17/05/18

Αριθμητική ολοκλήρωση

- **Δεδομένα**: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και ολοκληρώσιμη (αργότερα θα υποθέσουμε και επιπλέον ομαλότητα).

- **Ζητούμενο**: $I(f) = \int_a^b f(x)dx$

- Αν F είναι μία παράγουσα (ή αόριστο ολοκλήρωμα) της f,

τότε

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Υπάρχουν δύο προβλήματα:

- Η F δεν είναι γενικά γνωστή
- Υπάρχουν απλές f για τις οποίες οι αντίστοιχες F είναι πολύπλοκες.

Π.χ. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$

Ενώ,

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left[\frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{2}-x} + \arctan\frac{x}{\sqrt{2}+x}\right]$$

Στην αριθμητική ολοκλήρωση προσεγγίζουμε το

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$ με τύπους αριθμητικής

ολοκλήρωσης

$$(*) \quad Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \cdots + w_n f(x_n)$$

με <u>κόμβους</u> x_i (γενικά στο $[a,b]$) και <u>βάρη</u> $w_i \in \mathbb{R}$.

• Τύποι των Newton – Cotes

- Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $h = \frac{b-a}{n}$, και θεωρούμε τον <u>ομοιόμορφο διαμερισμό</u>,

  $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$, του $[a,b]$ με βήμα h.

- Έστω $f \in C[a,b]$. Αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

  $$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

  τότε ο τύπος,

  $$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)dx$$

  λέγεται τύπος των Newton–Cotes με $n+1$ κόμβους

Αν $f \in \mathbb{P}_n$, τότε προφανώς $p_n = f$, οπότε

$Q_{n+1}(f) = I(f)$, δηλαδή ο Q_{n+1} ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και n.

<u>Ερώτημα</u> : Γράφεται ο Q_{n+1} στη μορφή ✱ ;

- Έχουμε,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

με $L_i \in \mathbb{P}_n$, $i=0,\dots,n$, τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0,\dots,x_n$

Άρα,

$$Q_{n+1}(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{w_i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx =$$

$$\underset{x=a+hs}{=} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-(a+jh)}{(a+ih)-(a+jh)}\,h\,ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, h \underbrace{\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}\,ds}_{=:\,w_i^*}$$

ανεξάρτητο του $[a,b]$

Γενικά, για $n \to \infty$, η ακολουθία $(Q_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$

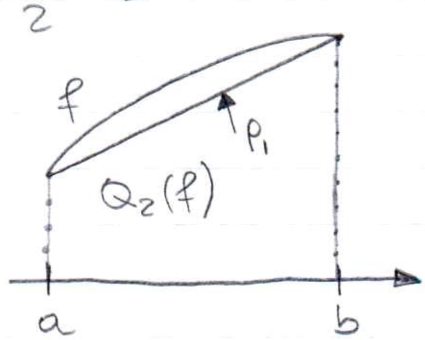
<u>δεν τείνει</u> στο $I(f)$.

Πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν αυτοί οι τύποι μόνο για μικρό n. Στην πράξη εφαρμόζονται ως σύνθετοι τύποι.

- <u>Τύπος του τραπεζίου</u>

Ο τύπος των Newton–Cotes με δύο κόμβους είναι,

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$



και λέγεται <u>τύπος του τραπεζίου</u>.

