22/2/17

Μάθημα 1

Πληροφορία - Κώδικες

1948: Claude Shannon → Θεώρημα για όριο συμπίεσης πληροφορίας το οποίο λέει ότι δεν μπορούμε να συμπιέσουμε την πληροφορία περισσότερο από την $\boxed{\text{εντροπία}}$ της. (αταξία))

→ θωράκιση για μη εσφαλμένη μετάδοση → Χωρητικότητα καναλιού

Πομπός → Κανάλι → Δέκτης

θόρυβος

Πομπός:
- Πηγή πληροφορίας
- Κωδικοποιητής

Σύμβολα $A = \{a_1, a_2, \dots\}$
Πιθανότητες $\Pi_A = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$

Δέκτης:
- Αποκωδικοποιητής

Σύμβολα $B = \{b_1, b_2, \dots\}$
Πιθανότητες $\Pi_B = \{q_1, q_2, \dots\}$

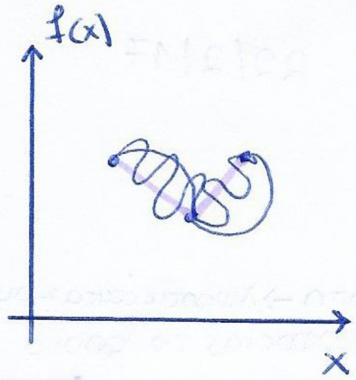
Εντροπία: Αν π.χ το σύμβολα $A = \{0, 1\}$ η εντροπία συνδέεται με την πιθανότητα να έρθει το σύμβολο 0 και τη πιθανότητα να έρθει το σύμβολο 1.

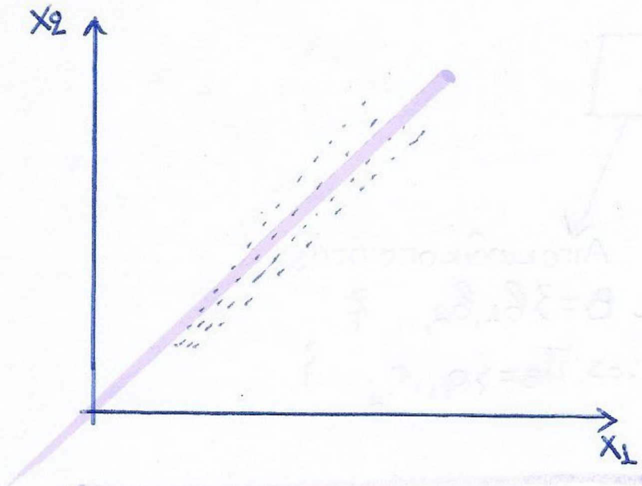
Ο Shannon απάντησε στα εξής:

1) Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση των συμβόλων της πηγής; (Πρώτο θεώρημα του Shannon)
2) Ποιος είναι ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης σε ένα κανάλι με θόρυβο; (Δεύτερο θεώρημα του Shannon)

- Υπάρχει πιθανότητα αλλοίωσης ενός bit. Εγώ θέλω σφάλμα μετάδοσης 0. Ερώτημα: Πόσο γρήγορα μπορώ να στέλνω bit έτσι ώστε να έχω σφάλμα μετάδοσης 0;

Εφαρμογές:
- Τηλεπικοινωνίες
- Πληροφορική (Συμπίεση)
- Τεχνητή Νοημοσύνη
- Γλωσσολογία
- Οικονομία
- Γενετική
- Συμπερασματολογία (Φιλοσοφία) → Η πιο απλή εξήγηση





ευθεία που ελαχιστοποιεί την απόσταση.

! Θέλω να μου συμπιέσετε αυτά τα σημεία. - Ποια είναι η πιο απλή συμπίεση; (Ζεύγη x_1-x_2)

$$S = \{[x_1^i, x_2^i]\}_{i=1,\dots,N}$$

Θα περάσουμε μια ευθεία.

$y = ax + b$

$x_2 = ax_1 + b$

Κριτήριο για ευθεία:

1. Ποια ευθεία χτυπάει τα περισσότερα σημεία.
2. Ευκλείδια απόσταση μεταξύ κάθε σημείου και της ευθείας.

Τα σημεία που ικανοποιούν την ευθεία θα δίνουν:

$$\begin{cases} x_2^{(1)} = ax_1^{(1)} + b \\ x_2^{(2)} = ax_1^{(2)} + b \\ x_2^{(3)} = ax_1^{(3)} + b \\ \vdots \\ x_2^{(N)} = ax_1^{(N)} + b \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & 1 \\ x_1^{(3)} & 1 \\ \vdots & \\ x_1^{(N)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \\ \vdots \\ x_2^{(N)} \end{bmatrix}$$

N εξισώσεις και 2 άγνωστοι (a, b)

$$A \cdot \underset{\uparrow\, u}{x} = b$$

$(N\times 2)\ (2\times 1)\ \ \ (N\times 1)$

Δύσκολο σύστημα γιατί έχουμε πολλές εξισώσεις (περιορισμούς) θα βρω μια προσεγγιστική λύση.

$Ax=b \Leftrightarrow Ax-b=0 \Leftrightarrow \|Ax-b\|^2=0$

διάνυσμα

$\|x\|^2=\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2}$

?Το $\|Ax-b\|$ δεν θα είναι ποτέ ίσο με 0.
θα βρω το x για το οποίο ελαχιστοποιείται.

