Μάθημα 3

*** 8/3/18 ***

Πληροφορία-Εντροπία

Πηγή πληροφορίας $A=\{a_1,a_2,\dots,a_p\}$

$\Pi_A=\{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_p\}$

Μέγεθος $\frac{1}{\pi_i}$ για το σύμβολο a_i δίνει την "ποσότητα πληροφορίας"

▸ Μας "βολεύει" καλύτερα να ορίσουμε ως ποσότητα πληροφορίας του συμβόλου a_i την $I_i = -\ln(\pi_i) = \ln\left(\frac{1}{\pi_i}\right)$

παράδειγμα

$\{x_i\}_{i=1}^{N}$ παρατηρήσεις $X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu=;$ $\sigma=;$

$$P(x_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

Υποθέτω ότι τα X_i είναι ανεξάρτητα $P(x_1,x_2,\dots,x_N)=\prod_{i=1}^{N}P(x_i)$

$$J(\mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{N}p(x_i)=\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sigma}\cdot e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

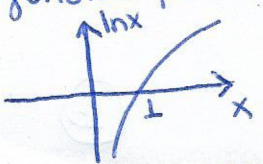
$$\max_{\mu,\sigma} J(\mu,\sigma) \iff \begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \mu}=0 \\ \frac{\partial J}{\partial \sigma}=0 \end{cases} \quad \dots$$

$\Updownarrow$ ισοδύναμα*

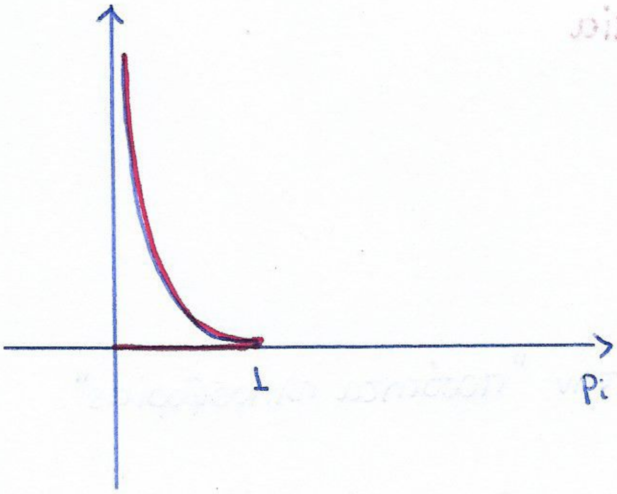
$$\max_{\mu,\sigma} \ln[J(\mu,\sigma)]$$

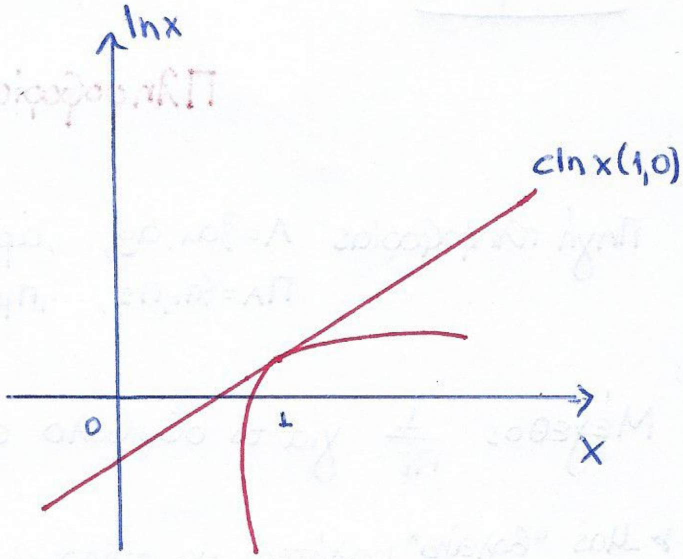
$$\ln J(\mu,\sigma)=\ln\prod_{i=1}^{N}p(x_i)=\sum_{i=1}^{N}\ln[P(x_i)]=\sum_{i=1}^{N}\left[-\ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma)-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

* Είναι ισοδύναμα γιατί η λογάριθμος είναι γνησίως μονότονη.



