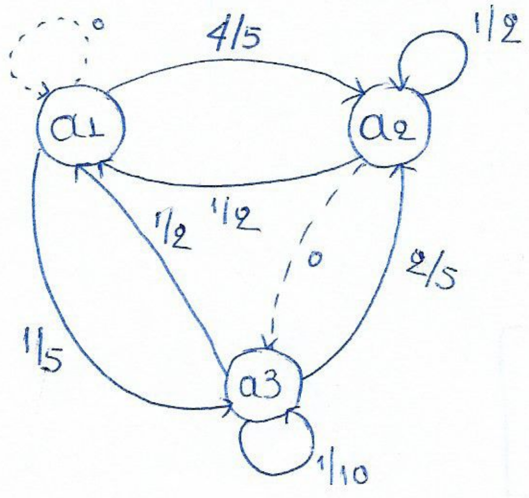
α) Διάγραμμα καταστάσεων

β) Κανονικότητα και εργοδικότητα

γ) Οριακή κατανομή πιθανοτήτων

δ) Οριακή εντροπία απλού βήματος

α)



β) Είναι εργοδικό

Μπορούμε να μεταβούμε από οποιοδήποτε κατάσταση σε μία άλλη.

Ο Π έχει μηδενικό στοιχείο και δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την κανονικότητα.

$$\Pi^2 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,48 & 0,02 \\ 0,25 & 0,65 & 0,1 \\ 0,25 & 0,64 & 0,11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Κανονικό σύστημα}$$

γ) Ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής $\lambda=1$

$$\Pi^T v = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 4/5 & 1/2 & 2/5 \\ 1/5 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 = v_1 \\ \frac{4}{5}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{2}{5}v_3 = v_2 \\ \frac{1}{5}v_1 + \quad + \frac{1}{10}v_3 = v_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} +v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = 0 \\ \frac{4}{5}v_1 - \frac{1}{2}v_1 + \frac{2}{5}v_3 = 0 \\ \frac{1}{5}v_1 \qquad - \frac{9}{10}v_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 0,3333 \\ v_2 = 0,5926 \\ v_3 = 0,0741 \end{cases}$$

$$\underbrace{v_1 + v_2 + v_3 = 1}$$

το v είναι διάνυσμα πιθανοτήτων

δ) $H(A) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} v_i \pi_{ij} \log(\pi_{ij}) = \dots =$ bits/signal

πιθανότητα να ξεκινήσει από αυτή την κατάσταση

Παράδειγμα: Πηγή με μνήμη (Markov)

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$\Pi_A = \{\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}\}$

Πίνακας μεταβάσεων: $\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

Να υπολογιστούν:

α) Ο Π^2 → σε 3 βήματα

β) $\pi_{32}(3)$ (Απ. $\pi_{32}(3) = \frac{1}{2}$)

γ) Οριακή κατανομή ($v = [0{,}33 \quad 0{,}61 \quad 0{,}06]^T$)

δ) Εντροπία απλού βήματος ($H(A) = 1{,}5625$ bits/symbol)

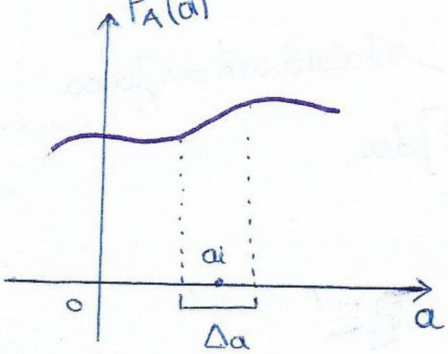
ε) Εντροπία διπλού βήματος ($H(A) = 1{,}441$ bits/symbol)

στ) Οριακή Εντροπία ($H^{\infty}(A) = 1{,}2064$ bits/symbol)

Εντροπία Συνεχούς πηγής πληροφορίας

Η πηγή εκπέμπει σύμβολα που αναπαρίστανται από συνεχή τ.μ. α με $P_A(a)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\,da = 1$$



Η πιθανότητα η τιμή A να πάρει την τιμή α είναι 0. Γι' αυτό παίρνουμε το εμβαδόν.

