24/05/2018

Άσκηση 6.3

$n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$

Ν.Δ.Ο.

$$\exists\, \xi \in [a,b] \quad \underbrace{\lambda_1 \phi(x_1) + \cdots + \lambda_n \phi(x_n)}_{\text{κυρτός συνδυασμός}} = \phi(\xi)$$

Απόδειξη

$$\min_{a\le x\le b} \phi(x) \leq \lambda_1 \phi(x_1) + \cdots + \lambda_n \phi(x_n) \leq \lambda_1 \max_{a\le x\le b} \phi(x) + \cdots + \lambda_n \max_{a\le x\le b} \phi(x)$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}_{=1} \max_{a\le x\le b} \phi(x)$$

$$= \max_{a\le x\le b} \phi(x)$$

- Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τ.ω. $\lambda_1 \phi(x_1) + \cdots + \lambda_n \phi(x_n) = \phi(\xi)$

25/05/2018

Άσκηση 6.4

$\varphi, x_1, \dots, x_n$ όπως στην Άσκηση 6.3

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι

Ν.Δ.Ο.

$$\circledast \quad \exists \xi \in [a,b], \ \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\varphi(\xi)$$

Απόδειξη:

Χ.π.τ.γ. $\lambda_i \geq 0$

- $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0 \rightsquigarrow$ η $\circledast$ ισχύει για κάθε $\xi \in [a,b]$
- $\lambda_1 + \dots + \lambda_n > 0$

Θέτουμε, $\hat{\lambda}_i := \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}, \ i = 1, \dots, n$

Προφανώς $\hat{\lambda}_i \geq 0$ και

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\lambda}_i = 1$$

Άρα, σύμφωνα με την Άσκηση 6.3 έχουμε,

$$\hat{\lambda}_1 \phi(x_1) + \dots + \hat{\lambda}_n \phi(x_n) = \phi(\xi) \quad \mathrm{I}$$

→ πολλαπλασιάζοντας την I με $(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$ παίρνουμε

$$\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\,\phi(\xi)$$

Άσκηση 6.8

$f:[-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2$$

Q_n^T , Q_m^S

ΝΔΟ:

$$Q_n^T(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx \leq Q_m^S(f)$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με τις (6.4) και (6.9) έχουμε

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) = -\underbrace{\frac{1}{6}}_{\frac{b-a}{12}}\Big(\underbrace{\frac{2}{n-1}}_{h}\Big)^2 f''(\xi)$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_m^S(f) = -\frac{1}{90}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4 f^{(4)}(\theta)$$

Αλλά,

$$f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x,$$

$$f''(x) = x^4 - 2 \leq 0$$

$$f'''(x) = 4x^3,$$

$$f^{(4)}(x) = 12 \cdot x^2 \geq 0$$

Άρα,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^T(f) \geq 0$$

και
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^S(f) \leq 0$$

Άσκηση 6.9

$Q \quad [a,b]$

ΝΔΟ: υπάρχει το πολύ ένας $k \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\exists\, C_k \in \mathbb{R} \ \forall f \in C^k[a,b] \ \exists\, \xi \in [a,b]$$

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) = C_k f^{(k)}(\xi)$$

Απόδειξη

Η $(*)$ δεν μπορεί να ισχύει με $C_k = 0$ γιατί τότε ο Q θα ολοκλήρωνε ακριβώς όλες τις ομαλές συναρτήσεις ιδιαίτερα όλα τα πολυώνυμα. Ξέρουμε ότι τέτοιος τύπος δεν υπάρχει.

Έστω ότι ισχύει η $(*)$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ με $C_k \neq 0$. Σύμφωνα με την $(*)$ ο Q ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $k-1$ αλλά όχι πολυώνυμα βαθμού k. Αυτό προφανώς μπορεί να συμβεί μόνο για ένα το πολύ k.

Άσκηση 6.10

Έστω Q_n ο τύπος των Newton-Cotes με n κόμβους,

$$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$$

σε ένα διάστημα $[-a, a]$

Έστω x_i, x_j κόμβοι τ.ω. $x_i = -x_j$

<u>ΝΔΟ</u> : $w_i = w_j$

(Δηλαδή ο τύπος είναι <u>συμμετρικός</u>).

