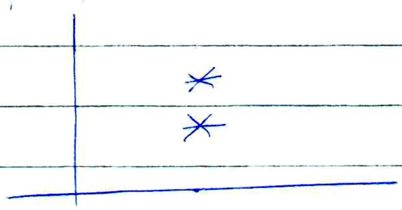
8/5/14

4 Παρεμβολή

Η παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων

τεθλασμένη

Προσεγγίζουμε συναρτήσεις με απλούστερες, π.χ. με πολυώνυμα ή κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις για να υπολογίσουμε τιμές του σε κάποια σημεία, τιμές παραγώγων τους, ολοκληρώματα σε κάποια διαστήματα κλπ.



Πολυωνυμική παρεμβολή

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Lagrange)

όλα διαφορετικά μεταξύ τους

Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n ($p \in \mathbb{P}_n$) τ.ω

$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n$ (*)

$n+1$ σημεία $\to p \in \mathbb{P}_n$

2 σημεία $\to$ μία γραμμή! πολυώνυμο 1ου βαθμού το πολύ

Απόδειξη Γράφουμε το p στη μορφή

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

με άγνωστους τους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$

Τότε το (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τους συντελεστές $a_0, \dots, a_n$

Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα είναι: Ζητείται $q \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

(+) $$q(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

Το q έχει $n+1$ ρίζες και είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, συνεπώς $q = 0$

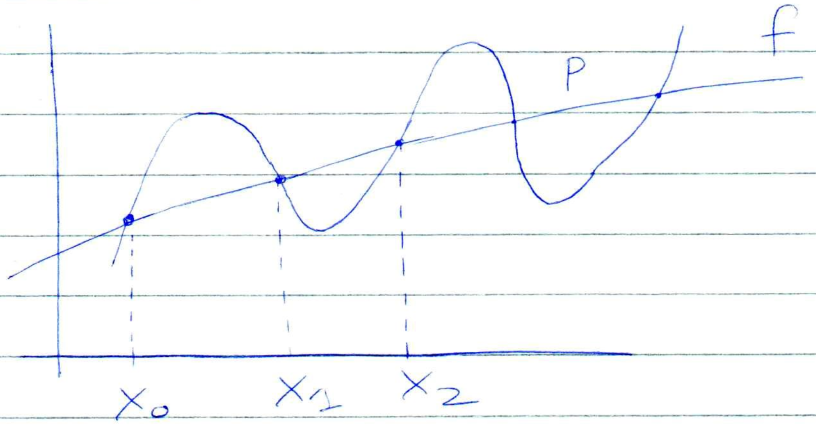
Συμπέρασμα: Το (*) έχει ακριβώς μία λύση.

Έστω f μία συνάρτηση, $x_0, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά σημεία στο πεδίο ορισμού της f και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

p: Παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$



$$\boxed{f(x) = p(x)}$$

Θεώρημα (Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής)

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$. Τότε

$\xi = \xi(x)$

$$(**)\quad \begin{cases} \forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b) \\ f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \end{cases}$$

Απόδειξη

- $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$

  Τότε η $(**)$ ισχύει για κάθε ξ

- $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$

  το x είναι σταθερό σημείο

  Θέτουμε

$$\Phi(t) := \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)$$

και

μηδενίζεται σε n+1 σημεία ΑΛΛΑ θέλω και άλλο ένα σημείο

άπειρες παραγωγίσιμη

$$\varphi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t)$$

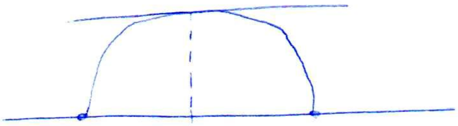
≠0 δεν μηδενίζεται

n+1 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη

για $t \in [a,b]$

άπειρες φορές παραγωγίσιμη

μηδενίζεται και στο x τώρα

Rolle 

Προφανώς $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$,

και

$$\varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\varphi(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(x) - P(x)}{\Phi(x)}\, \Phi(x) = 0$$

<u>Συμπέρασμα</u> Η φ έχει στο διάστημα $[a,b]$ τουλάχιστον $n+2$ ρίζες.

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle

η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $n+1$ ρίζες

η φ'' " " " " n "

⋮

$\varphi^{(n+1)}$ .... μία ρίζα

<u>Επομένως</u>: υπάρχει $\xi \in (a,b)$

τ.ω.

