08/05/2014

4ο Κεφάλαιο: Παρεμβολή

Παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων. Προσεγγίζουμε ~~π.χ~~ συναρτήσεις με απλούστερες π.χ. πολυώνυμα ή κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις για να υπολογίσουμε τιμές τους σε κάποια σημεία, τιμές παραγώγων τους, ολοκληρώματα σε κάποια διαστήματα κ.τ.λ.

Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange)

Έστω $x_0 \dots x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, \dots y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n $(p \in \mathbb{P}_n)$ τ.ω: $p(x_i) = y_i$ (*), $i = 0 \dots n$.

Απόδειξη

Γράφουμε το p στη μορφή $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με αγνώστους συντελεστές $a_0 \dots a_n$.

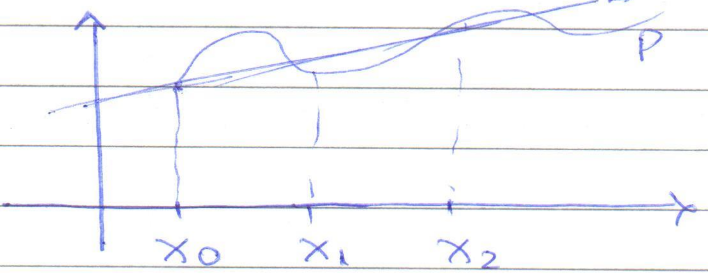
Τότε το (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους τους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$. Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα είναι: Ζητείται $q \in \mathbb{P}_n$ τ.ω: (*) $q(x_i) = 0$ $i = 0 \dots n$. Το q έχει $n+1$ ρίζες και είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, συνεπώς $q = 0$

Συμπέρασμα: Το (*) έχει ακριβώς μια λύση.

Εστω f μια συνάρτηση $x_0, \dots x_n$, ανα δύο διαφορετικά σημεία στο πεδίο ορισμού της f και $p \in P_n$ τω: $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \dots n$.

p: Παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, \dots x_n$.

: πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$.



Θεώρημα: (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Εστω $n \in \mathbb{N}$ $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0 \dots x_n \in [a,b]$ ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0 \dots x_n$.

Τότε $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ $\xi \in (a,b)$

$$\left. f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right\} (**)$$

Αποδειξη.

- $x \in \{x_0, \dots x_n\}$

Τοτε η (**) ισχύει $\forall$ ξ.

- $x \in [a,b]$ $x \neq x_i$ $i = 0 \dots n$.

Θέτουμε $\Phi(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)$ και ~~$\varphi(t) = f(t) - p(t) - f(x) ...$~~

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t)$$ για κάθε $t \in (a,b$

Προφανώς $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$, $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0 \dots n$

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(t) = 0$$

<u>Συμπέρασμα:</u> Η ϕ έχει στο διάστημα $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle: η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον <u>$n+1$</u> ρίζες, η φ'' έχει στο (a,b) <u>n</u> ρίζες ..... $\varphi^{(n+1)}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Επομένως: υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τω: $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ ①

②

Όμως: $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \dfrac{f(x)-P(x)}{\phi(x)} \phi^{(n+1)}(t)$

$$\begin{cases} \phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-x_i) = t^{n+1} + q(t) \quad \text{με } q \in \mathbb{R}^n \\ \phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + \cancel{q^{(n+1)}(t)} \to 0 \\ \text{Συμπέρασμα: } \phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! \end{cases}$$

$\phi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

$\{$ ①, ② $\to 0 = f^{(n+1)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}(n+1)! \Rightarrow$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\phi(x).$$

<u>Πόρισμα:</u> Με τον συμβολισμό του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε:

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)-p(x)| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{a\le \xi\le b} |f^{(n+1)}(\xi)| \max_{a\le x\le b} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

$$\|f(x)-p(x)\| \le \frac{\|f^{(n+1)}(\xi)\|}{(n+1)!} \max_{a\le x\le b} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

<u>Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής</u>

ⓐ Παράσταση σε μορφή Lagrange:

$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους

Έστω $i \in \{0, \ldots, n\}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $L_i \in P_n$ τ.ω.: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $j = 0 \ldots n$.

