6ο κεφάλαιο

13-05-17

Αριθμητική ολοκλήρωση

Δεδομένα: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη
και ολοκληρώσιμη
(Θα χρειαστούμε και επί πλέον ομαλότητα)

Ζητούμενο Προσεγγίσεις του

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

• Αν F μια παράγουσα της f, δηλαδή τ.ω
$F'(x) = f(x)$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Προβλήματα:

• Η F είναι πολλές φορές άγνωστη
• Ακόμα και για απλές f, η F μπορεί να είναι πολύπλοκη. π.χ για $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$, η F είναι πολύπλοκη

Στην αριθμητική ολοκλήρωση προσεγγίζουμε το
$\int_a^b f(x)\,dx$ με ένα τύπο ολοκλήρωσης

Q_{n+1}, $Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$

Τα $x_0, \dots, x_n$ λέγονται κόμβοι του Q_{n+1} και τα $w_0, \dots, w_n$ λέγονται βάρη.

Τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$ και $x_i = a + ih, i=0, \dots, n$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

Έστω $p_n \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p_n(x_i) = f(x_i), i=0, \dots, n$

Ο τύπος Newton-Cotes με $n+1$ κόμβους ορίζεται ως

$$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Αν η $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $p_n = f$, οπότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q_{n+1}(f)$$

Με άλλα λόγια,

$$\forall p \in \mathbb{P}_n \quad Q_{n+1}(p) = \int_a^b p(x)\,dx,$$

δηλαδή ο Q_{n+1} ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n.

Θέλουμε να γράψουμε τον $Q_{n+1}(f)$ στη μορφή

$$Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_n f(x_n)$$

με κατάλληλα βάρη $w_0, \dots, w_n$.

Έστω $L_0, \dots, L_n$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$ δηλαδή

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$ Τότε έχουμε.

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x)$$

Επομένως,

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i)\, L_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{w_i}.$$

<u>Απλούστερη μορφή</u> των w_i:

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$$

$$\underset{x = a+hs}{=} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-(a+jh)}{a+ih-(a+jh)}\, h\,ds$$

$$= h \int_0^n \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}}_{\varphi_i(s)}\,ds = w_i^{*}$$

Τα $w_0^*, \dots, w_n^*$ δεν εξαρτώνται από το διάστημα $[a, b]$ και υπολογίζονται μία μόνο φορά.
Τα w_i προκύπτουν μετά με πολ/μο με το h.

Ερώτημα: Έστω $f \in C[a, b]$

Ισχύει $Q_{n+1}(f) \to \int_a^b f(x)dx$, $n \to \infty$;

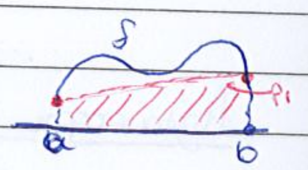
Απάντηση: Γενικά όχι!

Συμπέρασμα: Στην πράξη ~~πρακτικό~~ ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι τύποι των Newton-Cotes με μικρό n.

Ο τύπος του Τραπεζίου.

Είναι ο τύπος των Newton-Cotes με δύο κόμβους,

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$



~~Θεώρημα~~

Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} \cdot f''(\xi).$$

Απόδειξη

Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ τω ~~$p_1(a)$ & $p_1(b)$~~

$$p_1(a) = f(a), \quad p_1(b) = f(b)$$

Τότε,

- $Q_2(f) = Q_2(p_1)$
- $Q_2(p_1) = \int_a^b p_1(x)\,dx$

Επομένως,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)} = \int_a^b f(x)\,dx - Q_2(p_1) =$$

$R_2(f)$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_1(x)\,dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - p_1(x))\,dx.$$

Όμως,

$\forall x \in [a,b] \; \exists \, \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} \cdot (x-a)(x-b)$$

Επομένως,

$$R_2(f) = \int_a^b (x-a)(x-b)\cdot \frac{f''(\xi(x))}{2!}\,dx$$

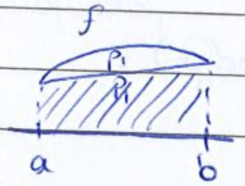
$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} f''(\xi)\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{=\frac{(b-a)^3}{6}}$$

$$= -\frac{1}{12}(b-a)^3\cdot f''(\xi)$$

$\boxed{18-05-17}$

Ο τύπος του τραπεζίου



$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\,[f(a)-f(b)]$$

Λήμμα: Έστω $f\in C^2[a,b]$.

