Ασκήσεις 6ου κεφαλαίου

Άσκηση 6.3

\[ n \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0 \ \ \text{τώρα} \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1. \]

\[ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \ \text{ανεξάρτητος} \]

\[ \lambda_1 x + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_n x = \lambda(x) \]

\[ \lambda_i x \geq 0 \]

Απόδειξη:

\[ \lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \lambda_1 \max \varphi(x) + \lambda_2 \max \varphi(x) \]

\[ = \max \varphi(x) \]

\[ \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 \]

\[ \lambda_1 \max \varphi(x) \]

\[ \lambda_2 \max \varphi(x) \]

\[ \vdots \]

\[ \lambda_n \max \varphi(x) \]

\[ \leq \lambda_1 \max \varphi(x) + \lambda_2 \max \varphi(x) \]

\[ = \max \varphi(x) \]

Αρίτμησια:

\[ \lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) \geq \min \varphi(x) \]

Απότελεσμα:

\[ \min \varphi(x) \leq \lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) \leq \max \varphi(x) \]

Επομένως, έμφαση με το θεώρημα της ευθείας της ες:

\[ \lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) = \varphi(x) \quad \text{για κάποιο} \ x \in [a, b] \]

Α& της 6.3

Άσκηση 6.4

\[ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \ \text{ορισμένοι (και ανεξάρτητος από 6.3)} \]

\[ \varphi : [a, b] \to \mathbb{R} \]

\[ \lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n \varphi(x) \]
Απόδειξη

Επιλεξτικό της γεωμετρίας υποθέτουμε ότι \( \eta_1, \ldots, \eta_n > 0 \)

όπως προηγούμενως είχαμε,

\[
(\eta_1 + \cdots + \eta_n) \min_{x \in \mathbb{X}} \varphi(x) \leq \eta_1 \varphi(x_1) + \cdots + \eta_n \varphi(x_n) \leq (\eta_1 + \cdots + \eta_n) \max_{x \in \mathbb{X}} \varphi(x)
\]

Στην περίπτωση \( \eta_1 = \cdots = \eta_n = 0 \), η διαφορά ισοδύναμα για όλα τα \( \varphi \).

Αν \( \eta_i > 0 \), \( i = 1, \ldots, n \), τότε \( \eta_1 + \cdots + \eta_n > 0 \)

Άρα, \( \min_{x \in \mathbb{X}} \varphi(x) \leq \eta_1 \varphi(x_1) + \cdots + \eta_n \varphi(x_n) \leq \max_{x \in \mathbb{X}} \varphi(x) \).

Συνεχίζουμε τις προηγείστες εκφράσεις αυτοκόλλητες βελούς.

Σχετικές τροποποιήσεις της Ισότητας.

Απόψες 6.8

\[ q^\top_n T_q \]

ενός διάστημα \([-1,1]\)

τέστος simpson

τροποποιήσεις

έκφραση \( f(x) = \frac{x^6}{36} - x^2 \)

\[ \text{ΝΑΟ} \quad q^\top_n f \leq \int_{-1}^{1} f(x) \, dx \leq q^\top_m f \]

Απόδειξη

Γενικά, \( q^\top_{n+1} f = \frac{b-a}{12} f''(\xi) \)

\[ q^\top_m f = \frac{b-a}{180} \int_{\theta}^{\phi} f(\theta) \]

Άρα, οιν προηγιστές περίπτωση εκφράζει:

\[ \int_{-1}^{1} f(x) \, dx - q^\top_n f = -\frac{2}{180} \left( \frac{2}{m-1} \right) f(\xi) \]

\[ \int_{-1}^{1} f(x) \, dx - q^\top_m f = -\frac{2}{180} \left( \frac{2}{m-1} \right) f(\xi) \]

\[ \leq 0 \]

\[ \geq 0 \]

\[ \Rightarrow \leq 0 \]

\[ \Rightarrow \geq 0 \]
δηλωτικά,
\[ f'(x) = \frac{6x^5 - 2x}{30} = \frac{x^5}{5} - \frac{2x}{5} \]
\[ f''(x) = \frac{5x^4}{5} - 9 = x^4 - 9 \leq 0 \quad (\leq -1 \text{ προ ουσικής}) \]

Αρχά, \( Q_1(f) \leq \int_{-1}^{1} f(x) \, dx \)

(iii)
\[ f(x) = 4x^3 \]

(iv)
\[ f(x) = 12x^2 \geq 0 \]

Αρχά, \( Q_{\min}(f) \geq \int_{-1}^{1} f(x) \, dx \).

