16/5

6ο κεφάλαιο

Αριθμητική ολοκλήρωση

Δεδομένα: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη.

(Θα χρειαστούμε και επιπλέον ομαλότητα)

Ζητούμενο

Προσεγγίσεις του

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

- Αν F μια παράγουσα της f, δηλαδή τ.ω: $F'(x) = f(x)$, τότε $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Προβλήματα

- Η F είναι πολλές φορές άγνωστη
- Ακόμα και για απλές f, η F μπορεί να είναι πολύπλοκη πχ. για $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$

η F είναι πολύπλοκη.

Στην αριθμητική ολοκλήρωση προσεγγίζουμε το $\int_a^b f(x)dx$ με ένα τύπο ολοκλήρωσης Q_{n+1}.

$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$

Τα $x_0, \dots, x_n$ λέγονται κόμβοι του Q_{n+1} και τα $w_0, \dots, w$ λέγονται βάρη.

Τύπα ολοκλήρωσης Newton-Cotes

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, και

$x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

Έστω $p_n \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.
$p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Ο τύπος Newton-Cotes με $n+1$ κόμβους ορίζεται ως
$$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx$$

→ Αν η $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $p_n = f$
οπότε $\int_a^b f(x)\,dx = Q_{n+1}(f)$

∘ Με άλλα λόγια

$\forall p \in \mathbb{P}_n$ $Q_{n+1}(p) = \int_a^b p(x)\,dx$, δηλαδή ο Q_{n+1} ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n

Θέλουμε να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f)$ στη μορφή

$$Q_{n+1}(f) = W_0 f(x_0) + \dots + W_n f(x_n)$$

με κατάλληλα βάρη $w_0, \dots, w_n$

Έστω $L_0, \dots, L_n$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$, δηλαδή:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Τότε έχουμε $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$

Επομένως

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b P_n(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\int_a^b L_i(x)\,dx \right)}_{\substack{\shortparallel \\ w_i}} f(x_i)$$

Αναλυτικότερη μορφή των W_i:

$$W_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$$

$$= \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-(a+j\cdot h)}{(a+ih)-(a+j\cdot h)} \cdot h\,ds$$

$x = a+hs$

$$= h \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds}_{w_i^*}$$

$\varphi_i(s)$

Τα $w_0^*, \dots, w_n^*$ δεν εξαρτώνται από το διάστημα $[a,b]$ και υπολογίζονται μια μόνο φορά. Τα w_i προκύπτουν μετά με πολλαπλασιασμό επί h.

Ερώτημα: Έστω $f \in C[a,b]$

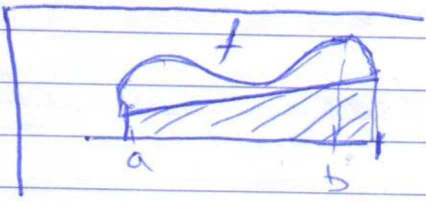
Ισχύει $Q_{n+1}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)dx$;

Απάντηση γενικά όχι!

Συμπέρασμα: στην πράξη ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τύποι των Newton-Cotes με μικρό n.

Ο τύπος του τραπεζίου

Είναι ο τύπος των Newton-Cotes με 2 κόμβους.



$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του **απλού** τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi)$$

Απόδειξη

Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$p_1(a) = f(a), \quad p_1(b) = f(b)$$

Τότε

- $Q_2(f) = Q_2(p_1)$
- $Q_2(p_1) = \int_a^b p_1(x)\,dx$

Επομένως,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)}_{R_2(f)} =$$

$$= \int_a^b f(x) - Q_2(p_1)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\,dx$$

όμως

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi(x) \in (a,b)$$

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)$$

Επομένως,

$$R_2(f) = \int_a^b (x-a)(x-b)\,\frac{f''(\xi(x))}{2}\,dx$$

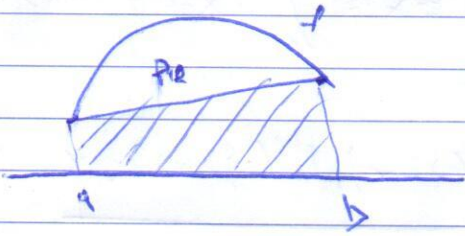
$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} f''(\xi)\cdot \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$$

18/5/2017

① Τύπος του τραπεζίου



$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\,[f(a) + f(b)]$$

Λήμμα Έστω $f \in C^2[a,b]$

Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ που εξαρτάται από την f, τ.ω.