<u>Απόδειξη</u>:

Ξέρουμε ότι,

$$(1) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1} \quad \int_{-a}^{a} p(x)dx = Q_n(p)$$

Για τα πολυώνυμα,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

η (1) δίνει, $\quad w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)dx \quad$ και $\quad w_j = \int_{-a}^{a} L_j(x)dx$

Τώρα,

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{x + x_k}{x_i + x_k} dx =$$

$$\underset{t=-x}{=} - \int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{-t + x_k}{-x_j + x_k} dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{t - x_k}{x_j - x_k} dt = w_j$$

Άσκηση 6.11

Q_n , $[-a, a]$

Αν f περιττή συνάρτηση, τότε

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx - Q_n(f) = 0$$

Απόδειξη: Προφανώς,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

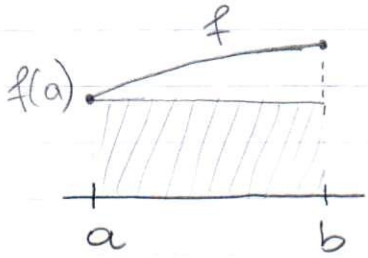
Επίσης, $f(0)=0$ και αν $-a=x_1<\cdots<x_n=a$ οι κόμβοι του Q_n, έχουμε ότι,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} w_i \left[\underbrace{f(x_i)+f(-x_i)}_{=0}\right] = 0$$

Άσκηση 6.13

$$Q(f) = (b-a)f(a)$$

Γεωμετρικά:



αριστερός τύπος του ορθογωνίου λόγω επιλογής $f(a)$.

α) Ο Q ολοκληρώνει σταθερές συναρτήσεις ακριβώς.

$$f(x) = c, \quad x \in [a,b]$$

Τότε,
$$Q(f) = (b-a)c = \int_a^b c\,dx = c\int_a^b dx = (b-a)\cdot c \quad \checkmark$$

β) $f \in C^1[a,b]$

<u>ΝΔΟ:</u>

$$\exists \xi \in (a,b) \qquad \int_a^b f(x)dx - Q(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

$$= \int_a^b f(x)dx - Q(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(a)dx = \int_a^b \underbrace{[f(x)-f(a)]}_{(x-a)f'(\xi(x))} dx =$$

$$= \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} f'(\xi(x))dx = \cdots = f'(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)dx}_{= \frac{(b-a)^2}{2}} =$$

χρειάζεται απόδειξη.

$$= \frac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$$

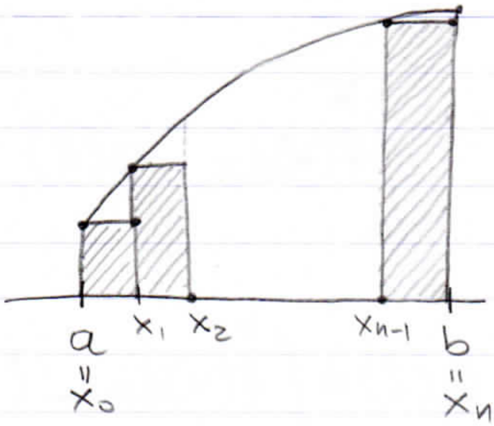
γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$.

$f \in C^1[a,b]$

<u>ΝΔΟ:</u> $\exists \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} h f'(\xi)$$

Σχηματικά:



Άρα,

$$\int_a^b f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\Big\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - hf(x_i)}_{= \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} f'(\xi_i) \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})} \Big\}$$

$$= \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) =$$

$$= \frac{\overset{b-a}{nh}}{2}\cdot h \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) =$$

$$= \underset{\substack{\text{min}\\ \text{max}}}{\cdots} = \frac{(b-a)\,h}{2} f'(\xi)$$

Άσκηση 6.14

$$Q(f) = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

τύπος του μέσου.

a) ΝΔΟ

$$\forall\, p \in \mathbb{P}_1 \qquad \int_a^b p(x)\,dx = Q(p)$$

$p(x) = \gamma x + \delta$

Τότε,
$$\int_a^b p(x)\,dx = \gamma \underbrace{\int_a^b x\,dx}_{\frac{b^2-a^2}{2}} + \delta \underbrace{\int_a^b dx}_{b-a}$$

και,

$$Q(p) = (b-a)\left[\gamma \frac{a+b}{2} + \delta\right] =$$

$$= \gamma \frac{b^2-a^2}{2} + \delta(b-a)$$

β) $f \in C^2[a,b]$

<u>ΝΔΟ</u> $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

<u>$1^{\underline{ος}}$ Τρόπος</u>: $p \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Τότε, $\forall\, x \in [a,b]\ \exists\, \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