Διακριτή

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{p} p(a_i)\log[p(a_i)]$$

$$H(A) = \lim_{\Delta a\to 0}\left\{-\sum_i P_A(a)\Delta a \log[P_A(a)\Delta a]\right\}$$

$$= \lim_{\Delta a\to 0}\left\{-\sum_i P_A(a_i)\Delta a\log[P_A(a_i)] - \sum_i P_A(a_i)\Delta a \log[\Delta a]\right\}$$

$$= \lim_{\Delta a\to 0}\left\{-\sum_i P_A(a_i)\log[P_A(a_i)]\Delta a\right\} + \lim_{\Delta a\to 0}\left\{-\sum_i P_A(a_i)\Delta a \log(\Delta a)\right\}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\log[P_A(a)]\,da - \lim_{\Delta a\to 0}\left\{\log[\Delta a]\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\,da$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\log[P_A(a)]\,da - \lim_{\Delta a\to 0}\left\{\log(\Delta a)\right\}$$

$$= \underbrace{H(A) + \infty}$$

πάντα άπειρη εντροπία η συνεχής πηγή

Ορίζουμε ως εντροπία της συνεχούς πηγής την πεπερασμένη ποσότητα

$$H(A) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log\left[P_A(a)\right] da$$

Ιδιότητα: Μετασχηματισμός της τ.μ. A σε τ.μ. B με $b = f(a)$ τότε:

$$H(B) = H(A) - \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log\left[\underbrace{|J(A|B)|}_{\text{Ιακωβιανή ορίζουσα}}\right] da$$

με
$$|J(A|B)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial b_K} \\ \frac{\partial a_2}{\partial b_1} & & \frac{\partial a_2}{\partial b_K} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_N}{\partial b_1} & & \frac{\partial a_N}{\partial b_K} \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

$B = \overset{\text{σταθερά}}{K} \cdot A$, $n > 0$

Αν γνωρίζω την $H(A)$ ποια είναι η $\overbrace{\text{εντροπία της τ.μ. B}}^{H(B)}$; (συνεχείς μεταβλητές)

$$|J(A|B)| = \frac{dA}{dB} = \frac{1}{dB/dA} = \left|\frac{1}{K}\right| = \frac{1}{K} \quad \text{, διότι } k>0$$

$$H(B) = H(A) - \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log\left(\frac{1}{K}\right) da =$$

$$= H(A) + \log(K) \cancelto{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\, da}$$

$$= H(A) + \log(K)$$

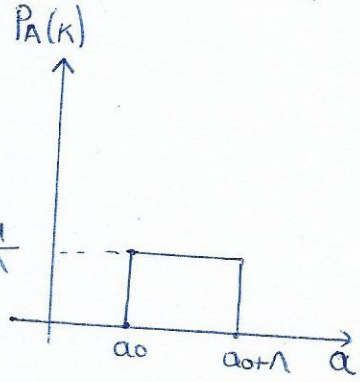
- $K>1$: $H(B) > H(A)$ (διαστολή του πεδίου τιμών της νέας τ.μ.)
- $K<1$: $H(B) < H(A)$ (συστολή του πεδίου τιμών της νέας τ.μ.)
- $K=1$ $H(B) = H(A)$

<u>Παράδειγμα</u> : $B = A + \underset{}{K}$ → σταθερά

$$J(A/B) = \frac{1}{dB/dA} = \frac{1}{1} = 1$$

$$H(B) = H(A) - \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log(1)\, da} = H(A)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Εντροπία ομοιόμορφης τ.μ. (συνεχούς)
τ.μ. A με τιμές στο $[a_0, a_0+\Lambda]$



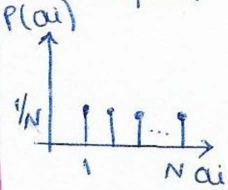
$$H(A) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log[P_A(a)]\, da = -\int_{a_0}^{a_0+\Lambda} \frac{1}{\Lambda} \cdot \log\left(\frac{1}{\Lambda}\right) da = \frac{1}{\Lambda} \log(\Lambda) \int_{a_0}^{a_0+\Lambda} da$$

$$= \frac{1}{\Lambda} \log(\Lambda) \left[a\right]_{a_0}^{a_0+\Lambda} = \frac{1}{\Lambda} \cdot \log(\Lambda) [a_0+\Lambda - \Lambda] = \frac{1}{\Lambda} \log(\Lambda) \cdot \Lambda =$$