(*) $$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)}_{R_2(f)} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

$$R_2(f) = -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\, f''(\xi(x))\, dx$$

Ισχυρισμος Υπάρχει $\xi_1 \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b (x-a)\underset{\geq 0}{(b-x)}\, f''(\xi(x))\, dx = f''(\xi_1)\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}_{\frac{(b-a)^3}{6}}$$

Απόδειξη

Εστω $m = \min\limits_{a\le x\le b} f''(x)$, $M = \max\limits_{a\le x\le b} f''(x)$

Τοτε

$$m(x-a)(b-x) \le (x-a)(b-x)\, f''(\xi(x)) \le M(x-a)(b-x)$$

$$\Rightarrow m\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}_{>0} \le \int_a^b (x-a)(b-x)\, f''(\xi(x))\, dx \le M \cdot \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}_{>0}$$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b (x-a)(b-x)\, f''(\xi(x))\, dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx}$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx$$

Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. για την f'' υπαρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\frac{\int_a^b (x-a)(b-x)\, f''(\xi(x))\, dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\, dx} = f''(\xi_1)$$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, και $x_i = a + ih$ $i = 0, \dots, n$, ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

Εφαρμόζοντας τον τύπο του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 0, \dots, n-1$, και αθροίζοντας τα αποτελέσματα προκύπτει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Q^T_{n+1}

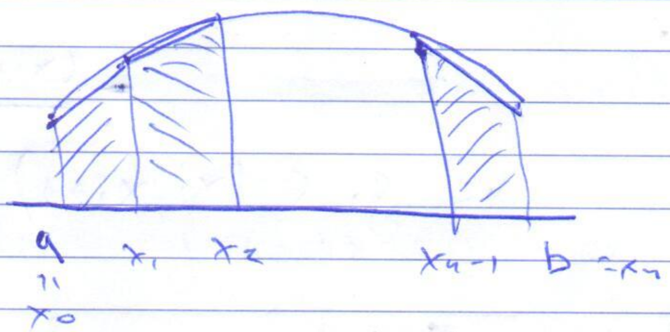
$$Q^T_{n+1}(f) = \frac{x_1 - x_0}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{x_2 - x_1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$+ \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right]$$

$$Q^T_{n+1}(f) = h\left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n)\right]$$



Πρόταση (παράσταση σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q_{n+1}^T ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου στο διάστημα $[a,b]$ ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό.

$x_i = a + ih$, $i=0,\dots,n$ του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$\int_a^b$ τ.ω.

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}^T(f)}_{R_{n+1}^T(f)=} = -\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Απόδειξη

Το συνολικό σφάλμα $R_{n+1}^T(f)$ είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων του απλού τύπου του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$.

Άρα $R_{n+1}^T(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})] \right\}}_{= -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i)}$

με $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

$$= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{h^3 n}{12}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

Τώρα $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} f''(x)$

$\max_{a\leq x\leq b} f''(x) \dots \leq$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \max_{a \leq x \leq b} f''(x)$$

Άρα, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = f''(\xi).$$

Επομένως, $R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12} n \cdot f''(\xi)$

$= b-a$

$$= -\frac{nh}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Ο τύπος του Simpson

Ο τύπος του Newton - Cotes με 3 κόμβους λέγεται τύπος του simpson. Στο $[a,b]$ έχουμε

$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2} \left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b) \right]$$

με $h = \frac{b-a}{2}$ με $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2$,