Χρήσιμες γραφικές παραστάσεις





$C\ln x(1,0)$

Εφαπτομένη της $f(x)=\ln x$ στο $x=1$:

$y=ax+b$

• περνάει από το σημείο $(1,0)$ $a+b=0$

• $f'(x)\big|_{x=1}=a \Leftrightarrow \frac{1}{x}\Big|_{x=1}=a \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

$C\ln x$ στο $x=1$: $\boxed{y=x-1}$

Απόδειξη

Ισχύει $\ln x \le x-1$, $\forall x$

Ορίζω $g(x)=x-1-\ln x \Leftrightarrow g'(x)=1-\frac{1}{x}$

Περίπτωση 1: $x\ge 1: g'(x)\ge 0 \Rightarrow g(x) \nearrow$ (γνησίως αύξουσα)

$\Rightarrow g(x)\ge g(1) \Rightarrow x-1-\ln x=0 \Rightarrow \boxed{\ln x \le x-1}$

περίπτωση 2: Αντίστοιχα ... $\ln x \le x-1$

• Ορίζω $I_i=\log_{\varepsilon}(\pi_i)$ και μονάδες πληροφορίας

- Αν $\varepsilon=2 \rightarrow$ bits (μονάδες)
- Αν $\varepsilon=e \rightarrow$ nats (μονάδες)
- Αν $\varepsilon=10 \rightarrow$ Hartley

παράδειγμα

Πηγή πληροφορίας εκπέμπει δυαδικές δεκάδες ισοπίθανες. Η πληροφορία του μηνύματος είναι $I = -\log_2 \underbrace{\frac{1}{2^{10}}}_{\pi_i} = 10$ bits

παράδειγμα

Πηγή πληροφορίας εκπέμπει ισοπίθανες δεκαδικές τριάδες $I = -\log_2\left(\frac{1}{10^3}\right) \simeq 10$ bits

Τότε $\log_\beta x = \frac{\log_a x}{\log_\beta x}$

π.χ. $\ln x$ το γνωρίζω και θέλω να υπολογίσω τον λογάριθμο σε δυαδική βάση:

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

- πηγή εκπέμπει 0 ή 1 ισοπίθανα $I = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ bit

Εντροπία Πηγής - Πληροφορίας

Πηγή $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$

(διακριτή) $\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p\}$

$\sum_{i=1}^{p} \pi_i = 1$

$H(A)$ ή $H = E[I_A] = E[-\ln(\pi_i)] = -\sum_{i=1}^{p} \pi_i \log(\pi_i)$

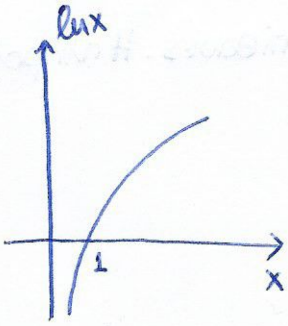
$H(A) \longrightarrow$ Εντροπία: Μέση τιμή της πληροφορίας της A

Μονάδες: bits/σύμβολο της πηγής $(\varepsilon=2)$

nats/σύμβολο της πηγής $(\varepsilon=e)$

hartley/σύμβολο της πηγής $(\varepsilon=10)$

• $\log \pi_i = H(A) \geq 0$



• Για ποιες τιμές των π_i μεγιστοποιείται η $H(A)$;

$$\max_{\pi_i} H(A)$$

Μεγιστοποιείται όταν τα a_i είναι ισοπίθανα:

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_\rho = \frac{1}{\rho}$$

$$H_{max}(A) = -\sum_{i=1}^{\rho} \frac{1}{\rho} \log\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho} \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \cdot \sum_{i=1}^{\rho} 1 =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \log\left(\frac{1}{\rho}\right)\rho = -\log\left(\frac{1}{\rho}\right) = \log\left[\left(\frac{1}{\rho}\right)^{-1}\right] = \log(\rho)$$