$$= \log(\Lambda)$$

- $\Lambda \geq 1 : H(A) \geq 0$
- $\Lambda < 1 : H(A) < 0$

Υπενθύμιση



$H(A) = \log(N) \geq 0$

33:27

<u>Ερώτημα</u>: Ποια κατανομή $P_A(a)$ τ.μ. A με μέση τιμή 0 $(E(A)=0)$ και διασπορά σ $(E[(A-E(A))^2] = E[A^2] = \sigma^2)$ έχει μέγιστη εντροπία;

$$\max_{P_A(a)} \left\{ -\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \log[P_A(a)]\, da}_{F(a, P_A(a)) = -P_A(a) \log[P_A(a)]} \right\}$$ με τους περιορισμούς:

$$\begin{cases} 1) \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\, da = 1 & (F1) \\ 2) \int_{-\infty}^{+\infty} a P_A(a)\, da = 0 & (F2) \\ 3) \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 P_A(a)\, da = \sigma^2 & (F3) \end{cases}$$

$$F_1(a, P_A(a)) = P_A(a)$$

$$F_2(a, P_A(a)) = a P_A(a)$$

$$F_3(a, P_A(a)) = a^2 P_A(a)$$

$$J(a, P_A(a), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = F(a, P_A(a)) + \lambda_1 F_1(a, P_A(a)) + \lambda_2 F_2(a, P_A(a)) + \lambda_3 F_3(a, P(A))$$

$$= -P_A(a)\log(P_A(a)) + \lambda_1 P_A(a) + \lambda_2 a P_A(a) + \lambda_3 a^2 P_A(a)$$

$$\frac{\partial J}{\partial P_A(a)} = 0 \iff -\log[P_A(a)] - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 = 0 \iff \log[P_A(a)] = \lambda_3 a^2 + \lambda_2 a + \lambda_1 - 1$$

↓

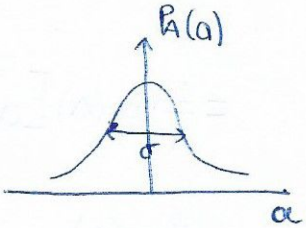
Θεωρώ τον φυσικό λογάριθμο ($\ln$)

$$\iff P_A(a) = e^{\lambda_3 a^2 + \lambda_2 a + \lambda_1 - 1}$$

Βάζω το $P_A(a)$ στους περιορισμούς

- Λύνω ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\boxed{-\ P_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}}$$ → κανονική κατανομή



! Αν $E(A) = \mu$ τότε $P_A(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

SOS Το ίδιο για τη διακριτή τιμή → Η κατανομή που έχει τη μέγιστη εντροπία είναι η Gaussian.

$$H(A) = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \ln[P_A(a)]\,da = -\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\left[\ln(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} - \frac{a^2}{2\sigma^2}\right] da$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a) \ln[\sqrt{2\pi}\sigma]\,da + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{2\sigma^2} P_A(a)\,da =$$

$$= \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} P_A(a)\,da}_{1} + \frac{1}{2\sigma^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 P_A(a)\,da}_{\sigma^2}$$

$$= \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2 = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) + \frac{1}{2}$$

Άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα

1) Ποια $P_A(a)$ μεγιστοποιεί την εντροπία συνεχούς τ.μ. Α η οποία παίρνει τιμές στο $[a,b]$

$\left(P_A(a)=\frac{1}{b-a}\right)$

$$J(a, P_A(a)) = -P_A(a)\log[P_A(a)] + \lambda_1$$

$$\int_a^b P_A(a)\,da = 1$$

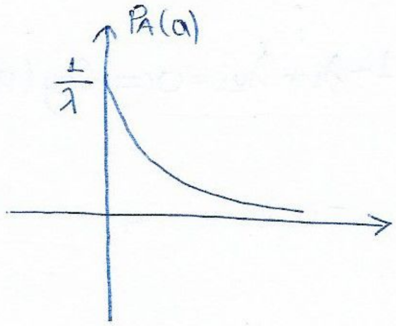
Ομοιόμορφη κατανομή

2) Ποια $P_A(a)$ μεγιστοποιεί την εντροπία συνεχούς τ.μ. Α η οποία $E[A]=\lambda$ και παίρνει τιμές στο $[0,+\infty)$