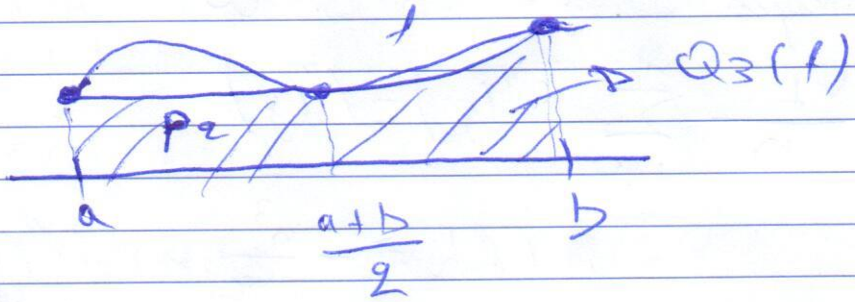
ο $Q_3(f)$ γράφεται και Genv μορφή:

$$Q_3(f) = h \left[\frac{1}{3} f(x_0) + \frac{4}{3} f(x_1) + \frac{1}{3} f(x_2) \right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$w_0 = \frac{h}{3}, \quad w_1 = \frac{4h}{3}, \quad w_2 = \frac{h}{3}$$

$$w_0 + w_1 + w_2 = 2h = b - a$$



Ερώτημα: Μέχρι ποιού βαθμού πολυώνυμα ολοκληρώνει ο Simpson ακριβώς;

- Από την κατασκευή του ξέρουμε

$$\forall p \in \mathbb{P}_2 \quad \int_a^b p(x)dx = Q_3(p)$$

Ισχυρισμός:

$$\forall p \in \mathbb{P}_3 \int_a^b p(x)dx = Q_3(p)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο Q_3 ολοκληρώνει ακριβώς τη συνάρτηση $g_3(x) = x^3$

1η απόδειξη:

$$\int_a^b x^3 dx - \overbrace{\frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right]}^{Q_3(g_3)} =$$

2η απόδειξη

$$q \in \mathbb{P}_2 : \quad \underset{q_3}{\underset{\uparrow}{x^3}} = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + q(x)$$

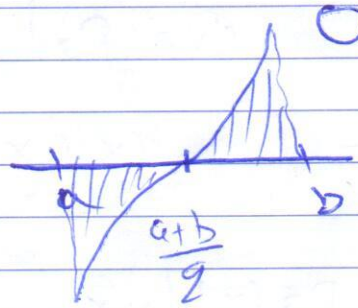
$q \in \mathbb{P}_2$

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

Έχουμε

$$R_3(q_3) = R_3(p) + R_3(q)$$

$$= R_3(p) = \underbrace{\int_a^b p(x)\,dx}_{=0} - \underbrace{Q_3(p)}_{=0} = 0$$



Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε υπάρχει ξ στο (a,b) τ.ω.

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη

Έστω $p_3 \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$p_3(a) = f(a),\quad p\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad p(b) = f(b)$$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Σύμφωνα με την 4.15

$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \cdot (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot (x-b)$$

Τώρα

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_3(f)}_{\substack{\parallel \\ Q_3(p_3)}}$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_3(x)dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - p_3(x)]\,dx$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την (+) έχουμε:

$$R_3(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$$

$$= -\frac{1}{24}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\cdot f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{24} f^{(4)}(\xi_1)\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a)\,dx$$

όπως στην περίπτωση του τραπεζίου

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-a)\,dx = \frac{(b-a)^5}{2^3\cdot 15}$$

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

νδο $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \lambda_2 \varphi(x_2) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$$

κυρτοί συνδυασμοί τιμών της φ

Απόδειξη

Έχουμε

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \lambda_1 \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_{a \leq x \leq b}$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{1} \max_{x} \varphi(x)$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

παρόμοια

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \geq \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Το αποτέλεσμα έπεται απο το Θεώρημα της ενδιάμεσης Τιμής.

19/5/17

Άσκηση 6.4

$\varphi \in C[a,b]$, $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι αριθμοί

νδο

$$\exists\, \xi \in [a,b]$$

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\varphi(\xi)$$

Απόδειξη

$\lambda_i = 0 \quad , i = 1, \dots, n$

Η σχέση ισχύει για οποιοδήποτε ξ

$\lambda i \geq 0 \; , \; i = 1, \dots, n$

Θέτουμε $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{\lambda i}{\lambda i + \dots + \lambda n} \quad , i = 1, \dots, n$

Τότε σύμφωνα με την Άσκηση 6.3
αφού $\tilde{\lambda} i \geq 0$ και $\tilde{\lambda}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n = 1$,

έχουμε:

$$\tilde{\lambda}_1 \varphi(x_1) + \dots + \tilde{\lambda}_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$$