Προφανώς $L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$ με μια σταθερά a_i.

Όμως: $L_i(x_i) = 1$, οπότε: $a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1$

$$\Rightarrow a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Επομένως: $L_i(x) = \dfrac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Τα πολυώνυμα $L_0, \ldots, L_n$ λέγονται πολυώνυμα Lagrange ως προς τα σημεία $x_0 \ldots x_n$.

Έστω $p \in P_n$ τ.ω.: $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \ldots n$

Ισχυρισμός: $p(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)}_{\in P_n}$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange.

$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = f(x_j)$, $j = 0 \ldots n$

Πλεονέκτημα: Η απλότητα της παράστασης, γεγονός που την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς.

Μειονεκτήματα:

(1) Ο υπολογισμός της τιμής του p σε ένα σημείο απαιτεί πάρα πολλές πράξεις

(2) Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε σημεία παρεμβολής πρέπει να κάνουμε όλους τους υπολογισμούς από την αρχή

(6) Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

$x_0 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, $y_0 \ldots y_n \in \mathbb{R}$

Ζητείται $p \in P_n$ τω: $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \ldots n$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

$p(x_0) = y_0 \Leftrightarrow a_0 = y_0$

$p(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \underset{\overset{\|}{y_0}}{a_0} + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Μειονέκτημα: Δεν είναι εύχρηστη για τη θεωρία.

Πλεονέκτημα:

(1) $p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + \ldots + (x - x_n)a_n)\ldots)$

Ο υπολογισμός του p σε ένα σημείο γίνεται με $O(n)$ προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς.

(2) Η προσθεση ενός σημείου παρεμβολής μπορεί να γίνει με τον προσδιορισμό ενός νέου συντελεστή

(γ) Διαιρεμένες διαφορές

Εστω $f \in C[a,b]$, $x_0, \dots \in [a,b]$ τω: $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$

Ορίζουμε: $\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$

$$\Delta^i(x_0,\dots,x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1,\dots,x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0,\dots,x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}$$

<u>Ισχυρισμός:</u>

$a_i = \Delta^i(x_0,\dots,x_i)(f)$, $i = 0,\dots,n$

09/05/2014

	$n=0$	$n=1$	$n=2$ ....
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f)$	$\Delta^1(x_0,x_1)(f)$	
x_2	$\Delta^0(x_2)(f)$	$\Delta^1(x_1,x_2)(f)$	$\Delta^2(x_0,x_1,x_2)(f)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Πρόταση: (Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους. ($f \in [a,b]$) και $p \in P_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$. Τότε ισχύει:

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0, x_1)(f)}_{a_1}(x-x_0) + \dots + \underbrace{\Delta^n(x_0, \dots x_n)}_{a_n}(x-x_0)$$

(δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville

Ένας τρόπος υπολογισμού της τιμής του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Ιδέα: Έστω $p_1, p_2 \in P_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_m \dots x_{m+n}$ και $x_{m+1} \dots x_{m+n+1}$ αντίστοιχα.
Τότε το $q \in P_{n+1}$, $q(x) = \dfrac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix}$

Είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n+1}$

Προφανώς: $q \in P_{n+1}$

Επίσης, για $i \in \{m+1, \ldots\ldots, m+n\}$, έχουμε:

$$q(x_i) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overset{f(x_i)}{\overset{\parallel}{P_1(x_i)}} & x_m - x_i \\ \underset{f(x_i)}{\underset{\parallel}{P_2(x_i)}} & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \cdot f(x_i) \left(x_{m+n+1} - x_i - x_m + x_i \right) = f(x_i)$$

Για $i = m$ έχουμε:

$$q(x_i) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overset{f(x_m)}{\overset{\parallel}{P_1(x_m)}} & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1} - x_m \end{vmatrix} = f(x_m)$$

Αντίστοιχα για $i = m+n+1$

Συμβολισμός:

$p(x_m, \ldots, x_{m+n}, \xi)$: η τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \ldots, x_{m+n}$.