Τότε υπάρχει $\xi\in(a,b)$, που εξαρτάται από την f, τ.ω

(*) $$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx - Q_2(f)}_{R_2(f)} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

ο Όσιος Πέτρος και η έπαυσια του γκολντμπεργκ

$$R_2(f) = -\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\zeta(x))\,dx.$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $\zeta_1 \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\zeta(x))\,dx = f''(\zeta_1)\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{\frac{(b-a)^3}{6}}.$$

Απόδειξη

Έστω $m := \min_{a\leq x\leq b} f''(x)$, $M := \max_{a\leq x\leq b} f''(x)$

Τότε,

$$m(x-a)(b-x) \leq (x-a)(b-x) f''(\xi(x)) \leq M(x-a)(b-x)$$

$$\Rightarrow m\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{\geq 0} \leq \int_a^b (x-a)(b-x) f''(\zeta(x))\,dx \leq M\underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\zeta(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής για την f'', υπάρχει $\zeta_1 \in (a,b)$ τ.ω

$$\frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\zeta(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} = f''(\zeta_1)$$

Σύνθετος τύπος του τραπεζίου.

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, και $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, n$ ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h.

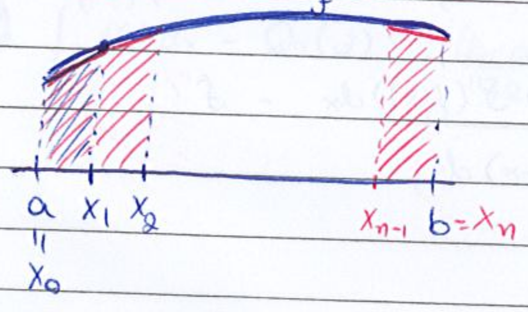
Εφαρμόζοντας τον τύπο του τραπεζίου σε κάθε ένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα προκύπτει ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου Q^T_{n+1}.

$$Q^T_{n+1}(f) = \frac{\overbrace{x_1 - x_0}^{h}}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{h}}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \dots + \frac{\overbrace{x_n - x_{n-1}}^{h}}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

$$\boxed{Q^T_{n+1}(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right].}$$



Πρόταση (Παράσταση του σφάλματος του Σύνθετου τύπου του Τραπεζίου).

Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q^T_{n+1} ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου στο διάστημα $[a,b]$ ως προς τον ομοιόμορφο διαμερισμό ~~του $[a,b]$~~ $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, n$ του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f)}_{R^T_{n+1}} = -\frac{b-a}{12} h^2 \cdot f''(\xi).$$

Απόδειξη:

Το συνολικό σφάλμα $R^T_{n+1}(f)$ είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων του απλού τύπου του Τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$. Άρα,

$$R^T_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(x_i) + f(x_{i+1})]}_{-\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} \cdot f''(\xi_i)} \right\}$$

με $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$

$$= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$= -\frac{h^3}{12} \cdot n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

Τώρα,

$$\ldots \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(z_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \max_{a\leq x\leq b} f''(x) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \max_{a\leq x\leq b} f''(x)$$

$$\min_{a\leq x\leq b} f''(x) \leq$$

Άρα, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(z_i) = f''(\xi)$$

Επομένως,

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12} n \cdot f''(\xi) = -\frac{\overbrace{nh}^{b-a}}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Ο τύπος του Simpson.