πολλαπλασιάζοντας επι $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

$\lambda i \leq 0 , \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_n < 0$

Με $\tilde{\lambda} i = -\lambda i$, σύμφωνα
με την προηγούμενη περίπτωση.

$$\tilde{\lambda}_1 \varphi(x_1) + \dots + \tilde{\lambda}_n \varphi(x_n) = (\tilde{\lambda}_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n) \varphi(\xi)$$

Αλλάζοντας τα πρόσημα
προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 6.8

$Q_n^T \qquad Q_m^T \qquad [-1,1]$

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2$$

νδο

$$Q_n^T(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq Q_m^S(f)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με τους $\underset{\text{Τρ.}}{(6.4)}$ και $\underset{\text{Simpson}}{(6.9)}$

$$\exists \xi \in (-1,1) \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) = -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 f''(\xi)$$

$$\exists \theta \in (-1,1) \quad \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_m^S(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{2}{n-1}\right)^4 f^{(4)}(\theta)$$

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x \Rightarrow$$

$$f''(x) = x^4 - 2$$

για $x \in [-1,1]$ έχουμε $f''(x) \leq 1-2 = -1 \leq 0$

Άρα $\underbrace{-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2}_{<0} \underbrace{f''(\xi)}_{<0} > 0$, οπότε

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^T(f) > 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx > Q_n^T(f).$$

$$f'''(x) = 4x^2$$

$$f^{(4)}(x) = 12x^2 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^S(f) \leq 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_n^S(f)$$

<u>Άσκηση 6.9</u>

Q $[a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

<u>Νδο:</u> Υπάρχει το πολύ ένα $k \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$\exists\, c_k \in \mathbb{R}$ $\forall f \in C^k[a,b]$
$\exists\, \xi \in (a,b)$ $R(f) = c_k f^{(k)}(\xi)$

• Αν ισχύει αυτή η σχέση με $C_k = 0$, τότε ο Q ολοκληρώνει όλες τις συναρτήσεις $f \in C^k[a,b]$ ακριβώς.

Ιδιαίτερα όλα τα πολυώνυμα.

Όμως, κανένας τύπος ολοκλήρωσης με n κόμβους δεν ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού έως και $2n$ ακριβώς, πχ για το

$$p(x) = (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

<u>Ισχύει:</u>

$$Q(p) = 0$$

αλλά $$\int_a^b p(x)\,dx > 0$$

• Έστω ότι ισχύει αυτή η σχέση με $C_k \neq 0$

Αν $f \in \mathbb{P}_{k-1}$, τότε το σφάλμα είναι μηδέν, διότι η παράγωγος τάξης k :

$$f^{(k)}(\xi) = 0$$

Αν $f(x) = x^k$, τότε $f^{(k)}(\xi) = k!$
οπότε $R(f) = C_k \cdot k! \neq 0$

Αυτό μπορεί να συμβεί για το πολύ ένα k.

Άσκηση 6.10

Q_n τύπος των Newton-Cotes

σε ένα διάστημα $[-a,a]$

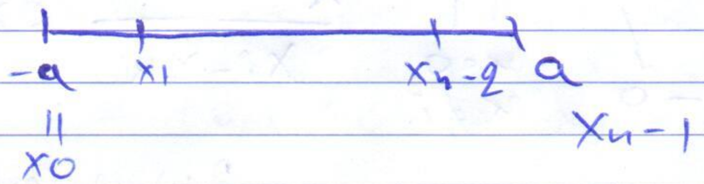
Αν

$$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$$

και

$x_i = -x_j$ ΝΔΟ $w_i = w_j$

(ο τύπος είναι συμμετρικός)



Απόδειξη Ισχύει:

$$\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} \quad \int_{-a}^{a} p(x)\,dx = Q_n(p)$$

Για τα πολυώνυμα του Lagrange

L_i, L_j,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k},$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k},$$

η (*) δίνει

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx \quad \text{και} \quad w_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)\,dx$$

Έχουμε:

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}\,dx$$

λόγω συμμετρίας

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x + x_k}{x_i + x_k}$$

$$= -\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t + x_k}{x_i + x_k}\,dt$$

$x = -t$

$x_i = -x_j$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t + x_k}{-x_j + x_k}\,dt$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{t - x_k}{x_j - x_k}\,dt = w_j$$

23/5

Άσκηση 6.11

$[-a,a]$ Q_n: Τύπος των Newton-Cotes σε αυτό το διάστημα $\varphi: [-a,a] \to \mathbb{R}$ περιττή ή ολοκληρώσιμη.