Μεγιστοποίηση Εντροπίας δυαδικής πηγής:

$A = \{a_1, a_2\}$

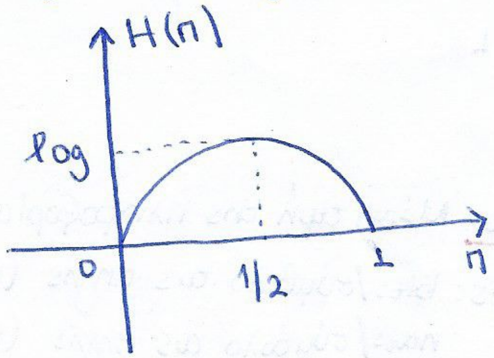
$\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2\} = \{\pi, 1-\pi\}$

$\downarrow$

περιορισμός: $\sum_{i=1}^{2} \pi_i = 1$

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{2} \pi_i \log \pi_i =$$

$$-\pi \log \pi - (1-\pi)\log(1-\pi) = H(\pi) \text{ (Συνάρτηση Shannon)}$$



(sos)

Για ποιες τιμές των π_i η εντροπία μεγιστοποιείται;

$$\max_{\pi} H(\pi) \Leftrightarrow \frac{\partial H(\pi)}{\partial \pi} = 0 \Leftrightarrow -\log\pi - 1 - [-\log(1-\pi) - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \log\pi - \log(1-\pi) = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{1-\pi} = 1 \Rightarrow \pi = 1-\pi \Rightarrow \boxed{\pi = \frac{1}{2}}$$

Μεγιστοποίηση εντροπίας πηγής πληροφορίας ρ συμβόλων.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_\rho\}$ $\quad H(A) = -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log \pi_i$

$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\rho\}$

$$\max_{\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_\rho} H(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\rho)$$

Υπό τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i = 1$$

ένας περιορισμός

Μεγιστοποίηση με περιορισμούς

Λύση:

Μέθοδος των πολ/ων Lagrange

Ορίζω τη συνάρτηση $J(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\rho; \lambda) = -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log \pi_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i - 1\right)$

πολ/στής Langrange

$$\frac{\partial J}{\partial \pi_i} = 0, \quad \forall i : \frac{\partial J}{\partial \pi_m} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \pi_m}(-\pi_m \log \pi_m) + \lambda \frac{\partial(\pi_m)}{\partial \pi_m} = 0$$

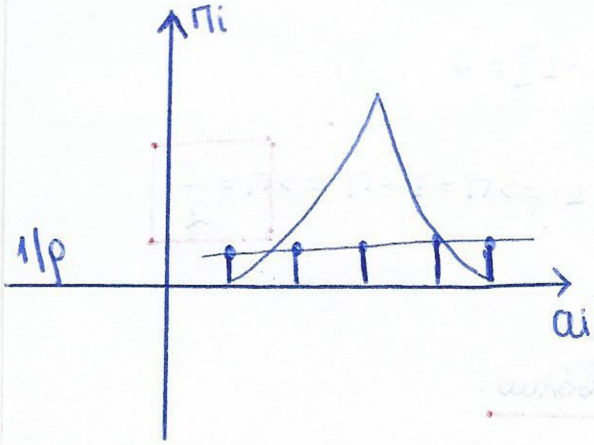
$$\Leftrightarrow -\log\pi_m - 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \log\pi_m = \lambda - 1 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\pi_m = e^{\lambda - 1}}$$

και

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\rho} e^{\lambda-1} = 1 \Leftrightarrow e^{\lambda-1} \sum_{i=1}^{\rho} 1 = 1 \Leftrightarrow e^{\lambda-1} = \frac{1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1 - \ln\rho}$$



όσο πιο ακανθώδης
τόσο πιο μικρή η
βεβαιότητα.

• Πώς γνωρίζουμε ότι το $\log\rho$ είναι το μέγιστο και όχι το ελάχιστο της $H(A)$;

• $\ln \pi_i \leq \pi_i - 1$

$\Sigma a_i \ln \pi_i \leq \Sigma a_i \pi_i - 1$

α) $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial \pi_i^2}$ κλπ.