<u>Λήμμα</u> (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Απόδειξη

Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$\begin{cases} p_1(a) = f(a) \\ p_1(b) = f(b) \end{cases}$$

Τότε, $$\underbrace{Q_2(f) = \int_a^b p_1(x)dx}_{= Q_2(p_1)}$$

Άρα, $$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = \int_a^b f(x)dx - Q_2(p_1) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_1(x)dx$$

Άρα,

$$(1) \quad \int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]dx$$

Σύμφωνα με τα γνωστά για το σφάλμα παρεμβολής $f(x) - p_1(x)$ έχουμε,

$$(2) \quad f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b) \quad \text{με } \xi(x) \in (a,b)$$

Από τις (1) και (2) έπεται,

$$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(\xi(x))dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx \overset{③}{=} -\frac{1}{2} f''(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{= \frac{(b-a)^3}{6}}$$

Έχουμε,

$$\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx \leq \int_a^b (x-a)(b-x) \max_{a \leq y \leq b} f''(y)\,dx$$

$$= \left(\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx\right) \max_{a \leq y \leq b} f''(y)$$

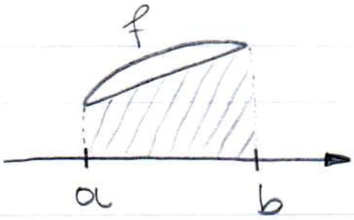
$$\geq \overbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}^{>0} \cdot \min_{a \leq y \leq b} f''(y)$$

Συμπέρασμα,

$$\min_{a \leq y \leq b} f''(y) \leq \underbrace{\frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}}_{③ = f''(\xi)} \leq \max_{a \leq y \leq b} f''(y)$$

• Ο τύπος του τραπεζίου

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



Αν $f \in C^2[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - Q_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

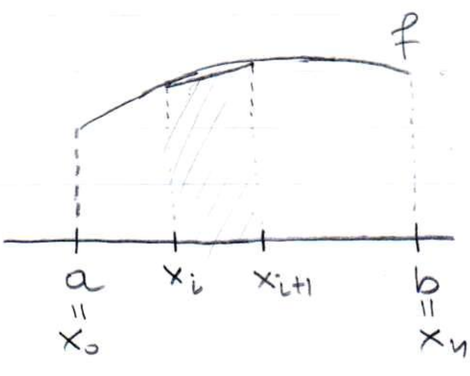
• Σύνθετος τύπος του τραπεζίου

Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = a + ih$, $i=0,\dots,n$, του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$

Ο απλός τύπος του τραπεζίου στο υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ είναι $\frac{h}{2}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα παίρνουμε τον λεγόμενο <u>σύνθετο τύπο του τραπεζίου</u> $Q_{n+1}^T(f)$,

$$Q_{n+1}^T(f) = h\left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$



• **Πρόταση** (Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου).

Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q^T_{n+1} ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου στο διάστημα $[a,b]$ ως προς τον διαμερισμό $x_i = a + ih$, $i=0,\dots,n$, με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$

Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

• **Απόδειξη**

Το συνολικό σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι το άθροισμα των σφαλμάτων του τύπου του τραπεζίου στα υποδιαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n$:

$$\int_a^b f(x)dx - Q^T_{n+1}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Big\{ \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}_{\text{σφάλμα του τύπου του τραπεζίου στο } [x_i, x_{i+1}]} \Big\}$$

$$= -\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{12} f''(\xi_i), \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12} n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)$$

$$= -\frac{nh}{12} h^2 f''(\xi) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \max_{a\le x\le b} f''(x) = \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = f''(\xi)$$

- Άρα,

$$\left|\int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}(f)\right| \le \frac{b-a}{2} h^2 \max_{a\le x\le b} |f''(x)|$$

Το φράγμα τείνει στο 0 καθώς $h \to 0$, τουλάχιστον όπως το h^2

Λέμε ότι το σφάλμα του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι τουλάχιστον <u>δύο</u>.

• <u>Ο τύπος του Simpson</u>

Ο τύπος των Newton-Cotes με τρείς κόμβους,

$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \frac{4}{3}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right],$$

λέγεται <u>τύπος του Simpson</u>.