$y_i = f(x_i)$

x_i	y_i	$p \in P_1$	$p \in P_2$	$p \in P_3$	$\ldots$
x_0	y_0	$p(x_0, x_1, \xi)$			
x_1	y_1	$p(x_1, x_2, \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, \xi)$		
x_2	y_2	$p(x_2, x_3, \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3, \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, x_3, \xi)$	
x_3	y_3				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

Θεώρημα: (Θεώρημα του Faber)

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1,1]$, $i=0\ldots n$

x_{00}

x_{10} x_{11}

x_{20} x_{21} x_{22} . . . .

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

υπάρχει συνάρτηση $f \in C([-1,1])$ ώ: αν $p_n \in P_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, x_{n1}, \ldots, x_{nn}$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|f - p_n\|_\infty = \infty$$

Παρεμβολή Hermite.

Θεώρημα: (Παρεμβολή Hermite)

Έστω $m_0, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $N = m_0 + \ldots + m_n + n$, και $M = \max(m_0, m_1, \ldots, m_n)$. Αν $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανα δυο διαφορετικά και $f \in C^M[a,b]$ τότε το πρόβλημα παρεμβολής Hermite:

Ζητείται $p \in P_N$ τω

$$\begin{aligned} p^{(i)}(x_0) &= f^{(i)}(x_0), \quad i=0\ldots m_0 \\ p^{(i)}(x_1) &= f^{(i)}(x_1), \quad i=0\ldots m_1 \\ &\vdots \\ p^{(i)}(x_n) &= f^{(i)}(x_n), \quad i=0\ldots m_n \end{aligned} \quad (*)$$

λύνεται μονοσήμαντα

13/05/2014

Παρεμβολή τύπου Hermite.

Απόδειξη

Το πρόβλημα αυτό (*) γράφεται ως ένα γραμμικό σύστημα

$(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=$
$= \underbrace{m_0+m_1+\dots+m_4}_{N} + n+1$

$=N+1$ πλήθος εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους τους συντελεστές του p.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Έστω $q \in \mathbb{P}_N$ λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος (με $f=0$). Τότε το q έχει τουλάχιστον $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)=N+1$ ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα κάθε ρίζας). Άρα το $q=0$, οπότε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Επομένως, το (*) έχει ακριβώς μια λύση.

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση παρεμβολής τύπου Hermite είναι όταν $m_0=\dots=m_n=1$, δηλαδή:

(+) Ζητείται $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω.:
$p(x_i)=f(x_i)$, $p'(x_i)=f'(x_i)$,
$i=0,\dots,n$

Θεώρημα: (Παράσταση του σφάλματος της Παρεμβολής τύπου Hermite)

(Έστω $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $x_0, \dots x_n \in [a,b]$ ανα δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f \in C^{2n+2}[a,b]$. Έστω $p \in P_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί τις (+). Τότε ισχύει

(**)

$$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) : f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)^2$$

Απόδειξη

Έστω χ.π.τ.γ. $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

- $x \in \{x_0 \dots x_n\}$. Τότε η (**) ισχύει για κάθε ξ
- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0 \dots x_n\}$
  1η Περίπτωση: $x_j < x < x_{j+1}$, για κάποιο j

  (Οι περιπτώσεις το $a \le x \le x_0$ και $x_n \le x < b$ γίνονται εντελώς αντίστοιχα)

Θέτουμε:

$$\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-x_i)^2$$

και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot \Psi(t), \quad t \in [a,b]$$

Προφανώς

$\varphi(x_i) = 0$, $i = 0 \dots n$

$\varphi(x) = 0$,

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Roll, υπάρχουν σημεία $\zeta_0 \dots \zeta_n$,

$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots \quad x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} < \dots$

$\dots \; x_{n-1} < \xi_n < x_n$

τω $\boxed{\psi'(\xi_i) = 0 \;, \; i = 0 \dots n.}$

Άρα η ψ' έχει τουλάχιστον <u>$n+1$</u> ρίζες στο $[a,b]$

Όμως

$$\psi'(x_i) = f'(x_i) - p'(x_i) - 0 = 0 \quad , i = 0 \dots n.$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η ψ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2(n+1) = 2n+2$ ρίζες, ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους.