Ο τύπος των Newton-Cotes με τρεις κόμβους λέγεται τύπος του Simpson. Στο διάστημα $[a,b]$ έχουμε

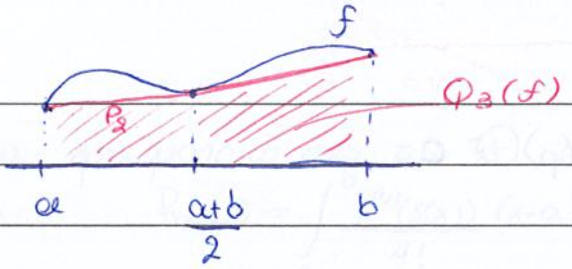
$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

Με $h = \frac{b-a}{2}$ και $x_i = a+ih$, $i=0,1,2$, ο $Q_3(f)$ γράφεται και στη μορφή:

$$Q_3(f) = h\left[\frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$w_0 = \frac{h}{3}$, $w_1 = \frac{4h}{3}$, $w_2 = \frac{h}{3}$, $w_0+w_1+w_2 = 2h = b-a$



Ερώτημα: Μέχρι ποιού βαθμού πολυώνυμα ολοκληρώνει ο τύπος του Simpson ακριβώς;

• Από την κατασκευή του ξέραμε ότι

$$p \in \mathbb{P}_2 \quad \int_a^b p(x)\,dx = Q_3(p)$$

Ισχυρισμός:

$$\forall p \in \mathbb{P}_3 \quad \int_a^b p(x)\,dx = Q_3(p).$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο $Q_3(p)$ ολοκληρώνει ακριβώς τη συνάρτηση $q_3(x) = x^3$.

1η απόδειξη:

$$\int_a^b x^3\,dx - \overbrace{\frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right]}^{Q_3(q_3)} = \dots = 0$$

2η απόδειξη:

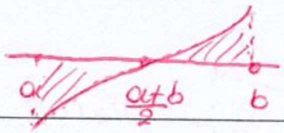
$$\underbrace{x^3}_{q_3} = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + q(x)$$

$q \in \mathbb{P}_2$

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

Έχουμε,

$$R_3(q_3) = R_3(p) + \underbrace{\cancel{R_3(q)}}_{0} = R_3(p)$$

αφού 

$$R_3(p) = \int_a^b p(x)dx - Q_3(p) = 0.$$

Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^{(4)}[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω

αφού $\mathbb{P}_3$

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} \cdot f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη:

Έστω $p_3 \in \mathbb{P}_3$ τ.ω

$p_3(a) = f(a)$, $p_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $p_3(b) = f(b)$

$$p_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Σύμφωνα με την άσκηση 4.15

$\forall x \in [a,b]$ $\exists$ $\xi(x) \in (a,b)$ τ.ω

$$(+) \quad f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)$$

Τώρα,

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)dx - \overbrace{Q_3(f)}^{Q_3(P_3)}$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b [f(x) - P_3(x)]dx$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τη (+), έχουμε:

$$R_3(f) = \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx$$

$$= -\frac{1}{24}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{24} f^{(4)}(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx}_{\frac{(b-a)^5}{2^3 \cdot 15}}$$

όπως στην περίπτωση του τύπου του τραπεζίου (να δείχνω κάθε φορά γιατί βγαίνει και πώς)

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

$\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

ΝΔΟ $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\underbrace{\lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) + \dots + \lambda_n\varphi(x_n)}_{\text{κυρτοί συνδυασμοί τιμών της } \varphi} = \varphi(\xi)$$

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\lambda_1\varphi(x_1) + \dots + \lambda_n\varphi(x_n) \leq \lambda_1 \max_{a\leq x\leq b}\varphi(x) + \dots + \lambda_n \max_{a\leq x\leq b}\varphi(x)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{1} \max_{a\leq x\leq b}\varphi(x)$$

$$= \max_{a\leq x\leq b}\varphi(x)$$

Παρόμοια

$$\lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots \lambda_n \varphi(x_n) \geq \lambda_1 \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x) + \ldots + \lambda_n \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

$$\geq \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$$

Το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

$\boxed{19-05-17}$

Άσκηση 6.4.

$\varphi \in C[a,b]$, $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ θετικοί αριθμοί.