Άσκηση 6.9

Ως τύπος οποιασδήποτε όπολυμπράκτες σε ένα διάστημα \([a,b]\)
\[ R(f) = \int_{a}^{b} f(x) \, dx - Q(f) \]

ΝΔΟ

υπάρχει το πολύ δεν κείνο \( k \) \( \in \mathbb{N} \) \( \forall f \in C^k[a,b] \) \( f \in [a,b] \)

\[ R(f) = C_k f^{(k)}(c) \]

Αποδείξη

Άλλα παραπεπειρήσεις
• \( c_k = 0 \) τόσο το σφάλμα για όλες τις απαρτίσεις που είναι κ φορές αυξημένες παραμορφώσεις στο \([a,b] \), θα ήτανe μικρό. Ειδικότερα, o τύπος θα οποιασδήποτε όπολυμπράκτες πολυώνταμα aριθμών. Aυτό δηλαδή είναι αδύνατον, γιατί τέτοιοι τύποι δεν υπάρχουν. (αρα και δεν μπορεί να είναι μικρό)
• \( c_k = 0 \) τόσο για \( k \) \( \in \mathbb{N} \) είναι \( Q(f) = 0 \) ευθυγραμμιστικά \( r(x) = x^k \) εύκρυψη,
\[ R(p) = C_k k! \neq 0 \]

Συμπερασμα, o τύπος οποιασδήποτε όπολυμπράκτες rυθμίζει το θέμα \( k-1 \) aριθμών, και όμως όπολυμπράκτες \( k \) aριθμών. Aυτό μπορεί υπάρχει ικανοποιητικά για ένα και περισσότερα.


Συμμετρία των τόπων των Newton-Cotes

Απόδειξη

\[ \int_{-a}^{a} p(x) \, dx = G_m(p) \]

Για τα πολυώνυμα του Lagrange \( L_i(x) \) και \( L_j(x) \) όπου

\[ L_i(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \quad \text{και} \quad L_j(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \]

\[ W_i = \int_{-a}^{a} L_i(x) \, dx \quad \text{και} \quad W_j = \int_{-a}^{a} L_j(x) \, dx. \]

\[ W_i = \int_{-a}^{a} L_i(x) \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i-x_k} \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{x_i-x_k} \, dt = \int_{-a}^{a} L_i(t) \, dt = W_j. \]
Από την προηγούμενη απόκρυφη φέρουμε ότι όλοι \(x_i\) και \(-x_i\) είναι κομμάτια, το σημείο των αντίστοιχων μέσων είναι ίσα, \(w_i = w_j\).

Επομένως, \(Q(0) = 0\). Επομένως, θα έχουμε ότι:

\[
Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n/2} w_i \left[ f(x_i) + f(-x_i) \right] = 0 \quad \text{από την προηγούμενη}
\]

Από την προηγούμενη απόκρυφη φέρουμε ότι \(a\) και \(-a\) είναι κομμάτια, το σημείο των αντίστοιχων μέσων είναι ίσα, \(w_i = w_j\).

Επομένως, \(Q(0) = 0\). Επομένως, θα έχουμε ότι:

\[
Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n/2} w_i \left[ f(x_i) + f(-x_i) \right] = 0 \quad \text{από την προηγούμενη}
\]

Γεωμετρικά, \(Q(f)\) είναι η έκθεση των συνόρων του οπτικού τόπου του ηπειροστοιχίου και η έκθεση των συνόρων του οπτικού τόπου του ηπειροστοιχίου.

\[
Q(f) = \int_a^b f(x) \, dx - Q(f)
\]

\[
Q(f) = \int_a^b f(x) \, dx - Q(f)
\]
a) \( \Delta [a, b] \) ο α ολοκληρώσεις συμπληρώσεις αριθμών.

\[
\begin{align*}
\Delta & \quad f(x) = x \quad \forall x \in [a, b] \\
R(f) & = \int_a^b \left( f(x) - f(a) \right) \, dx \\
& = (b-a)x - (b-a)x = 0
\end{align*}
\]

\( \text{α ερώτημα} \)

b) \( \Delta [a, b] \) ο άλλοι \( \varepsilon (a, b) \) \( R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\varepsilon) \)

\[
\begin{align*}
\Delta & \quad b - a = \int_a^b f(a) \, dx \\
R(f) & = \int_a^b f(x) \, dx - (b-a)f(a) \\
& = \int_a^b [f(x) - f(a)] \, dx
\end{align*}
\]

\( \text{μορφή} \quad b \) \( \text{να παραμετρίσουμε} \) \( \int_a^b (x-a) f'(f(x)) \, dx \)

\[
\Rightarrow \quad \min f'(\varepsilon) \int_a^b (x-a) \, dx \leq R(f) \leq \max f'(\varepsilon) \int_a^b (x-a) \, dx
\]

\[
\Rightarrow \quad \min f'(\varepsilon) \leq \frac{R(f)}{b-a} \leq \max f'(\varepsilon)
\]