Ισχύει $\int_\alpha^b P_A(a)\,da = 1$

$\left(\text{Λύση: } P_A(a) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}a}\right)$

Εκθετική κατανομή

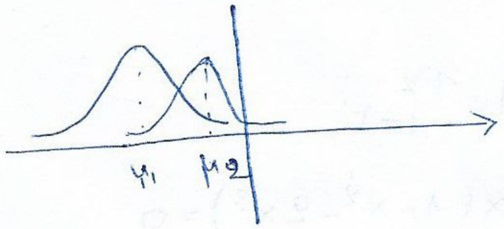


Απόσταση Kullback-Leibler μεταξύ κατανομών συνεχών τ.μ.

$$D(p,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(a)\ln\left[\frac{p(a)}{q(a)}\right] da$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί η $D(p,q)$ με $p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}$ και $q(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(a-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}$



Παράδειγμα: sos

Πηγή διακριτή $A=\{1,2,3,4\}$. Να υπολογιστεί η κατανομή των πιθανοτήτων εμφάνισης των συμβόλων που μεγιστοποιεί την εντροπία υπό την προϋπόθεση $E[A]=2$. (μέση τιμή των συμβόλων που εμφανίζει η A)

$\Pi A=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$

(Αν έλεγε τη μέση τιμή=2,5 τότε πάλι ομοιόμορφη κατανομή θα είχα)

Λύση $\max_{p_i}\left\{-\sum_{i=1}^{4}p_i\log(p_i)\right\}$ υπό τους περιορισμούς $\sum_{i=1}^{4}p_i=1$ και $\sum_{i=1}^{4}ip_i=2$

$$J(p_i,\lambda_1,\lambda_2)=-\sum_{i=1}^{4}p_i\log(p_i)+\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{4}p_i-1\right)+\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{4}ip_i-2\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_i}=0 \Leftrightarrow -\log(p_i)-1+\lambda_1+\lambda_2 i=0 \Leftrightarrow \log(p_i)=\lambda_1+\lambda_2 i-1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_i=e^{\lambda_1+\lambda_2 i-1}} \quad \text{το } i=1\ldots4$$

Βάζω το $p_i=e^{\lambda_1+\lambda_2 i-1}$ στους περιορισμούς και επιλύω ως προς λ_1,λ_2

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{4}e^{\lambda_1+\lambda_2 i-1}=1\\ \sum_{i=1}^{4}ie^{\lambda_1+\lambda_2 i-1}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}e^{\lambda_1-1}\sum_{i=1}^{4}e^{\lambda_2 i}=1\\ e^{\lambda_1-1}\sum_{i=1}^{4}ie^{\lambda_2 i}=2\end{cases} \Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{4}e^{\lambda_2 i}=\sum_{i=1}^{4}ie^{\lambda_2 i} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$2e^{\lambda_2}+2e^{2\lambda_2}+2e^{3\lambda_2}+2e^{4\lambda_2}=e^{\lambda_2}+2e^{2\lambda_2}+3e^{3\lambda_2}+4e^{4\lambda_2} \Leftrightarrow$$

$$e^{\lambda_2}-e^{3\lambda_2}-2e^{4\lambda_2}=0 \overset{e^{\lambda_2}=x}{\Leftrightarrow} x-x^3-2x^4=0 \Leftrightarrow x(1-x^2-2x^3)=0$$

$x=0$ Απρ. $\quad 2x^3+x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\text{2 συζυγείς μιγαδικές απορρίπτ.}\\ x=0,6573\end{cases}$

$$e^{\lambda_2}=0,6573 \Rightarrow \boxed{\lambda_2=-0,4196}$$

Με αντικατάσταση στην $e^{\lambda_1-1}\sum_{i=1}^{4}e^{\lambda_2 i}=1 \Leftrightarrow e^{\lambda_1-1}=0,641 \Leftrightarrow \lambda_1=0,5553$

$P_1 = 0,4213$
$P_2 = 0,2764$
$P_3 = 0,182$
$P_4 = 0,1147$