Με $h = \frac{b-a}{2}$ και $x_i = a+ih$, $i=0,1,2$

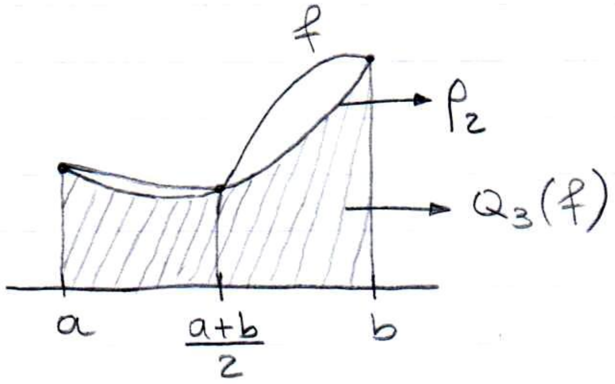
ο $Q_3(f)$ γράφεται και στη μορφή,

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

→ Για $f(x)=1$ έχουμε $\int_a^b f(x)dx = b-a$ και

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}6 = 2h = b-a$$

<u>Σχηματικά</u>:



-Από την κατασκευή του τύπου ξέρουμε ότι αυτός ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι δευτέρου βαθμού ακριβώς.

<u>Ερώτημα</u>: Μήπως ολοκληρώνει ακριβώς και πολυώνυμα τρίτου βαθμού;

Με $q_3(x) = x^3$ παρατηρούμε ότι,

$$\int_a^b q_3(x)\,dx - Q_3(q_3) = \cdots = 0$$

Αυτό το βλέπουμε χωρίς πράξεις ως εξής:

$$q_3(x) = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{p(x)} + q(x) \quad , \; q_3 = p + q \, , \; q \in \mathbb{P}_2$$

Ο τύπος ολοκληρώνει το q ακριβώς, οπότε,

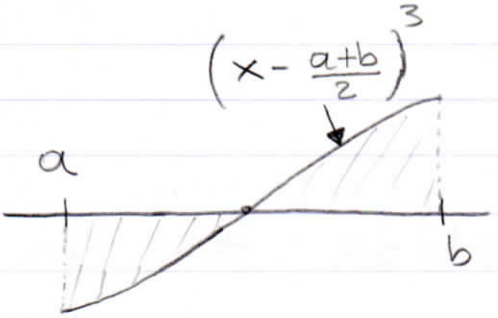
$$\int_a^b q_3(x)\,dx - Q_3(q_3) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 + \int_a^b q(x)\,dx - Q_3(p) - Q_3(q) =$$

$$= \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{=0} - Q_3(p) + \underbrace{\int_a^b q(x)\,dx - Q_3(q)}_{=0} =$$

$=0$ περιττή συνάρτηση στο $[a,b]$ με μέσο το $\frac{a+b}{2}$

$$= -Q_3(p) = -\frac{h}{3}\left[p(a) + 4\overbrace{p\left(\frac{a+b}{2}\right)}^{=0} + p(b)\right] = 0$$

, αφού με πράξεις: $p(a) = -p(b)$



→ Ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει πολυώνυμα μέχρι και τρίτου βαθμού ακριβώς.

<u>Λήμμα</u> (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω ότι η $f \in C^4[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - Q_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $p_3 \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$\begin{cases} p_3(x_i) = f(x_i), & i=0,1,2 \\ p_3'(x_1) = f'(x_1). \end{cases}$$

$x_1 = \frac{a+b}{2}$

- Έχουμε, $Q_3(f) = Q_3(p_3) = \int_a^b p_3(x)dx$

ο Q_3 ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και 3.

- Άρα, $\int_a^b f(x)dx - \underbrace{Q_3(f)}_{\int_a^b p_3(x)dx} = \int_a^b [f(x) - p_3(x)]dx$

$$= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\,dx =$$

Άσκηση 4.15

$$= -\frac{1}{4!}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\underbrace{\int_a^b (a-x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)\,dx}_{=\frac{(b-a)^5}{2^3\cdot 15}}$$

όπως στην αντίστοιχη απόδειξη για τον τύπο του τραπεζίου.