Προφανώς: $\psi \in C^{2n+2}[a,b]$

<u>Roll</u>: Η ψ' έχει τουλάχιστον $2n+2$ στο $[a,b]$

« ψ'' « « $2n+1$ « (a,b)

⋮

Η $\psi^{(2n+2)}$ « « μία « (a,b).

έστω ξ αυτή η ρίζα.

Τώρα:

$$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \cancel{p^{(2n+2)}(t)} \xrightarrow{} 0 - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot \underbrace{\Psi^{(2n+2)}(t)}_{= (2n+2)!}$$

$\Psi(t) = t^{2n+2} + q(t)$, με $q \in \mathbb{P}_{2n+1}$

$$\Rightarrow \psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot (2n+2)!$$

Άρα για $t = \xi$

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \cdot (2n+2)!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \Psi(x)$$

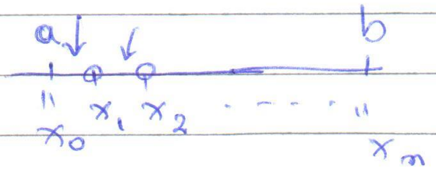
$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b):$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_n$$

(Μνημονικός κανόνας)

Τετάρτη 28/05/2014
12:00 - 14:00
(Μάθημα)

Splines



Ορισμός: (Ομαλές πολυωνυμικές splines)

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα, Δ διαμερισμός: $a=x_0<x_1\ldots<x_n=b$ του διαστήματος $[a,b]$ και $m\in\mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta)=\{s\in C^{m-1}[a,b]: s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m, \ i=0\ldots n-1\}$$

λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς το διαμερισμό Δ)

Με άλλα λόγια ζητάμε οι συναρτήσεις s να είναι $m-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στους εσωτερικούς κόμβους $x_1, \ldots, x_{m-1}$ του Δ.
($s \in S_m(\Delta)$ και $s \in C^m[a,b]$
$\Rightarrow s \in \mathbb{P}_m[a,b]$)

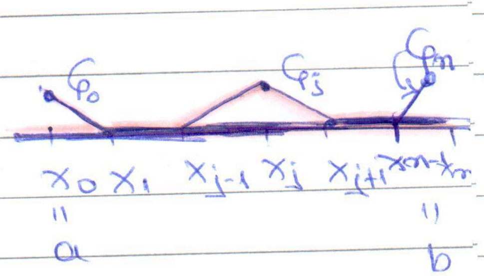
Στην πράξη χρησιμοποιούνται συχνότατα οι χώροι $S_1(\Delta)$ και $S_3(\Delta)$

Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις.

Διαμερισμός Δ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$

$$S_1(\Delta) = \{ s \in C[a,b] : \big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \ i = 0 \ldots n-1 \}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις



$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0}, & \text{για } x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{για } x \in [x_1, x_n] \end{cases}$$

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, & \text{για } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ -\dfrac{x - x_{j+1}}{x_{j+1} - x_j}, & \text{για } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{για } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

- $\varphi_i \in S_1(\Delta)$, $i=0\dots n$

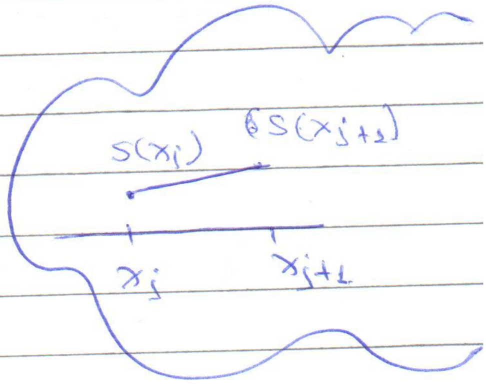
- $\varphi_0 \dots \varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις.