Τώρα, $$\int_a^b f(x)\,dx - \underset{\substack{\| \\ Q(p) \\ \| \\ \int_a^b p(x)\,dx}}{Q(f)} = \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2} \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} dx$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2} \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx}_{= \frac{2\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3}} = \frac{f''(\xi)}{2} \frac{2(b-a)^3}{24}$$

2ος Τρόπος

$$\int_a^b f(x)dx - \underbrace{(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx}$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx$$

$$\underset{\text{Taylor}}{=} \int_a^b \left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x))\right] dx =$$

$$= f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx}_{=0} + \frac{1}{2}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\xi(x)) dx =$$

$$= \cdots = f'''(\xi) \frac{(b-a)^3}{24}$$

$\gamma)$ $n \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$

$f \in C^2[a,b]$

<u>NΔO</u> $\exists\, \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + h/2) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - h f(x_i + h/2)}_{= \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{24} f''(\xi_i)} \Big\} =$$

$$= \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{\overset{b-a}{nh}}{24} h^2 \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= f''(\xi)} =$$

$$= \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

Άσκηση 6.15

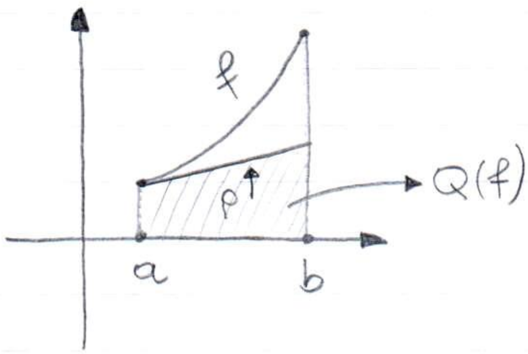
$$Q(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$$

και $f \in C^1[a,b]$

$$p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$$

Taylor

$$\int_a^b p(x)dx = (b-a)f(a) + f'(a)\underbrace{\int_a^b (x-a)dx}_{= \frac{(b-a)^2}{2}}$$



a) $\forall p \in \mathbb{P}_1 \quad \int_a^b p(x)dx = Q(p)$

$$p(x) = \gamma x + \delta$$

$$\int_a^b p(x)dx = (b-a)\delta + \gamma \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$Q(p) = (b-a)(\gamma a + \delta) + \frac{(b-a)^2}{2}\gamma =$$

$$= (b-a)\delta + \gamma(b-a)\underbrace{\left[a + \frac{b-a}{2}\right]}_{\frac{a+b}{2}} =$$

$$= (b-a)\delta + \gamma\frac{b^2-a^2}{2}$$

β) Έστω $f \in C^2[a,b]$. Ν.Δ.Ο.

$$\exists \xi \in (a,b) \quad \text{τ.ω.} \quad \int_a^b f(x)dx - Q(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx - \underset{\underset{\underset{\int_a^b p(x)dx}{\parallel}}{Q(p)}}{\overset{}{Q(f)}} =$$

$\parallel \leftarrow p \in \mathbb{P}_1$

χρειάζεται απόδειξη

$$= \int_a^b \underbrace{[f(x)-p(x)]}_{\frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi(x))}dx = \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))dx = \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}f''(\xi)\underbrace{\int_a^b (x-a)^2 dx}_{=\frac{(b-a)^3}{3}} \overset{(I)}{=}$$

- $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi(x))$
- $(f-p)(x) = \cancel{(f-p)(a)} + (x-a)\cancel{(f-p)'(a)} +$

$$+ \frac{(x-a)^2}{2}(f-p)''(\xi(x))$$

$$= \frac{(x-a)^2}{2}f''(\xi(x)) + \frac{(x-a)^2}{2}\underset{\overset{\parallel}{0}}{p''}(\xi(x))$$

$$(I) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$

$f \in C^2[a,b]$

<u>NΔO</u>

$$\exists\, \xi \in (a,b), \quad \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx} - \sum_{i=0}^{n-1}\left[hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \left[hf(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]}_{\overset{(*)}{=} \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6} f''(\xi_i),\ \xi_i \in (x_i, x_{i+1})} \Big\}$$

$$= \frac{h^3}{6} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{nh^3}{6} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= f''(\xi)} =$$

$$= \frac{\overbrace{nh}^{b-a}}{6} h^2 f''(\xi) = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$