ΝΔΟ: $\int_{-a}^{a} = \varphi(x)dx = Q_n(\varphi)$

Απόδειξη: προφανώς $\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0$

Επίσης $\varphi(0) = 0$ (επειδή φ περιττή)

Αν $-a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = a$, οι κόμβοι του Q_n τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση (και το γεγονός ότι $\varphi(0)=0$) έχουμε

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{[n/2]} w_i \underbrace{[\varphi(x_i) + \varphi(-x_i)]}_{=0 \text{ (}\varphi\text{ περιττή)}} = 0$$

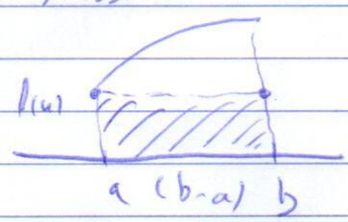
Άρα $\int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0 = Q_n(\varphi)$

Άσκηση 6.13

$Q(f) = (b-a)f(a)$ = Αριστερός τύπος του ορθογωνίου

(Δεξιός ") $= Q(f) = (b-a) f(b)$

Έστω $R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$



1) $\forall p \in \mathbb{P}_0$ ισχύει $R(p) = 0$

για $p(x) = \gamma$ έχουμε: $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \gamma \cdot dx$
$= \gamma \cdot (b-a)$

και $Q(p) = (b-a)\underbrace{p(a)}_{=\gamma}$ Άρα $R(p) = 0$

2) $\forall f \in C^1[a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b) \ R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a)dx$$

3) $n \in \mathbb{N}$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$, $\quad x_i = a + i \cdot h, \ i = 0 \dots n$

νδο $\forall f \in C^2[a,b] \quad \exists \ \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right]$$

$$= \frac{b-a}{2} h^2 f''(\xi)$$

Έχω

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \left[h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right] \right\}$$

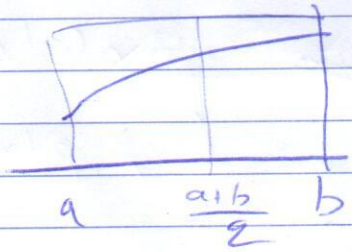
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} f''(\xi_i)$$

$$= \frac{h^3}{3} n \frac{d}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi)$$ φράσσεται από min

$$= \frac{nh}{6} h^2 \cdot f''(\xi)$$

6.14

$Q(f) = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

1) νδο $\forall \mu \in \mathbb{P}_1$ $R(p)=0$

με πράξεις $p(x) = \gamma x + \delta$

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b p(x)\,dx &= \dots = \gamma\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + \delta \beta a \\ Q(p) &= (\beta - a)\left[\gamma \cdot \frac{a+\beta}{2} + \delta\right] \end{aligned}\right\} R(p) = 0$$

- Χωρίς πράξεις ο τύπος ολοκληρώνει σταθερές συναρτήσεις (δηλ πολυώνυμα μηδενικού βαθμού) ακριβώς.

ΘΔΟ ολοκληρώνει και την $q(x) = x - \frac{a+b}{2}$ ακριβώς:

$$\int_a^b q(x)\,dx = 0 \quad \text{και} \quad Q(q) = \frac{a+b}{2} - \frac{a+b}{2} = 0$$

Κάθε $\varphi \in \mathbb{P}_1$ γράφεται ως γραμμ. συνδυασμός της q και μιας σταθεράς. και επειδή καθ' ένα από αυτά ολοκληρώνεται ακριβώς και αυτό θα ολοκληρώνεται ακριβώς.

