Μάθημα 10 *** 9/5/18 ***

Τυπικά μηνύματα

α) Τύπος του Stirling για το παραγοντικό

$$x! \simeq e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x}$$

β) $\ln(x!) = x\ln x - x \frac{1}{2}\ln(2\pi x)$

γ) προσέγγιση του $\ln\binom{N}{2}$: $\ln\binom{N}{2} = \ln\frac{N!}{(N-2)!\,2!} =$

$$\ln(N!) - \ln(2!) - \ln[(N-2)!] =$$

Τύπος του Stirling για όρους πρώτης τάξης :

$$= N\ln(N) - N - 2\ln(2) - (N-2)\ln(N-2) + (N-2) =$$

$$= N\ln N - (N-2)\ln(N-2) - 2\ln(2) =$$

$\boxed{N = N-2+2}$

$$= (N-2)\ln(N) + 2\ln(N) - (N-2)\ln(N-2) - 2\ln(2)$$

$$= (N-2)[\ln(N) - \ln(N-2)] + 2[\ln(N) - \ln(2)] =$$

$$= (N-2)\ln\left(\frac{N}{N-2}\right) + 2\ln\left(\frac{N}{2}\right)$$

$$= -(N-2)\ln\left(\frac{N-2}{N}\right) - 2\ln\left(\frac{2}{N}\right) =$$

$$= N\left[-\underbrace{\frac{(N-2)}{N}}_{\Pi}\ln\Big(\underbrace{\frac{N-2}{N}}_{\Pi}\Big) - \underbrace{\frac{2}{N}}_{1-\Pi}\ln\Big(\underbrace{\frac{2}{N}}_{1-\Pi}\Big)\right] = NH\left(\frac{2}{N}\right)$$

$$\Leftrightarrow \binom{N}{2} \simeq 2^{NH\left(\frac{2}{N}\right)}$$

Το πλήθος των τυπικών μηνυμάτων

- Τυπικά μηνύματα είναι τα πιο πιθανά μηνύματα

- $M = \{ m_1, m_2, \ldots, m_N \}$ το σύνολο των μηνυμάτων με $N = 2^L$

$L \to$ μήκος μηνύματος

$N \to$ αριθμός κωδικών λέξεων συμβόλων

- $P(m_i)$ οι πιθανότητες εμφάνισης των μηνυμάτων.

- Αν το L αυξάνει
  - κάποια μηνύματα έχουν μικρή πιθανότητα εμφάνισης
  - τα υπόλοιπα έχουν κάποια μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης (τυπικά μηνύματα)

Έστω μ_i το πλήθος του συμβόλου S_i στο μήνυμα m_i μήκους L_i.

Πιθανότητα εμφάνισης του μηνύματος: m: $P(m) = \prod_{i=1}^{q} [p(S_i)]^{\mu_i}$

Νόμος μεγάλων αριθμών: $P(S_i) = \frac{\mu_i}{L} \Rightarrow \mu_i \simeq L p(S_i)$

Άρα $\log[P(m)] = \log\left\{\prod_{i=1}^{q} [P/S_i]^{L p(S_i)}\right\} = \sum_{i=1}^{q} \log\left[P(S_i)^{L p(S_i)}\right]$

$= L \cdot \sum_{i=1}^{q} p(S_i) \log[P/S_i] = -L H(S) \to$ προσέγγιση του $\log[P(m)]$ με την εντροπία.

Θεώρημα Shannon-McMillan

Για μια διακριτή πηγή S μπορεί να βρεθεί ένα μήκος μηνυμάτων L_0, με $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, έτσι ώστε τα μηνύματα της πηγής με μήκος $L \geq L_0$ να διαχωρίζονται σε:

- ένα σύνολο S' με άθροισμα πιθανοτήτων εμφάνισης μικρότερο του ε.
- ένα σύνολο S'' με άθροισμα πιθανοτήτων εμφάνισης που ικανοποιούν την σχέση:

$$\left| \frac{-\log[p(m)]}{L} - H(S) \right| \leq \delta \quad (1)$$

Για $\varepsilon \to 0$ το S'' περιέχει τα μηνύματα με υψηλή πιθανότητα (τυπικά μηνύματα)

$$1 - \varepsilon \leq p(S') \leq 1 \quad (2)$$

Υπολογισμός του αριθμού των τυπικών μηνυμάτων

$$(1) \Leftrightarrow -\delta \leq \frac{-\log[p(m)]}{L} - H(S) \leq \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -L\cdot\delta \leq -\log[p(m)] - L\cdot H(S) \leq L\cdot\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -L\cdot\delta + L\cdot H(S) \leq -\log[p(m)] \leq L\cdot\delta + L\cdot H(S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -L\cdot\delta - L\cdot H(S) \leq -\log[p(m)] \leq L\delta - L\cdot H(S) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-L\cdot[H(S)+\delta]} \leq p(m) \leq 2^{-L[H(S)-\delta]} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{m\in S''} 2^{-L[H(S)+\delta]} \leq \sum_{m \in S''} p(m) \leq \sum_{m\in S'} 2^{-L[H(S)-\delta]} \Leftrightarrow$$

$$M \cdot 2^{-L[H(S)+\delta]} \leq P(S'') \leq M \cdot 2^{-L\cdot[H(S)-\delta]} \qquad (3)$$

$(2) \wedge (3)$ και $\left.\begin{array}{l} \text{για } \varepsilon \to 0 \\ \text{για } \delta \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M \cdot 2^{-L\cdot H(S)} \simeq 1 \Leftrightarrow M = 2^{L\cdot H(S)} \leq q^{L}$.