(1) $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$

παραγωγίζουμε $n+1$ φορές ώστε το πολυώνυμο βαθμού το πολύ n να γίνει 0

Όμως

(2) $$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \overset{0}{\cancel{p^{(n+1)}(t)}} - \frac{f(x) - P(x)}{\Phi(x)}\, \underbrace{\Phi^{(n+1)}(t)}_{=(n+1)!}$$

$$\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) = t^{n+1} + q(t)$$

με $q \in \mathbb{P}_n$

Άρα $\Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)! + \cancel{q^{(n+1)}(t)}^{\,0}$

$= (n+1)!$

(1), (2) $\Rightarrow$

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)!$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Phi(x)$$

<u>Πόρισμα</u> Με τον συμβολισμό του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε

$$\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-p(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\max_{a\le\xi\le b}\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

$$\|f-p\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}\max_{a\le x\le b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

<u>Παράσταση και υπολογισμός του Πολυωνύμου Παρεμβολής</u>

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange:

$x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους

Έστω $i\in\{0,\dots,n\}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $L_i \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

από τα $n+1$ j τα n είναι 0 και σε 1 κάνει 1

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad j = 0, \dots, n$$

Προφανώς

$$L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)$$

πολυώνυμο βαθμού n με ρίζες άρα γράφεται στη μορφή αυτή.

με μία σταθερά a_i.

Όμως $L_i(x_i) = 1$, οπότε

$$a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Rightarrow$$

$$a_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Επομένως,

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Τα πολυώνυμα $L_0, \dots, L_n$ λέγονται <u>πολυώνυμα του Lagrange</u> ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$

Έστω $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

<u>Ισχυρισμός:</u>

$$p(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)}_{\in \mathbb{P}_n}$$

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = f(x_j) \underbrace{L_j(x_j)}_{=1} = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n$$

Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή Lagrange:

<u>Πλεονέκτημα</u>: Η απλότητα της παράστασης, γεγονός που την καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμη για θεωρητικούς σκοπούς.

<u>Μειονεκτήματα:</u>

1. Ο υπολογισμός της τιμής του p σε ένα σημείο απαιτεί πάρα πολλές πράξεις

2. Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε σημεία παρεμβολής, πρέπει να κάνουμε όλους τους υπολογισμούς από την αρχή.

Β) Παράσταση σε μορφή του Νεύτωνα

$x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά
$y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1})$$

αν έβαζα n τότε θα είχα $n+1$ παράγοντες άρα ο βαθμός του πολυωνύμου θα ήταν $n+1$ άτοπο

$$p(x_0) = y_0 \Leftrightarrow a_0 = y_0$$

$$p(x_1) = y_1 \Rightarrow \underbrace{a_0}_{y_0} + a_1(x_1 - x_0) = y_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Μειονέκτημα: Δεν είναι εύχρηστη για τη θεωρία

Πλεονεκτήματα:

1. $p(x) = a_0 + (x - x_0)\Big(a_1 + (x - x_1)\big(a_2 + \dots + (x - x_{n-1})\,a_n\big)\Big)$

Ο υπολογισμός του p σε ένα σημείο γίνεται με $O(n)$ προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς

2. Η πρόσθεση ενός σημείου παρεμβολής μπορεί να γίνει με τον προσδιορισμό ενός νέου συντελεστή.

γ) Διαιρεμένες διαφορές

Έστω $f \in C[a,b]$, $x_0, x_1, \ldots \in [a,b]$, τ.ω. $x_i \neq x_j$ για $i \neq j$. Ορίζουμε:

$$\Delta^0(x_0)(f) := f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0, \ldots, x_i)(f) := \frac{\Delta^{i-1}(x_1, \ldots, x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}$$

$i \geq 1$

Ισχυρισμός: $a_i = \Delta^i(x_0, \ldots, x_i)(f)$

$i = 0, \ldots, n$

9/5/14

$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά

$y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

Ζητείται $p \in \mathbb{P}_n$ τω.

$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n$

Παράσταση σε μορφή Νεύτωνα:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$$

γ) <u>Διαιρεμένες διαφορές</u>

$f \in C_1[\alpha, b]$

$x_0, \ldots \in [\alpha, b]$ ανά δύο διαφορετικά

$$\Delta^0(x_0)(f) := f(x_0)$$

$$\Delta^i(x_0, \ldots, x_i)(f) := \frac{\Delta^{i-1}(x_1, \ldots, x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \ldots, x_{i-1})(f)}{x_i - x_0}$$

$i \geq 1$ πώς τα υπολογίζω;