2) νδο $\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

α) Έστω $\varphi \in \mathbb{P}_1$ τ.ω $p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ και

$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Τότε $\forall x \in (a,b)$ $\exists$ $\xi(x) \in (a,b)$ τ.ω

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Άρα $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))\left(x - \frac{a+B}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot \int_a^b \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} dx = \cdots$$

$$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} f'(\xi(x))\,dx$$

$$= f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)$$

3) Σύνθετος αριστερός ορθογωνίου

$n \in \mathbb{N}$ $\quad h = \frac{b-a}{n}$ $\quad x_i = a + ih$ $\quad i = 0, 1, \dots, n$

$$h \cdot f(x_0) + h \cdot f(x_1) + \dots + h f(x_{n-1}) =$$

$$h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

για $f \in C^2[a,b]$ νδο $\exists \xi \in (a,b)$

τ.ω $\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$= \frac{b-a}{2} \cdot h \cdot f'(\xi)$

Έχω $\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a}^{x_{i+1}} f(x)dx$

$- h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$\cancel{= \frac{b-a}{2} h \cdot f'(\xi)}$

$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h f(x_i) \right]$

$f \to \left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2 \cdot f'(\xi_i) \quad \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$

$= \frac{h^2}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{h^2}{2} n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad f'(\xi)$

$= \underbrace{\frac{h \cdot n}{2}}_{= b-a} \cdot h \cdot f'(\xi)$

ενδιάμεσο σημείο

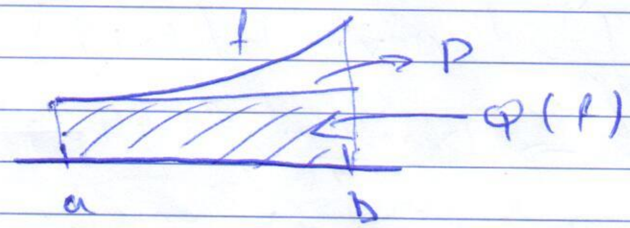
6.12

$Q(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}$, $f\in[a,b]$

(Αναπτυγμα Taylor της f πρωτου βαθμου)
ως προς το σημειο a

$p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$

$$\int_a^b p(x)\,dx = (b-a)f(a) + f'(a)\underbrace{\int_a^b (x-a)\,dx}_{\frac{(b-a)^2}{2}} = Q(f)$$



1) $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

νδο $\forall p \in \mathbb{P}_1 : R(p) = 0$

α) Με πράξεις:
Θέτω $p(x) = \gamma x + \delta$ + πράξεις...

β) Χωρίς πράξεις:

Το πολυώνυμο Taylor του p
συμπίπτει με το p Άρα:

$$R(p) = \int_a^b p(x)\,dx - \underbrace{Q(p)}_{=\int_a^b p(x)dx} = 0$$

2) $f \in C^2[a,b]$: $\exists\ \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} \cdot f''(\xi)$$

Με Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot f''(\xi(x))$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q(f)}_{= \int_a^b p(x)\,dx}$$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi(x))\,dx = \frac{f''(\xi)}{2} \underbrace{\int_a^b (x-a)^2\,dx}_{= \frac{(b-a)^3}{3}}$$

3) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$
για $i = 0, \dots, n$

νδο $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\ \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left(h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$

Έχω $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} [h f(x_i)\ \frac{h^2}{2} \cdot f'(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - [h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)] \Big\}$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} \cdot f''(\xi_i) = \frac{h^3}{3} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi)$$

$$= \frac{n \cdot h}{6} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

25/5

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και
$w: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους
δηλαδή τ.ω. $w(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

και $0 < \int_a^b w(x)dx < \infty$

Στόχος: Ο προσδιορισμός τύπων ολοκλήρωσης
Q_n, $n \in \mathbb{N}$, της μορφής $Q_n(f) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \quad *$$

που ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Ισχυρισμός: κανένας τύπος της μορφής δεν ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι $2n$.
→ Πράγματι, για το πολυώνυμο $p(x) = (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$

Έχουμε $p \in \mathbb{P}_{2n}$, $Q_n(p) = 0$

και $\int_a^b w(x)p(x)dx > 0$

* για την προσέγγιση του $I(f) = \int_a^b w(x) f(x) dx$

Οι τύποι του Gauss είναι μοναδικοί και ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι $2n-1$.

Βοηθητικό αποτέλεσμα:

Ορθογώνια Πολυώνυμα:

Έστω $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους

Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο P_n βαθμού ακριβώς n, με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα.