\( \text{έπεξεργάζονται το σεβόμαλ συμπλήρωσεις της} \) \( \Delta [a, b] \) \( R(f) = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\varepsilon) \)

\[
\begin{align*}
\frac{R(f)}{b-a} & = f'(\varepsilon) \\
\Delta & \quad R(f) = f'(\varepsilon) \int_a^b (x-a) \, dx
\end{align*}
\]

\[
\Rightarrow \quad R(f) = f'(\varepsilon) \int_a^b (x-a) \, dx = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\varepsilon)
\]

\( \text{α ερώτημα} \)
1) Συνθέτως τύπος του ορθογώνιου (θα τον βρούμε αργότερα)

\[ n \in \mathbb{N}, \ h = \frac{b-a}{n}, \ x_i = a + ih, \ i=0, \ldots, n \]

Εφαρμόζομε σε κάθε υποσύστημα \([x_i, x_{i+1}]\) του αριθμητικού τύπου του ορθογώνιου, \( h f(x_i) \) και αποδίδουμε τα αποτελέσματα \( h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \)

Τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα;

\[ \int_a^b f(x) \, dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \]

\[ = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - h f(x_i) \right] \]

\[ = \frac{h^2}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f'(f_i) \right) \]

το ερώτημα \( f'(f) \) δια το \( g(x) \) αναφερόμενα εμφάνισε με \( \min, \max \theta \).

\[ \text{Aρκετό 6.11} \]

\[ f \in [a, b] \]

\[ Q(f) = (b-a) f\left( \frac{a+b}{2} \right) \]

και απόδειξη του τύπου \( a) \) της Ριμάττη το \( R(f) = 0 \) (το κομματικό \( x \) υπό το \( (b-a) \).

\[ \text{Aπόδειξη} \]

\[ p(x) = q x + \delta \]

\[ R(p) = \int_a^b (q x + \delta) \, dx - Q(p) = \left[ \frac{q^2 (a+b)^2}{2} + \delta (b-a) \right] - (b-a) \left[ \delta \frac{a+b}{2} + \delta \right] = \text{κάνουμε} \]

\[ 4 \]
Σος τέρων

Αρκεί αυτ σημείο για το τέρος οι πολυώνυμα αριθμοί πολυώνυμα (ρούμαρα) \( p(x) = 1 \) και \( p(x) = x \)

Απόδειξη

- \( p(x) = 1 \), \( R(p) = 1 = \) ταύτης πρόαστις = 0
- \( p(x) = x \), \( R(p) = 0 = \) έκφραση τέρων

Απόδειξη

\( p \in P_1 \). \( p \left( \frac{a+b}{2} \right) = f \left( \frac{a+b}{2} \right) \) ουσιαστικά και \( p' \left( \frac{a+b}{2} \right) = f' \left( \frac{a+b}{2} \right) \), Ημίτρη με την εισαγωγή της Καρένιος.

Αναπτύσσεται κατά ταυτόπια \( f - p \) και οι ονοματείς \( \frac{a+b}{2} \) βρίσκονται \( \frac{a+b}{2} \).

\( f(x) - p(x) = \left[ f \left( \frac{a+b}{2} \right) - p \left( \frac{a+b}{2} \right) \right] + \left( x - \frac{a+b}{2} \right) \left[ p' \left( \frac{a+b}{2} \right) - \frac{a+b}{2} \right] + \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \right] \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \left[ f'' \left( \frac{a+b}{2} \right) - p'' \left( \frac{a+b}{2} \right) \right]

Από το εκθέτον \( R(f) = \int_a^b f(x) \, dx = Q(f) \)

\( b \)

\( a \)

\( Q(f) = \int_a^b f(x) \, dx - Q(p) = \int_a^b (f(x) - p(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b p(x) \, dx = \int_a^b \left[ f(x) - p(x) \right] \, dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^3 \bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{2} f''(f) \left[ (b - \frac{a+b}{2})^3 - (a - \frac{a+b}{2})^3 \right]

= \frac{1}{6} f''(f) \left[ (b - \frac{a+b}{2})^3 - (a - \frac{a+b}{2})^3 \right]

= \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \left( b - a \right)^3 = \frac{1}{2} \left( b - a \right)^3 \) (ταύτης πρόαστις)

\( \left( b - a \right)^3 \)

\( \frac{1}{24} \)
**Δος τον**

\[
R(f) = \int_a^b f(x) \, dx - Q(f) = \int_a^b \left[ f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \, dx
\]

για τον Taylor

\[
= \int_a^b \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(f(x)) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \, dx
\]

*από την* \( 0 \) \( \rightarrow \) \( b \)

\[
\int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right) f'(\frac{a+b}{2}) \, dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 f''(f(x)) \, dx
\]