	$n=0$	$n=1$	$n=2$
x_0	$\Delta^0(x_0)(f)$		
x_1	$\Delta^0(x_1)(f) \longrightarrow$	$\Delta^1(x_0, x_1)(f)$	
x_2	$\Delta^0(x_2)(f) \longrightarrow$	$\Delta^1(x_1, x_2)(f) \longrightarrow$	$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)(f)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Πρόταση (Παράσταση του πολυωνύμου Παρεμβολής σε μορφή Νεύτωνα με διαιρεμένες διαφορές)

Έστω $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά, $f \in C[a,b]$, και $p \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο Παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$. Τότε ισχύει

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0 - x_1)(f)}_{a_1}(x - x_0) + \dots + \underbrace{\Delta^n(x_0, \dots, x_n)(f)}_{a_n}(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville

Ένας τρόπος υπολογισμού της τιμής του πολυωνύμου Παρεμβολής σε ένα σημείο, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Ιδέα: Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής μίας συνάρτησης f στα σημεία $x_m, \underline{\dots, x_{m+n}}$ και $\underline{x_{m+1}, \dots,}\ x_{m+n+1}$, αντίστοιχα.

κοινά

Τότε το $q \in \mathbb{P}_{n+1}$

$$q(x) := \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x) & x_m - x \\ p_2(x) & x_{m+n+1} - x \end{vmatrix}$$

είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n+1}$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_{n+1}$

Επίσης, για $i \in \{m+1, \dots, m+n\}$ τα κοινά σημεία έχουμε

$$q(x_i) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} p_1(x_i) & x_m - x_i \\ p_2(x_i) & x_{m+n+1} - x_i \end{vmatrix}$$

$$p_1(x_i) = f(x_i) = p_2(x_i)$$

$$= \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} f(x_i) \left[(x_{m+n+1} - \cancel{x_i}) - (x_m - \cancel{x_i}) \right]$$

$$= f(x_i)$$

Για $i = m$ έχουμε

$$q(x_m) = \frac{1}{x_{m+n+1} - x_m} \begin{vmatrix} \overset{f(x_m)}{\overset{\parallel}{p_1(x_m)}} & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1} - x_m \end{vmatrix}$$

$$= f(x_m)$$

<u>Συμβολισμός:</u> $p(x_m, \dots, x_{m+n}; \xi)$

η τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n}$

$y_i := f(x_i)$

x_i	y_i	$p \in \mathbb{P}_1$	$p \in \mathbb{P}_2$	$p \in \mathbb{P}_3 \dots$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$p(x_0, x_1; \xi)$		
x_2	y_2	$p(x_1, x_2; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2; \xi)$	
x_3	y_3	$p(x_2, x_3; \xi)$	$p(x_1, x_2, x_3; \xi)$	$p(x_0, x_1, x_2, x_3; \xi)$
$\vdots$	$\vdots$	είναι τιμές αυτές		

Δεν σου δίνει το πολυώνυμο μόνο την τιμή στο σημείο

Θεώρημα (Θεώρημα του Faber)

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni} \in [-1, 1]$, $i=0,\dots,n$,

$$\begin{array}{ccc} x_{00} & & \\ x_{10} & x_{11} & \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1,1]$ τω αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nn}$, τότε ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-p_n\|_\infty = \infty$$

Παρεμβολή Hermite

Θεώρημα (Παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$
$N := m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$,
και $M := \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$. Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά, και $f \in C^M[a,b]$, τότε το πρόβλημα παρεμβολής Hermite

αν $m_0 = m_1 = \ldots = m_n = 0$
παρεμβολή τύπου
Lagrange

$$
\begin{cases}
\text{Ζητείται } p \in \mathbb{P}_N \text{ τ.ω} \\
p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \; i = 0, \ldots, m_0 \\
p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1), \; i = 0, \ldots, m_1 \\
\vdots \\
p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n), \; i = 0, \ldots, m_n
\end{cases}
$$

λύνεται μονοσήμαντα

13/5/14

Παρεμβολή τύπου Hermite

Θεώρημα Έστω $m_0, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$,
$N = m_0 + \ldots + m_n + n$, $M := max(m_0, \ldots, m_n)$
Αν $f \in C^M[a,b]$ και $x_0, \ldots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά σημεία, τότε το πρόβλημα παρεμβολής τύπου Hermite

$$(*)\begin{cases} \text{Ζητείται } p \in \mathbb{P}_N \text{ τω} \\ p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0),\ i=0,\ldots,m_0, \\ p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1),\ i=0,\ldots,m_1, \\ \vdots \\ p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n),\ i=0,\ldots,m_n \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

Απόδειξη

Το $(*)$ γράφεται ως ένα γραμμικό σύστημα
$(m_0+1) + (m_1+1) + \ldots + (m_n+1) =$
$= \underbrace{m_0 + m_1 + \ldots + m_n + n}_{N} + 1 =$

$= N+1$ εξισώσεων με $N+1$ αγνώστους, τους συντελεστές του p. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση

Έστω $q \in \mathbb{P}_N$ λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος (με $f=0$)
Τότε το q έχει τουλάχιστον $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)$
$= N+1$
ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα κάθε ρίζας).