N.Δ.O

$\exists \xi \in [a,b]$ $\lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n)$
$= (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \cdot \varphi(\xi)$.

Απόδειξη

- $\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$

  Η σχέση ισχύει για οποιοδήποτε ξ.

- $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$

  και $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n > 0$

Θέτουμε $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$, $i = 1, \ldots, n$

Τότε, σύμφωνα με την άσκηση 6.3, αφού $\tilde{\lambda}_i > 0$ και $\tilde{\lambda}_1 + \ldots \tilde{\lambda}_n = 1$, έχουμε

$$\tilde{\lambda}_1 \varphi(x_1) + \ldots + \tilde{\lambda}_n \varphi(x_n) = \varphi(\xi)$$

Πολλαπλασιάζοντας επί $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

- $\lambda_i \le 0$ και $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n < 0$

Με $\tilde{\lambda}_i = -\lambda_i$, σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση

$$\tilde{\lambda}_1 \varphi(x_1) + \ldots + \tilde{\lambda}_n \varphi(x_n) = (\tilde{\lambda}_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n)\, \varphi(\xi).$$

Αλλάζοντας τα πρόσημα προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 6.8

$Q_{n_0}^T$, Q_{n}^T $[-1, 1]$

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2$$

N.Δ.Ο

$$Q_n^T(f) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le Q_m^S(f)$$

Απόδειξη

τύπος τραπεζίου, τύπος Simpson.

Σύμφωνα με τις (6.4) και (6.9) έχουμε

$\exists \xi \in (-1,1)$ τ.ω

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) = -\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \cdot f''(\xi)$$

$\exists \Theta \in (-1,1)$ τ.ω

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_m^S(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4 \cdot f^{(4)}(\Theta)$$

$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x$

$\Rightarrow f''(x) = x^4 - 2.$

Για $x \in [-1,1]$ έχουμε ότι

$f''(x) \leq 1 - 2 = -1 \leq 0$

Άρα

$\underbrace{-\frac{1}{6}}_{<0}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \cdot \underbrace{f''(\xi)}_{<0} > 0$ οπότε

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) \geq 0 \Rightarrow$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx > Q_n^T(f)$$

$\cdot\ f^{(3)}(x) = 4x^3$

$\Rightarrow f^{(4)}(x) = 12x^2 \geq 0$

$\vdots$

Προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^s(f) \leq 0$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^s(f).$$

<u>Άσκηση 6.9</u>

$Q \quad [a,b]$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

<u>ΝΔΟ</u>:

Υπάρχει <u>το πολύ</u> ένα $k \in \mathbb{N}$ τ.ω

$\exists\ C_k \in \mathbb{R}\ \forall f \in C^k[a,b]$

$\exists\ \xi \in (a,b) \quad R(f) = C_k f^{(k)}(\xi).$

• Αν ισχύει αυτή η σχέση με $C_k = 0$ τότε ο τύπος ολοκληρώνει όλες τις συναρτήσεις $f \in C^k[a,b]$ ακριβώς, ιδιαίτερα όλα τα πολυώνυμα.

Όμως, κανένας τύπος ολοκλήρωσης με n κόμβους δεν ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού έως $2n$ ακριβώς, π.χ για το $p(x) = (x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2$ ισχύει $Q(p) = 0$ αλλά $\int_a^b p(x)\,dx > 0$

• Έστω ότι ισχύει αυτή η σχέση με $c_k \neq 0$

Αν η $f \in \mathbb{P}_{k-1}$, τότε το σφάλμα είναι μηδέν, γιατί $f^{(k)}(\xi) = 0$.

Αν $f(x) = x^k$, τότε $f^{(k)}(\xi) = k!$,
οπότε $R(f) = c_k \cdot k! \neq 0$

Αυτό μπορεί να συμβεί για το πολύ ένα κ.