(γράφουμε $P_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$) τ.ω.

$$\int_a^b w(x) P_n(x)\, r_{n-1}(x)\, dx = 0 \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Οι ρίζες $x_1, \dots, x_n$ του P_n είναι απλές και βρίσκονται στο διάστημα (a,b)

Τα πολυώνυμα $P_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση w

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.

Τότε: α) με κόμβους $x_1 < \dots < x_n$ τις ρίζες του P_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \dots, w_n$ τ.ω. $\longrightarrow$

ο Q_n, $Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$,

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, δηλαδή

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1} \quad \int_a^b w(x)p(x)dx = Q_n(p)$$

β) Αν ο τύπος Q_n, $Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$, τότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του P_n

<u>Απόδειξη</u>

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τ.ω $q(x_i) = p(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

Τότε $p - q \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $(p-q)x_i = 0$, οπότε

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{P_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Επομένως, $\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)\left[q(x) + P_n(x) r_{n-1}(x)\right]dx$

$$= \int_a^b w(x)q(x)dx + \underbrace{\int_a^b w(x)P_n(x)r_{n-1}(x)dx}_{0}$$

Δηλαδή

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx$$

Αν τώρα $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_1, \dots, x_n$, δηλαδή

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Τότε $q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x)$

Άρα

$$\int_a^b W(x) p(x) dx = \int_a^b W(x) \sum_{i=1}^{n} p(x) L_i(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b W(x) L_i(x) dx \right]}_{= w_i \text{ (ανεξάρτητο } p!)} p(x_i)$$

Μοναδικότητα και θετικότητα των w_i

Έστω $w_1', \dots, w_n'$ τ.ω ο τύπος Q_n',

$Q_n'(f) = w_1' f(x_1) + \dots + w_n' f(x_n)$, να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι $2n-1$.
Τότε $(L_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, οπότε

$$Q_n(L_j^2) = \underbrace{\int_a^b W(x) [L_j(x)]^2 dx}_{= w_j > 0} = Q_n'(L_j^2)$$

Αποδειξη (β)

Εστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ Θέτουμε

$$p(x) = \underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\tilde{p}_n(x),\ \tilde{p}_n \in \hat{\mathbb{P}}_n} r_{n-1}(x)$$

Τότε $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p) = 0$
οπότε και το

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = 0,$$

Δηλαδή

$$\int_a^b w(x) \tilde{p}_n(x) r_{n-1}(x) dx = 0$$

$$\forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Λόγω της μοναδικότητας των ορθογώνιων πολυωνύμων θα έχουμε

$\tilde{P}_n = P_n$, δηλαδή τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ρίζες του P_n

Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος των τεχνικών ολοκλήρωσης του Gauss)

Εστω $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ $n \in \mathbb{N}_0$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.
Αν Q_n ο τύπος του Gauss με n κόμβους ως προς τα w, και $f \in C^{2n}[a,b]$,
τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2dx$$

Απόδειξη Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι κόμβοι του Q_n και $w_1, \dots, w_n$ τα αντίστοιχα βάρη. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 1, \dots, n$

οπότε

$$Q_n(f) = Q_n(p) \underset{p \in \mathbb{P}_{2n-1}}{=} \int_a^b w(x)p(x)dx$$

$$\int_a^b w(x)f(x)dx - Q_n(f) = \int_a^b w(x)[f(x)-p(x)]dx$$

Όμως $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}\underbrace{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}_{[P_n(x)]^2}$$

Άρα $\int_a^b w(x)f(x)dx - Q_n(f) =$

$$= \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \underbrace{w(x)[P_n(x)]^2}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x))dx$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2dx$$

Με $m := \min_{x \in [a,b]} f^{(2n)}(x)$ και

$$M = \max_{a \le x \le b} f^{(2n)}(x)$$

$$\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2 m\,dx \le \int_a^b \underbrace{w(x)[P_n(x)]^2}_{\ge 0} f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \le \int_a^b w(x)[P_n(x)]^2 M\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad m \le \frac{\int_a^b w(x)\,[P_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx}{\underbrace{\int_a^b w(x)[P_n(x)]^2}_{>0}} \le M$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής το κλάσμα στη μέση αυτής της σχέσεως ισούται με $f^{(2n)}(\xi)$ με $\xi \in (a,b)$