θέτω $J(x)=\|Ax-b\|^2$ και αναζητώ το x για το οποίο ελαχιστοποιείται.
↳συνάρτηση πολλών μεταβλητών
γιατί το x είναι διάνυσμα.

$$\min_x J(x) \Leftrightarrow \min_x \|Ax-b\|^2 \Leftrightarrow \frac{\partial J}{\partial x}=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2A^T(Ax-b)=0$$

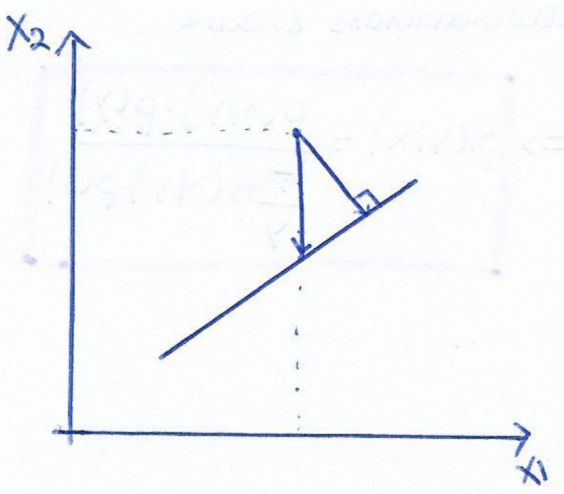
↳είναι διάνυσμα

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^TA}_{2\times 2}x=A^T\cdot b \Leftrightarrow \boxed{x=(A^TA)^{-1}A^Tb}$$

γευδοαντίστροφος του A

Κάνουμε A^TA γιατί ξέρουμε ότι είναι τετραγωνικός προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι αντιστρέφεται
$A^TA \rightarrow$ θετικά ορισμένος
$x^TA>0$

Αυτή η προσέγγιση δεν είναι η καλύτερη.



Πιθανότητες (επανάληψη)

Τυχαία μεταβλητή $\rightarrow$ διακριτή / συνεχής

Διακριτή τ.μ.Χ. : $(x \; , \; A \; , \; \Pi_A)$

$x \downarrow$ τιμή, $A \downarrow$ σύνολο τιμών, $\Pi_A \downarrow$ πιθανότητες

$A = \{a_1, a_2, \ldots a_N\}$

$\Pi_A = \{\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_N)\}$

- $\pi(a_i) = \pi_i = p(x = a_i)$
- Αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι η ταξινομημένη δυάδα $(x, y) \rightarrow p(x, y)$ ← από κοινού πιθανότητα
- Δεσμευμένες πιθανότητες $p(x|y)$, $p(y|x)$
- Κανόνας του Bayes

$$p(x|y) \cdot p(y) = p(x, y)$$

$$p(y|x) \cdot p(x) = p(x, y)$$

- Κανόνας της περιθωριοποίησης (άθροισης)

$$p(x) = \sum_y p(x, y)$$

$$p(x) = \sum_{i=1}^{N} \{p(x, y = a)$$

- Συνδυάζοντας τους κανόνες Bayer και περιθωριοποίησης έχουμε:

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)} = \frac{p(x,y)}{\Sigma p(x,y)} = \frac{p(x,y)}{\sum_y p(x|y) \cdot p(y)} \Longleftrightarrow \boxed{p(y|x) = \frac{p(x|y) \cdot p(y)}{\sum_y p(x|y) \cdot p(y)}}$$

Άσκηση

Δοχείο A: {8 πράσινες μπάλες, 2 κόκκινες μπάλες} → $p(G/A)=\frac{8}{10}$, $p(R/A)=\frac{2}{10}$

Δοχείο B: {3 πράσινες μπάλες, 7 κόκκινες μπάλες} → $p(G|B)=\frac{3}{10}$, $p(R|B)=\frac{7}{10}$

- Επιλέγω τυχαία ένα δοχείο με $p(A)=p(B)=\frac{1}{2}$
- Επιλέγω μια μπάλα μέσα από το δοχείο

Ερώτηση: Ποια η πιθανότητα να διαλέξω κόκκινη μπάλα ή πράσινη μπάλα;

$$p(R)=p(A)\cdot p(R|A)+p(B)\cdot p(R|B)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}=0{,}45$$

$$p(G)=1-p(R)=0{,}55$$
$$=p(A)\cdot p(G/A)+p(B)\cdot p(G|B)$$

Ερώτηση: Ποια η πιθανότητα να έχω επιλέξει το δοχείο A (ή B) δοθέντος του χρώματος της μπάλας (R ή G)

$$p(A|R)=\frac{P(A,R)}{P(R)}=\frac{0{,}1}{0{,}45}=0{,}22$$

Λύση

$$p(A,R)=p(A)\cdot p(R|A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$$

$$p(A|G)=\frac{P(A,G)}{P(G)}=\frac{0{,}4}{0{,}55}=0{,}73$$

Λύση

$$P(A,G)=p(A)\cdot p(G/A)=0{,}8\cdot\frac{1}{2}=0{,}4$$

$$P(B|R)=\frac{P(B,R)}{P(B)}=\frac{0{,}35}{0{,}45}=0{,}78$$

Λύση

$$P(B,R)=p(B)\cdot p(R|B)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}7=0{,}35$$

$$P(B|G)=\frac{P(B,G)}{P(G)}=\frac{0{,}15}{0{,}55}=0{,}27$$

Λύση

$$P(B,G)=P(B)\cdot P(G|B)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}3=0{,}15$$