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi_i = 0 \Longrightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\varphi_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = 0, \quad j=0\dots n$$

$$\Rightarrow c_j = 0$$

για $j=0\dots n$.

- Οι $\varphi_0 \dots \varphi_n$ παράγουν τον $S_1(\Delta)$:



Έστω $s \in S_1(\Delta)$ Τότε:

$$s = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{s(x_i)}_{c_i} \cdot \varphi_i$$

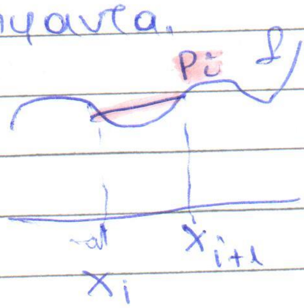
Συμπέρασμα: $\{\varphi_0 \dots \varphi_n\}$ είναι βάση του $S_1(\Delta)$

$\dim S_1(\Delta) = n+1$

Πρόβλημα παρεμβολής:

(*) $\begin{cases} \text{Έστω } f \in [a,b]. \text{ Ζητείται } s \in S_1(\Delta) \text{ ώ:} \\ s(x_i) = f(x_i), \quad i=0\dots n. \end{cases}$

Ισχυρισμός: Το (*) λύνεται μονοσήμαντα.



$$\begin{cases} p_i \in \mathbb{P}_1 \\ p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$$

$p_i(x_i) = f(x_i) + \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$

Πράγματι:

$p_i(x_i) = f(x_i)$

$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$

Η συνάρτηση $s : [a,b] \to \mathbb{R}$
$s(x) = p_i(x)$, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$
ανήκει στον $S_1(\Delta)$ και
αποτελεί τη μοναδική λύση
του προβλήματος παρεμβολής (*)

15/05/2014

2: ότι είναι βαθμός του πολυωνύμου +1
(=) 1+1=2.)

Θεώρημα: (Εκτίμηση σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $s \in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα $x_0, \dots, x_n$. Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h = \max_{1 \le i \le n} h_i$,

Τότε $\|f - s\|_\infty \le \dfrac{h^2}{8} \cdot \cancel{\max} \|f^{(2)}\|_\infty$

$\|f-s\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)|$, $\quad \|f^{(2)}\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$

Απόδειξη

Έστω $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.: $\begin{cases} p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$

Προφανώς $\forall x \in [x_i, x_{i+1}] : S(x) = p_i(x)$
και $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]\ \exists\, \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$
τ.ω.: $f(x) - p_i(x) = \frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})$

Επομένως, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|f(x) - S(x)| = |f(x) - p_i(x)|$$

$$= \frac{\underbrace{|f''(\xi(x))|}_{\leq \|f''\|_\infty}}{2} |(x - x_i)(x - x_{i+1})|$$

$$\leq \underbrace{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}_{\leq \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4}} \cdot \frac{\|f''\|_\infty}{2}$$

$f(x) = (x - a)(b - x)$, $x \in [a, b]$
$\leq \frac{(b-a)^2}{4}$

$$\leq \frac{(h_{i+1})^2}{8} \cdot \|f''\|_\infty$$

$$\leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{a\le x\le b} |f(x)-s(x)| \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$

Παρεμβολή με κυβικές splines.

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$S_3(\Delta) = \{ s \in C^2[a,b] : s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 , \ i=0\dots n-1 \}$

Τα στοιχεία αυτού του χώρου $S_3(\Delta)$ λέγονται κυβικές splines.

Πρόβλημα παρεμβολής

Ζητείται $s \in S_3(\Delta)$ τω: $s(x_i) = f(x_i)$, $i=0\dots n$.

Άγνωστοι: $4n$ (4 συντελεστές σε κάθε υποδιάστημα, n διαστήματα $\Rightarrow 4n$)

$x_0 \ x_1 \ \dots \ x_i \ x_{i+1} \ \dots \ x_n$

Συνθήκες: $4n-2$ $(2n+n-1+n-1 = 4n-2)$

- Συνθήκες παρεμβολής στα σημεία $x_0, \dots, x_n$: $2n$ (εξασφαλίζουν και συνέχεια της $s \in [a,b]$)
- Συνθήκες συνέχειας της s' στους κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$: $n-1$.
- « « s'' : $n-1$.