<u>Άσκηση 6.10</u>

Q_n τύπος Newton-Cotes σε ένα διάστημα $[-a, a]$

Αν

$$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$$

και

$x_i = -x_j$

<u>Ν.Δ.Ο</u> $w_i = w_j$

(ο τύπος είναι συμμετρικός)

Απόδειξη. Ισχύει ότι

(*) $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1} \quad \int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)\,dx = Q_n(p)$

Για τα πολυώνυμα του Lagrange
L_i, L_j,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

η (*) δίνει $w_i = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_i(x)\,dx$ και $w_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)\,dx$

Έχουμε,

$$w_i = \int_{-\alpha}^{\alpha} L_i(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=-t \\ dx=-dt}}{=} -\int_{\alpha}^{-\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{\underset{\substack{\parallel \\ -x_j}}{x_i}+x_k}\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,dt$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}\,dt = w_j$$

23-05-17

Άσκηση 6.11

$[-\alpha, \alpha]$ Q_n: τύπος των Newton-Cotes σε αυτό το διάστημα.

$\varphi : [-\alpha, \alpha] \to \mathbb{R}$ περιττή και ολοκληρώσιμη.

<u>ΝΔΟ</u> $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)\,dx = Q_n(\varphi)$

<u>Απόδειξη</u>:

Προφανώς $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)\,dx = 0$

Επίσης, $\varphi(0) = 0$ (επειδή φ περιττή)

Αν $-\alpha = x_1 < x_2 < \dots < x_n = \alpha$, οι κόμβοι του Q_n, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση (και το γεγονός ότι $\varphi(0) = 0$) έχουμε:

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=1}^{[n/2]} w_i \underbrace{[\varphi(x_i) + \varphi(-x_i)]}_{=0 \ (\varphi \text{ περιττή})} = 0$$

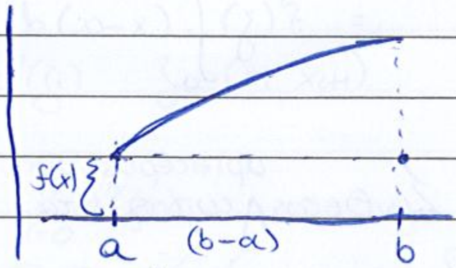
Άρα, $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x)\,dx = 0 = Q_n(\varphi)$.

Άσκηση (6.13)

$Q(f) = (b-a) f(a)$ Αριστερός τύπος του ορθογωνίου.

(Δεξιός τύπος : $Q(f) = (b-a) f(b)$)

Έστω $R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$



1) $\forall\, p \in \mathbb{P}_0$ ισχύει $R(p) = 0$

Για $p(x) = \gamma$ έχουμε $\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \gamma dx = \gamma(b-a)$

και $Q(p) = (b-a) \cdot \underbrace{p(a)}_{=\gamma}$

Άρα $R(p) = 0$

2) (+) $\forall\, f \in C^1[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a) f(a)$

$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(a) dx$

$$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx \qquad (\text{ΘΜΤ ή Taylor})$$

$$= \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} f'(\xi(x))\,dx$$

$$= f'(\xi)\int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

3) Σύνθετος αριστερός τύπος του ορθογωνίου.

$n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, n$

$$h \cdot f(x_0) + h \cdot f(x_1) + \dots + h \cdot f(x_{n-1}) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

(Το δεξιά θα ήταν $h \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ επειδή θα έπαιρνα κάθε φορά τα δεξιά άκρα).

Για $f \in C^1[a,b]$ ΝΔΟ $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} \cdot h \cdot f'(\xi)$$

$\Longrightarrow$

Έχω $\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\cdot f(x_i)\right]}$$

$\xrightarrow{(+)} \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2}\cdot f'(\xi_i)$, $\xi_i\in(x_i, x_{i+1})$.

$$= \frac{h^2}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{h^2}{2}\cdot n\cdot \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)}_{=f'(\xi)}$$

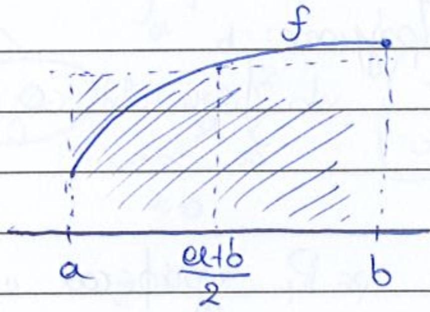
(με ξ ένα ενδιάμεσο σημείο.)