- <u>Σύνθετος τύπος του Simpson</u>

Έστω $n \in \mathbb{N}$ άρτιος, $h = \frac{b-a}{n}$, και $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$, ο ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα h. Εφαρμόζοντας τον απλό τύπο του Simpson σε καθένα των υποδιαστημάτων $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, …, $[x_{n-2},x_n]$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα παίρνουμε τον <u>σύνθετο τύπο του Simpson</u>.

$$Q_{n+1}^S(f) = \frac{h}{3}\Big[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+$$
$$+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$$

- <u>Πρόταση</u> (Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$, n <u>άρτιος</u> και Q_{n+1}^S ο σύνθετος τύπος του Simpson ως προς τον διαμερισμό $x_i = a+ih$, $i=0,\dots,n$, με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$

Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}^{S}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

<u>Απόδειξη</u>: Το συνολικό σφάλμα του σύνθετου τύπου του Simpson είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων του απλού τύπου του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0,x_2], [x_2,x_4], \dots, [x_{n-2},x_n]$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx - Q_{n+1}^{S}(f) =$$

$$= -\frac{1}{2^4 \cdot 180}\Big[\overbrace{(x_2-x_0)^5}^{2^5\cdot h^5} f^{(4)}(\xi_1) + (x_4-x_2)^5 f^{(4)}(\xi_2) + \dots +$$

$$+ \dots + (x_n - x_{n-2})^5 f^{(4)}(\xi_{\frac{n}{2}})\Big] =$$

$$= -\frac{2^5 \cdot h^5}{2^4 \cdot 180} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)$$

$$= -\frac{2^5\cdot h^5}{2^4\cdot 180}\cdot\frac{n}{2}\cdot \underbrace{\frac{1}{\frac{n}{2}}\sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)}_{f^{(4)}(\xi)}$$

$$= \frac{-\overbrace{nh}^{b-a}}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss

Έστω $[a,b]$ και $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους, δηλ.

$$w(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b] \qquad 0<\int_a^b w(x)dx<\infty$$

Θέλουμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα,

$$I(f)=\int_a^b w(x)f(x)dx$$ με τύπους της μορφής,

$$Q_n(f)=\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

- Ερώτημα: Μέχρι ποιού βαθμού πολυώνυμα μπορεί να ολοκληρώνει ο Q_n ακριβώς για κατάλληλη επιλογή των κόμβων x_i και των βαρών w_i;

- Ισχυρισμός: Για καμία επιλογή των x_i και w_i δεν μπορεί ο Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n$.

Έστω $p(x)=(x-x_1)^2\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^2$

Τότε $p\in\mathbb{P}_{2n}$ και $Q_n(p)=0$
αλλά,

$$I(p)=\int_a^b w(x)\underbrace{(x-x_1)^2\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^2}_{\geq 0}dx>0$$

Οι τύποι του Gauss είναι οι μόνοι τύποι που ολοκληρώνουν πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$ ακριβώς.

<u>Ορθογώνια πολυώνυμα</u>:

- Για δεδομένη συνάρτηση βάρους υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p_n βαθμού ακριβώς n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα (γράφουμε $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$)

τ.ω. $$\int_a^b w(x)\, p_n(x)\, r_{n-1}(x)\, dx = 0 \quad \forall\, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Τα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως πρός w.

- Οι ρίζες $x_1, \dots, x_n$ του p_n είναι <u>απλές</u> και ανήκουν στο διάστημα (a,b).

• <u>Θεώρημα</u> (Ύπαρξη και μοναδικότητα των τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, τα ως προς w ορθογώνια πολυώνυμα.

<u>Τότε</u>:

α) Με κόμβους $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \dots, w_n$ τ.ω. ο Q_n, $Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$,

να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού

$2n-1$, δηλαδή,

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1} \ , \ \int_a^b w(x)p(x)dx = Q_n(p)$$

Επί πλέον τα w_i είναι <u>θετικά</u>.