Απαιτούνται δύο ακόμα συνθήκες.

1º Πρόβλημα Παρεμβολής

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i), & i = 0 \dots n. \\ S'(x_0) = f'(x_0) \\ \quad \ddot{a} \\ S'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Για $f \in C^1[a,b]$ αυτό το πρόβλημα παρεμβολής έχει ακριβώς μια λύση.

2º Πρόβλημα Παρεμβολής.

$$\begin{cases} S(x_i) = f(x_i), & i = 0 \dots n. \\ S''(x_0) = f''(x_0) \\ \quad \ddot{a} \\ S''(x_n) = f''(x_n) \end{cases}$$

Για $f \in C^2[a,b]$ αυτό το πρόβλημα παρεμβολής έχει ακριβώς μια λύση.

3º Πρόβλημα Παρεμβολής

$s \in S_3(\Delta)$ τω: $s''(a) = s''(b) = 0$

λέγονται φυσικές κυβικές splines.

~~Τρίτη 11/13~~

Ζητείται $s \in \mathring{S}_3(\Delta)$ φυσική κυβική spline τω: $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \dots n$.
Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

<u>Θεώρημα:</u> (Εκτίμηση ενός σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines) <u>(1ο Πρόβλημα)</u>

Έστω Δ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, $f \in C^1[a,b]$ και $s \in \mathring{S}_3(\Delta)$ η λύση του πρώτου προβλήματος παρεμβολής. Θέτουμε:

$$h = \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}), \quad K = \frac{h}{\min\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})}$$

Τότε, αν $f \in C^4[a,b]$, τότε ισχύει ότι:

$$\| f^{(m)} - s^{(m)} \|_\infty \le C_m \cdot h^{4-m} \| f^{(4)} \|_\infty, \quad m = 0 \dots 3$$

με $C_0, \dots C_3$ ανεξ. της f.

Παρατήρηση: $C_0 = \frac{5}{384}$ $\quad C_1 = \frac{1}{24}$ <u>Βέλτιστες.</u>

$$C_2 = \frac{3}{8}, \quad C_3 = \max\left\{2, \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{K}\right)\right\}$$

<u>Παρεμβολή με κυβικές splines τύπου Hermite.</u>

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$. Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$

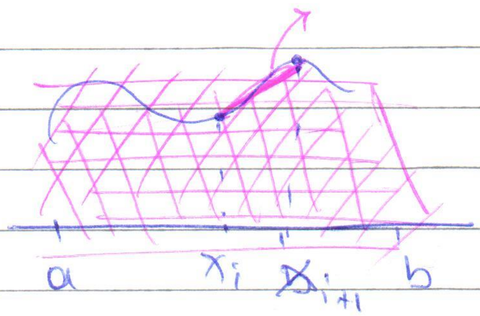
τ.ω: $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$, $i=0\ldots n-1$, λέγονται κυβικές splines Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ.

Θεώρημα: (Παρεμβολή με κυβικές splines Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$, και $\Delta: a = x_0 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια κυβική spline Hermite ως προς Δ τ.ω: (*) $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$, $i=0\ldots n$.
Αν επιπλέον η f είναι $f \in C^4[a,b]$ τότε
$$\|f-s\|_\infty \leq \frac{1}{384} \cdot h^4 \cdot \|f^{(4)}\|_\infty, \text{ με } h = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$$

Απόδειξη

Έστω $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω: $\begin{cases} p_i(x_j) = f(x_j) \\ \& \\ p_i'(x_j) = f'(x_j) \end{cases}$, $j = i, i+1$.