$$= \frac{\overset{(b-a)}{(h\cdot n)}}{2}\cdot h\cdot f'(\xi)$$

Άσκηση 6.14

$Q(f) = (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(τύπος του μέσου)



$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

i) ΝΔΟ $\forall\, p\in\mathbb{P}_1$ $R(p)=0$

α) Με πράξεις $p(x) = \gamma x + \delta$

$$\left.\begin{aligned} &\int_\alpha^b p(x)\,dx = \ldots = \gamma\,(\tfrac{b^2-\alpha^2}{2}) + \delta \cdot b \cdot \alpha \\ &Q(p) = (b-\alpha)\left[\gamma \cdot \tfrac{\alpha+b}{2} + \delta\right] \end{aligned}\right\}\ \text{Άρα } R(p) = 0$$

β) Χωρίς πράξεις: Ο τύπος ολοκληρώνει σταθερές συναρτήσεις (δηλ. πολυώνυμα μηδενικού βαθμού) προφανώς ακριβώς.

ΝΔΟ ολοκληρώνει και την συνάρτηση $Qx = x - \frac{\alpha+b}{2}$, ακριβώς.

Πράγματι: $\int_\alpha^b \varphi(x)\,dx = 0$ και $Q(q) = \frac{\alpha+b}{2} - \frac{\alpha+b}{2} = 0$

Κάθε $p \in \mathbb{P}_1$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της q και μιας σταθεράς, και επειδή καθ' ένα από αυτά ολοκληρώνεται ακριβώς, και αυτό θα ολοκληρώνεται ακριβώς.

2) ΝΔΟ $\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

a) Έστω $p \in \mathbb{P}_1$ τ.ω $p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

και $p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

Τότε : $\forall x \in (a,b)$ $\exists \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Άρα $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q(f)}_{= \int_a^b p(x)\,dx}$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x)) \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} dx$$ εμφανίζεται την $f''(\xi(x))$

$$= \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}_{\left.\frac{\left[x - \frac{a+b}{2}\right]^3}{3}\right|_{x=a}^{x=b}} = \dots$$

3)

$n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{2}$, $x_i = a + i \cdot h$, $i = 0, \dots, n$

<u>ΝΔΟ</u> : $\forall f \in C^2[a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$\int_a^b f(x)dx - \underbrace{h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2)} =$$ ← Σύνθετος τύπος μέσου.

$$= \frac{b-a}{24} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx - h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h f(x_i + h/2) \right] dx$$

$$\overset{②}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{24} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24} n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \right)$$

$$= f''(\xi)$$

$$= \frac{\overset{b-a}{n \cdot h}}{24} \cdot h^2 \cdot f''(\xi)$$

2) β τρόπος.

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = \int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]dx$$

Taylor

$$= \int_a^b \left[\cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi(x)) - \cancel{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right] dx$$

$$= f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx}_{0\ \left(\text{περιττή ως προς } \frac{a+b}{2}\right)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f'(\xi(x))}_{(\text{ίδια με πριν})\ (\text{Συνεχίζω όπως πριν})}$$

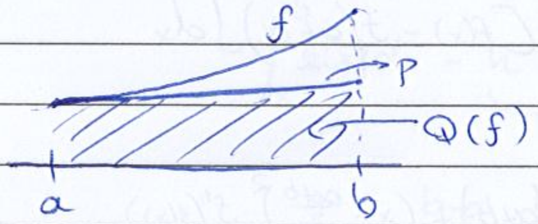
Άσκηση 6.15

$$Q(f) = (b-a)\, f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)\ , \quad f \in C'[a,b]$$

(Ανάπτυγμα) Πολυώνυμο Taylor της f, πρώτου βαθμού ως προς το σημείο a.