*από την* \( a \) \( \rightarrow \) \( b \)

**ελήφθη το αποτέλεσμα που βρήκαμε πριν. Δος τον**

*α(β) κείμενο*

\[ h = \frac{b-a}{n} \]

\[ x_i = a + ih \quad i = 0, \ldots, n \]

**Ν. Ο.:** \( f \in C^2[a,b] \) \( \exists (c,b) \) \( \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left( x_i + \frac{h}{2} \right) \]

\[
\int_a^b f(x) \, dx \ni h \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + \frac{h}{2}) = \frac{b-a}{2n} \int_a^b f(x) \, dx
\]

*άποτελεσμα*

\[ \int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + \frac{h}{2}) \]

**Εναρμονίστηκε** \( \int_a^b f(x) \, dx \)

\[
\sum_{i=0}^{n-1} \left[ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - h f(x_i + \frac{h}{2}) \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})
\]

\[
= \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{24} f''(f_i) = \frac{h^3}{24} \sum_{i=0}^{n-1} f''(f_i)
\]

**από τον** \( n \) \( \rightarrow \) \( \infty \)

\[ f''(f) = \frac{(b-a)}{2u} f''(f) \]

*α(β) κείμενο*
Διανύειο 6.15

\[ f \in C^2[a,b], Q(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \]

\[ R(f) = \int_a^b f(x) dx - Q(f) \]

\[ \text{Ανάλογα:} \quad R(p) = 0 \]

\[ p(x) = bx + \delta \]

\[ R(p) = \int_a^b (bx + \delta) dx - \left[ (b-a)(bx + \delta) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \right] \]

= τεταιοπενήσεις = \[ y \frac{b-a}{2} + \delta (b-a) - \left[ (b-a)(bx + \delta) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \right] \]

= \ldots = 0 \quad \text{α (ά) ερώτημα}

4) \text{ΝΔΩ}

\[ f \in C^2[a,b] \quad \exists \ f' \in (a,b) \quad \text{τώ�} \quad R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi) \]

\[ p\ Choose(\xi) = f(a) + (x-a)f'(a) \quad \text{τώρε} \quad Q(p) = \int_a^b p(x) dx \]

\[ \text{Απαντά:} \quad R(f) = \int_a^b f(x) dx - Q(f) \]

\[ = \int_a^b [f(x) - p(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \left[ f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi) - f(a) - (x-a)f'(a) \right] dx \]

= \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi) \quad \text{α (ά) ερώτημα}

7) \text{n ∈ N, } h = \frac{b-a}{n}, \ \xi_i = a + ih, \ i = 0, \ldots, n \quad \text{ΝΔΩ:} \quad \forall \ f \in C^2[a,b] \quad \exists \ f' \in (a,b) \quad \text{τώρο}

\[ \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ h f(\xi_i) + \frac{h^2}{2} f'(\xi) \right] = \frac{(b-a)^2}{6} h^2 f''(\xi) \]

\[ \text{Απάντησε:} \]

\[ \text{Σεωρητώντας, } p(x) = f(a) + (x-a)f'(a) \]

\[ \text{πολλαπλασιάζοντας το } \frac{(b-a)^2}{6} \text{ εισάγοντας το } a. \]

\[ b \]

\[ \int_a^b p(x) dx = (b-a)f(a) \]

\[ + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \]

\[ \text{γραμμα} \text{της } \text{τεταιοπενήσεως,} \]

\[ \text{τεταιοπενήσεως,} \]

\[ \text{ερώτημα:} \]

\[ \text{πολλαπλασιάζοντας το } \frac{(b-a)^2}{6} \text{ εισαγώντας το } a. \]

\[ b \]

\[ \int_a^b p(x) dx = (b-a)f(a) \]

\[ + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a) \]

\[ \text{γραμμα} \text{της } \text{τεταιοπενήσεως,} \]

\[ \text{ερώτημα:} \]

\[ \text{πολλαπλασιάζοντας το } \frac{(b-a)^2}{6} \text{ εισαγώντας το } a. \]
\[ \text{Εξακολουθεί, } \int_{a}^{b} f(x) \, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ h f(x_i) + \frac{h^3}{2} f'(x_i) \right] \]

\[ = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[ h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right] \]

\[ = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \, dx - \left[ h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i) \right] \right) \]

\[ = h^3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_i)}{6} = \text{ώγεταμα} = \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6} f''(\xi_i) \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \]

\[ = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \]

\[ = \frac{n h}{6} f''(\xi) = \frac{(b-a)}{6} h \cdot f''(\xi) \]

\[ \implies \text{ώγεταμα.} \]

\[ \min_{a \leq x \leq b} f''(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \max_{a \leq x \leq b} f''(x) \]

\[ = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{b-a} \max_{a \leq x \leq b} f''(x) \]