Προφανώς, η $s: [a,b] \to \mathbb{R}$, $s(x) = p_i(x)$ για $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0\ldots n-1$, είναι η μοναδική λύση του προβλήματος παρεμβολής (*)

Εκτίμηση σφάλματος: Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε

$s(x) = p_i(x)$, και

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \ \exists\, \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$ $\cancel{f(x) - p_i(x) = f^{(4)}(\xi(x))}$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2$$

Άρα για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$|f(x) - s(x)| = |f(x) - p_i(x)| = \frac{\overbrace{|f^{(4)}(\xi(x))|}^{\leq \|f^{(4)}\|_\infty}}{4!}\Big[\underbrace{(x - x_i)(x_{i+1} - x)}_{\leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}}\Big]^2$$

$$\leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{24} \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{16}.$$

$$\leq \frac{h^4}{24 \cdot 16} \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - s(x)|}_{\|f-s\|_\infty} \leq \frac{h^4}{384} \cdot \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Άσκηση 4.4

$p \in \mathbb{P}_3$, $p(x_i) = \ln(x_i)$, $x_i = i+1$, $i = 0,1,2,3.$

ΝΔΟ: $\varepsilon(x) = \ln(x) - p(x)$
έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες.

Λύση

$f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,4]$.

$\forall x \in [1,4]\ \exists\, \xi(x) \in (1,4)$ τω:

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} \underset{x_0}{(x-1)}\,\underset{x_1}{(x-2)}\,\underset{x_2}{(x-3)}\,\underset{x_3}{(x-4)}$$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2}$

$f'''(x) = +2x^{-3}$

$f^{(4)}(x) = -6 \cdot x^{-4}$

άρα: $\ln(x) - p(x) = -\underbrace{\frac{6}{4(\xi(x))^4}}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Επομένως, η $\ln(x) - p(x)$ έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες: 1, 2, 3, 4.

Άσκηση 4.5

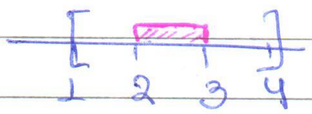
$p \in \mathbb{P}_3$, $p(i) = e^{i}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

ΝΔΟ: $\forall x \in [2,3]$, $e^x > p(x)$

Λύση:

$f(x) = e^x$

Το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $1, 2, 3, 4$.



$\forall x \in [1,4] \ \exists \ \xi(x) \in (1,4)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άρα: $\forall x \in (2,3) \ \exists \ \xi(x) \in [1,4]$.

$$e^x - p(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{e^{\xi(x)}}{4!}}_{>0}\ \underbrace{(x-1)}_{>0}\ \underbrace{(x-2)}_{>0}\ \underbrace{(x-3)}_{<0}\ \underbrace{(x-4)}_{<0}}_{>0}$$

$+ \quad (+ \quad + \quad - \quad -)$

$\Rightarrow \forall x \in (2,3)$: $e^x - p(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > p(x)$.

Ασκηση 4.6

$f \in C[a,b]$, $a \leq x_0 < x_1 \leq \ldots < x_n \leq b$

$p \in \mathbb{P}_n$, $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

ΝΔΟ: Καθε P πολυώνυμο τω: $P(x_i) = f(x_i)$
$i = 0 \ldots n$, είναι της μορφής

$P = p + rq$ με q τυχαιο πολυώνυμο
και $r(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$

Λύση

$P - p$: πολυώνυμο.

$(P-p)(x_i) = P(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - f(x_i)$
$= 0$, $i = 0 \ldots n$.

Τα $x_0 \ldots x_n$ είναι ρίζες του $P-p$

Συμπέρασμα: $P(x) - p(x) = \underbrace{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}_{r(x)} \cdot q(x)$

Μαθημα:
Παρ: 23/05 : 11:00 - 13:00

|20|05|2014|

|Άσκηση 4.11|

ύψος διαστήματος

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots n$

$x_0 = -1$, $x_n = 1$

(x_i κόμβος $\Rightarrow -x_i$ κόμβος)

$f \in C[-1,1]$ $\quad p \in \mathbb{P}_n$

$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \dots n$.