$p(x) = f(a) + (x-a) f'(a)$

$$\int_a^b p(x)\,dx = (b-a) f(a) + f'(a) \underbrace{\int_a^b (x-a)\,d_x}_{\frac{(b-a)^2}{2}} = Q(f)$$



i) $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$

<u>ΝΔΟ</u> $\forall p \in \mathbb{P}_1 : R(p) = 0$

α) Με πράξεις:

Θέτω $p(x) = \gamma x + \delta$ + πράξεις...

β) Χωρίς πράξεις:

Το πολυώνυμο Taylor του p συμπίπτει με το p. Άρα:

$$R(p) = \int_a^b p(x)\,dx - \underbrace{Q(p)}_{= \int_a^b p(x)\,dx} = 0$$

2) $f \in C^2[a,b]$: $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} \cdot f''(\xi)$$

Με Taylor:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + (x-a)\cdot f'(a)}_{p(x)} + \frac{(x-a)^2}{2} \cdot f''(\xi(x))$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q(f)}_{=\int_a^b p(x)\,dx}$$

$$= \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{\geq 0} \cdot f''(\xi(x))\,dx = \frac{f''(\xi)}{2} \cdot \underbrace{\int_a^b (x-a)^2\,dx}_{\frac{(b-a)^3}{3}} =$$

3) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, με $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ $\forall f \in C^2[a,b]\ \exists\, \xi \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h \cdot f(x_i) + \frac{b^2}{a} f'(x_i)\right] = \frac{b-a}{2} h^2 \cdot f''(\xi)$$

Έχω,

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h\cdot f(x_i)\cdot \frac{h^2}{2}\cdot f'(x_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \left[h\cdot f(x_i)+\frac{h^2}{2}\, f'(x_i)\right]\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6}\cdot f''(\xi_i) = \frac{h^3}{3}\cdot n\cdot \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi)$$

$$= \frac{\overset{b-a}{n\cdot h}}{6}\, h^2\cdot f''(\xi)$$

$\boxed{25\text{-}05\text{-}17}$

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα και
$w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους,
δηλαδή τ.ω $w(x) \geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$
και

$$0 < \int_a^b w(x)dx < \infty$$

Στόχος: Ο προσδιορισμός τύπων ολοκλήρωσης Q_n, $n\in\mathbb{N}$, της μορφής για την προσέγγιση του $I(f) = \int_a^b w(x) f(x)dx$ $w(x)$

(*) $Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$ που ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα του μεγίστου δυνατού βαθμού.

Ισχυρισμός: Κανένας τύπος ολοκλήρωσης της μορφής ⊛ δεν ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι $2n$.

Πράγματι, για το πολυώνυμο $p(x) = (x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2$ έχουμε $p \in \mathbb{P}_{2n}$, $Q_n(p) = 0$ και $\int_a^b w(x) p(x)\,dx > 0$.

Οι τύποι του Gauss, είναι μοναδικοί και ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$.

Βοηθητικό αποτέλεσμα:
Ορθογώνια πολυώνυμα.

Έστω $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους. Τότε, υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p_n βαθμού ακριβώς n, με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα (γράφουμε $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$) τ.ω

$$\int_a^b w(x) p_n(x)\, r_{n-1}(x)\,dx = 0 \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Οι ρίζες $x_1, \ldots, x_n$ του p_n είναι απλές και βρίσκονται στο διάστημα (a,b).

Τα πολυώνυμα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση w.

Θεώρημα (Ύπαρξη και μοναδικότητα τύπων ολοκλήρωσης του Gauss).

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.

Τότε:

α) Με κόμβους $x_1 < \ldots < x_n$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μοναδικά ορισμένα βάρη $w_1, \ldots, w_n$ τ.ω ο τύπος ο Q_n, $Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$ να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, δηλαδή

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1} \quad \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx = Q_n(p)$$

Μάλιστα τα w_i είναι θετικά.

β) Αν ο τύπος Q_n, $Q_n(f) = w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$, ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα μέχρι βαθμού $2n-1$, τότε τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ρίζες του p_n

$\Longrightarrow$

Απόδειξη.