β) Αν ο τύπος Q_n με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, τότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

<u>Απόδειξη:</u>

α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τ.ω.

$$q(x_i) = p(x_i) \ , \ i = 1, \dots, n$$

τότε $(p-q)(x_i) = 0, \ i = 1, \dots, n$

οπότε,

$$p(x) - q(x) = \underbrace{(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}_{= p_n(x)} \cdot r_{n-1}(x)$$

με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Άρα $p = q + p_n r_{n-1}$ με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Επομένως,

$$\int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx + \underbrace{\int_a^b w(x)p_n(x)r_{n-1}(x)dx}_{=0}$$

οπότε,

$$(1) \quad \int_a^b w(x)p(x)dx = \int_a^b w(x)q(x)dx$$

Με,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \; i=1,\dots,n$$

τα πολυώνυμα Lagrange ως πρός τα σημεία $x_1,\dots,x_n$, έχουμε

$$(2) \quad q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)L_i(x)$$

- <u>Μοναδικότητα των w_i</u>:

Έστω $Q_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i' f(x_i)$ ένας τύπος που ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$.

Τώρα,
$L_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, οπότε

$$w_i = Q_n(L_i^2) = \underbrace{\int_a^b w_i[L_i(x)]^2 dx}_{>0} = Q_n'(L_i^2) = w_i'$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Τα $w_1,\dots,w_n$ είναι μοναδικά και θετικά.

<u>Απόδειξη</u>

β) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτουμε,

$$p(x) = (x-x_1)\cdot \cdots \cdot (x-x_n)\, r_{n-1}(x).$$

Προφανώς $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p)=0$.

Άρα,
$$\int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)\cdot \cdots \cdot (x-x_n)}_{\hat{p}_n(x)} r_{n-1}(x)\, dx = 0$$

Λόγω της μοναδικότητας των $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ έχουμε $p_n = \hat{p}_n$, άρα το $x_1, \dots, x_n$ είναι όντως ρίζες του p_n.

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος τύπων ολοκλήρωσης του Gauss)

Έστω $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως πρός w. Αν Q_n είναι ο τύπος του Gauss ως πρός w με n κόμβους και $f \in C^{2n}[a,b]$, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx - Q_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2\, dx$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι κόμβοι του Q_n και $w_1, \dots, w_n$ τα αντίστοιχα βάρη. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω.

$$\left.\begin{aligned} p(x_i) &= f(x_i) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned}\right\} \quad i=1,\dots,n$$

Τώρα, $\quad Q_n(f) = Q_n(p)$

και $\quad \displaystyle\int_a^b w(x)p(x)dx = Q_n(p)$

Επομένως, $\quad \displaystyle\int_a^b w(x)f(x)dx - Q_n(f) =$

$$= \int_a^b w(x)f(x)dx - \int_a^b w(x)p(x)dx =$$

$$= \int_a^b w(x)\underbrace{[f(x)-p(x)]}_{=;}dx$$

Όπως ξέρουμε,

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \ \xi(x) \in (a,b)$$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!} \underbrace{(x-x_1)^2 \cdot \ldots \cdot (x-x_n)^2}_{=[p_n(x)]^2}$$

Άρα,

$$\int_a^b w(x)f(x)\,dx - Q_n(f) =$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\int_a^b \underbrace{w(x)[p_n(x)]^2}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x))\,dx$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx$$

απόδειξη

$$\underbrace{m\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx}_{>0} \cdots \leq \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx \leq \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 M\,dx$$

$$= M\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx$$

$$M := \max_{a\leq x\leq b} f^{(2n)}(x)$$

$$m : \min_{a\leq x\leq b} f^{(2n)}(x)$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 f^{(2n)}(\xi(x))\,dx}{\int_a^b w(x)[p_n(x)]^2\,dx} \leq M$$

$$\parallel$$

$$f^{(2n)}(\xi)$$