ΝΔΟ:

f άρτια $\Rightarrow p$ άρτια

f περιττή $\Rightarrow p$ περιττή

Απόδειξη

([-a,a] γενικά)

φ άρτια: $\varphi(-x) = \varphi(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

φ περιττή: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

---

f άρτια:

Θέτουμε $q(x) = p(-x)$ $\quad \forall x \in [-1,1]$

- $q \in \mathbb{P}_n$
- $q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) = f(x_i)$, $i = 0 \dots n$.

f είναι άρτια

$-x_i$ σημείο παρεμβολής (κόμβος)

Συμπέρασμα: $q = p$, οπότε $p(x) = p(-x)$ $\forall x \in [-1,1]$

f περιττή:

Θέτουμε $q(x) = -p(-x)$

- $q \in \mathbb{P}_n$
- $q(x_i) = -p(x_i) = -f(-x_i) = f(x_i)$

$i = 0 \dots n$

$\Rightarrow q = p \Rightarrow p(x) = -p(x)$

$\Rightarrow p(-x) = -p(x)$

$\Rightarrow p$ περιττή

Άσκηση 4.16

$f \in C^5[0,1]$, $p \in \mathbb{P}_4$

$$\left.\begin{array}{l} p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) \\ p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1) \end{array}\right\} i = 0,1.$$

$p\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, ΝΔΟ: $\forall x \in [0,1]$ $\exists \xi \in (0,1)$ Έχω δύο συνθήκες

τω: $f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x - \frac{1}{2})(x-1)^2$

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ τετριμμένη για κάθε ξ

$\{0, \frac{1}{2}, 1\}$

- $x \in [0,1]$, $x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$\Phi(t) = t^2 (t - \frac{1}{2})(t-1)^2$

$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t)$, $t \in [0,1]$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ η φ' έχει στο $[a,b]$ τουλ. 4 ρίζες (διαφορετικές των 0,1)

Όμως $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$

Συμπέρασμα: Η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλ. 6 ρίζες

φ'' . . . . $(0,1)$ . . . 5 . . .

$\varphi^{(5)}$ . . . $(0,1)$ . . . 1 . . . , έστω ξ.

Όμως: $\varphi^{(5)}(t) = f^{(5)}(t) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)} \cdot 5!$

άρα: $0 = f^{(5)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\, 5!$

$\Rightarrow f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,\phi(x)$

<u>Άσκηση 4.15</u>

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

$f \in C^4[a,b]$, $p \in \mathbb{P}_3$

$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), & i = 0,1,2 \\ p'(x_1) = f'(x_1) \end{cases}$

<u>ΝΔΟ:</u> (*) $\forall x \in [a,b]\ \exists \xi \in (a,b) : f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ Τότε η (*) ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$
- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Θέτουμε $\phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$

και

$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\phi(x)}\cdot\phi(t)$, $\forall t \in [a,b]$

<u>Προφανώς:</u> $\varphi \in C^4[a,b]$

$$\begin{cases} \varphi(x_i)=0, & i=0,1,2 \\ \varphi(x)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (Σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle)
η φ' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες ξ_1, ξ_2, ξ_3
(διαφορετικές του x_1)

• Αλλά $\varphi'(x_1)=0$
άρα η φ' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες.
$\Rightarrow$ η φ'' « « (a,b) « 3 «
⋮
η $\varphi^{(4)}$ « « (a,b) « 1 «,
έστω ξ.

Τώρα:

$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

οπότε:

$$0 = f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\Phi(x)$$

Άσκηση 4.18

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
$m \in \mathbb{N}$

$$\Sigma_m(\Delta) = \{ s \in C^m[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i=0\dots n-1 \}$$

ΝΔΟ: $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s \in \mathbb{P}_m$

Απόδειξη

Έστω $i \in \{1, \dots, n-1\}$
Αρκεί ν.δ.ο η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$

Για $x \in [x_{i-1}, x_i]$ έχουμε:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^-)}{j!} (x - x_i)^j$$

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^+)}{j!} (x - x_i)^j$$

Αφού η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμ στο x_i, ισχύει $s^{(j)}(x_i^-) = s^{(j)}(x_i^+)$, $j = 0, \dots, m$
Επομένως η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$