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τ.ω.

$$q(x_i) = p(x_i) \quad , i=1,\dots,n. \quad \text{τότε}$$

$p-q \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $(p-q)(x_i) = 0$, οπότε

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_n)}_{p_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Επομένως, $\displaystyle\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)[q(x) + p_n(x)r_{n-1}(x)]dx$

$$= \int_a^b w(x)q(x)dx + \underbrace{\int_a^b w(x)p_n(x)r_{n-1}(x)dx}_{0}$$

δηλαδή $\boxed{\displaystyle\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx}$

Αν τώρα $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_1, \dots, x_n$ δηλαδή

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad , i=1,\dots,n$$

τότε

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)L_i(x)$$

Άρα
$$\int_a^b \omega(x)\,p(x)\,dx = \int_a^b \omega(x) \sum_{i=1}^{n} p(x)\,Li(x)\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b \omega(x)\,Li(x)\,dx \right]}_{=\omega_i \text{ (ανεξάρτητο του } p!)} p(x_i)$$

Μοναδικότητα και θετικότητα των ω_i:

Έστω $\omega_1', \dots, \omega_n'$ τ.ω ο τύπος Q_n', $Q_n'(f) = \omega_1' f(x_1) + \dots + \omega_n' f(x_n)$, να ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι $2n-1$.
Τότε,
$$(L_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}, \text{ οπότε } \int_a^b \omega(x)[L_j(x)]^2\,dx$$
$$\omega_j = Q_n(L_j^2) = \underbrace{\int_a^b \omega(x)\,[(L_j(x)]^2\,dx}_{>0} = Q_n'(L_j^2) = \omega_j'$$

β) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτουμε

$$p(x) = \underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{\tilde{p}_n(x),\ \tilde{p}_n \in \hat{\mathbb{P}}_n} \cdot r_{n-1}(x)$$

Τότε $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p) = 0$ οπότε

$$\int_a^b w(x) p(x)\, dx = 0,$$

δηλαδή

$$\int_a^b w(x) \tilde{p}_n(x) r_{n-1}(x)\, dx = 0 \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Λόγω της μοναδικότητας των ορθογώνιων πολυωνύμων θα έχουμε $\tilde{p}_n = p_n$ δηλαδή τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος των τύπων ολοκλήρωσης του Gauss).

Έστω $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w.

Αν Q_n ο τύπος του Gauss με n κόμβους ως προς τη συνάρτηση w, και $f \in C^{2n}[a,b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\, dx$$

Απόδειξη: Έστω $x_1, \ldots, x_n$ οι κόμβοι του Q_n και $w_1, \ldots, w_n$ τα αντίστοιχα βάρη.

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , \quad p'(x_i) = f'(x_i) \, , \quad i = 1, \ldots, n$$

Τότε

$$Q_n(f) = Q_n(p) \underset{p \in \mathbb{P}_{2n-1}}{=} \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx$$

οπότε

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx - Q_n(f) =$$

$$= \int_a^b w(x) \underbrace{[f(x) - p(x)]}\, dx$$

Όμως,

$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, \xi(x) \in (a,b)$ τ.ω

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \underbrace{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}_{[P_n(x)]^2}.$$

Άρα,

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx - Q_n(f) =$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \underbrace{w(x) [P_n(x)]^2}_{\geq 0} \cdot f^{(2n)}(\xi(x))\, dx$$

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\, dx$$

Με $m := \min_{x\in[a,b]} f^{(2n)}(x)$ και $M := \max_{a\le x\le b} f^{(2n)}(x)$

Τότε

$$\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 m\,dx \le \int_a^b w(x)\,[p_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \le \int_a^b w(x)\,[p_n(x)]^2 M\,dx$$

$$m \le \frac{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx}{\underbrace{\int_a^b w(x)\,[p_n(x)]^2\,dx}_{>0}} \le M.$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής. το κλάσμα στη μέση αυτής της σχέσης ισούται με την τιμή της $f^{(2n)}(\xi)$ με $\xi\in(a,b)$