β) $H(A) - \log\rho = -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log \pi_i - \log\rho = -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log \pi_i - \log \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i =$

$-\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log \pi_i + \pi_i \log \rho = -\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i (\log \pi_i + \log \rho) =$

$-\sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log(\pi_i \rho) = \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \log\left(\frac{1}{\rho \pi_i}\right) \leq \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i \left(\frac{1}{\rho \pi_i} - 1\right) =$

$\sum_{i=1}^{\rho} \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{\rho} \pi_i = \frac{1}{\rho} \cdot \rho - 1 = 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow H(A) \leq \log\rho$

* "Απόσταση" Kullback - Leibler μεταξύ των κατανομών.

$\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p\}$ και $T_A = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ για την πηγή πληροφορίας $A = \{a_1, a_2, \dots a_p\}$

$$D(\pi,\tau) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i \log\left(\frac{\pi_i}{\tau_i}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \pi_i \log \pi_i \geq \sum_{i=1}^{p} \pi_i \log \tau_i$$

* Δεν είναι μετρική
Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα
Δεν ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{p} \pi_i \log \pi_i \leq -\sum_{i=1}^{p} \pi_i \log \tau_i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{H(A) \leq -\sum_{i=1}^{p} \pi_i \log \tau_i}$$

$$E_\pi[-\log \pi_i] \leq E_\pi[-\log \tau_i]$$

• Απόδειξη ότι $D(\pi,\tau) \geq 0$

$$D(\pi,\tau) = \sum_{i=1}^{p} \pi_i \log\left(\frac{\pi_i}{\tau_i}\right) = -\sum_{i=1}^{p} \pi_i \log\left(\frac{\tau_i}{\pi_i}\right) \geq -\sum_{i} \pi_i \left(\frac{\tau_i}{\pi_i} - 1\right) = -\left(\sum_{i=1}^{p} \tau_i - \sum_{i=1}^{p} \pi_i\right) =$$

$$-(1-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{D(\pi,\tau) \geq 0}$$ μη αρνητική

$$\boxed{\begin{aligned} \ln x &\leq x - 1 \\ -\ln x &\geq -(x-1) \end{aligned}}$$

Συνδετική (ή από κοινού) Εντροπία

Πηγή $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ $\Pi_A = \{\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_p)\}$

πηγή $B = \{b_1, b_2, \dots, b_\sigma\}$ $\Pi_B = \{\pi(b_1), \pi(b_2), \dots, \pi(b_\sigma)\}$

Εκπέμπουν από κοινού το ζεύγος συμβόλων (a_i, b_j)

$$H(A,B) = -\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\sigma} \pi(a_i,b_j) \log \pi(a_i,b_j) = E[-\log \pi(a_i,b_j)]$$

! Πάντα στο μάθημα η αναμενόμενη τιμή $E()$ υπολογίζεται ως προς την $\pi(a_i,b_j)$

Ιδιότητα $H(A,B) \le H(A)+H(B)$

$$H(A,B) = -\sum_i \sum_j \pi(a_i ; b_j) \cdot \log \pi(a_i , b_j) \le$$

$$-\sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j) \cdot \log[\pi(a_i)\pi(b_j)]$$

$$= \sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j) \log \pi(a_i) - \sum_i \sum_j \pi(a_i, b_j) \cdot \log \pi(b_j) =$$

$$= \sum_i \log(\pi(a_i) \cdot \sum_{\lambda_j} \pi(a_i, b_j) - \sum_{\lambda_j} \log \pi(b_j) \cdot \sum_i \pi(a_i, b_j) =$$

$$= -\sum_i \pi(a_i) \log \pi(a_i) - \sum_j \pi(b_j) \log \pi(b_j) =$$

$$= H(A) + H(B) \iff \boxed{H(A,B) \le H(A)+H(B)}$$

Η ισότητα ισχύει αν A,B ανεξάρτητα.