Άρα $q=0$, οπότε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Επομένως, το (*) έχει ακριβώς μία λύση

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση παρεμβολής τύπου Hermite είναι όταν $m_0 = \dots = m_n = 1$, δηλαδή:

$$(+)\begin{cases} \text{Ζητείται } p \in \mathbb{P}_{2N+1} \text{ τ.ω.} \\ p(x_i) = f(x_i),\ p'(x_i) = f'(x_i), \\ i = 0,\dots,n \end{cases}$$

<u>Θεώρημα</u> (Παράσταση του σφάλματος της παρεμβολής τύπου Hermite)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $x_0,\dots,x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, και $f \in C^{2N+2}[a,b]$. Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ το πολυώνυμο που ικανοποιεί ~~τα~~ τις (+)

Τότε ισχύει

$\forall x \in [\alpha, b] \ \exists \xi \in (\alpha, b) \quad f(x) - p(x) =$

$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2$$

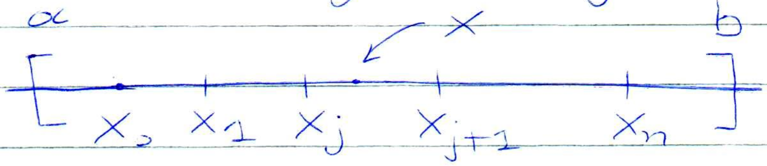
όσες και οι συνθήκες που έχουμε στο x_i

<u>Απόδειξη</u> Έστω χΠΤΓ $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

- $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ Τότε η $(**)$ ισχύει για κάθε ξ

- $x \in [\alpha, b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

<u>1η Περίπτωση</u> $x_j < x < x_{j+1}$ για κάποιο j



(οι περιπτώσεις $\alpha \le x < x_0$ και $x_n < x \le b$ γίνονται εντελώς αντίστοιχα)

Θέτουμε $\Psi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i)^2$ | $\Psi(t) = t^{2n+2} + q(t)$ με $q \in \mathbb{P}_{2n+1}$

και

$$\psi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Psi(x)} \Psi(t), \quad t \in [\alpha, b]$$

Προφανώς

$$\psi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\psi(x) = 0,$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχουν σημεία $\xi_0, \dots, \xi_n$,

$x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_j < \xi_j < x < \xi_{j+1} < x_{j+1} < \dots$

$< x_{n-1} < \xi_n < x_n$ τ.ω. $\boxed{\psi'(\xi_i) = 0, \ i = 0, \dots n}$

Άρα η ψ' έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες στο $[a, b]$

δεν αρκούν: θέλω να πάω στις $2n+2$ ρίζες

Όμως

$$\psi'(x_i) = f'(x_i) - p'(x_i) - 0 = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

Συμπέρασμα: Η ψ' έχει στο $[a, b]$ τουλάχιστον $2(n+1) = 2n + 2$ ρίζες στο $[a, b]$

ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους

Προφανώς $\psi \in C^{2n+2}[a, b]$

<u>Rolle:</u>

Η ψ' έχει τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες στο $[a,b]$
" ψ'' " " $2n+1$ " " (a,b)

⋮

" $\psi^{(2n+2)}$ " " μία ρίζα στο (a,b)

Έστω ξ αυτή η ρίζα

Τοπολυώνυμο, είναι βαθμού $2n+1$

Τώρα

το x το έχω σταθεροποιήσει

$$\psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \cancel{p^{(2n+2)}}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)} \boxed{\Psi^{(2n+2)}(t)}$$

$\cancel{p^{(2n+2)}} \to 0$

$(2n+2)!$

$\Psi(t) = t^{2n+2} + q(t)$

με $q \in \mathbb{P}_{2n+1}$

$$\Rightarrow \psi^{(2n+2)}(t) = f^{(2n+2)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!$$

Άρα $t=\xi$,

$$0 = f^{(2n+2)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!$$

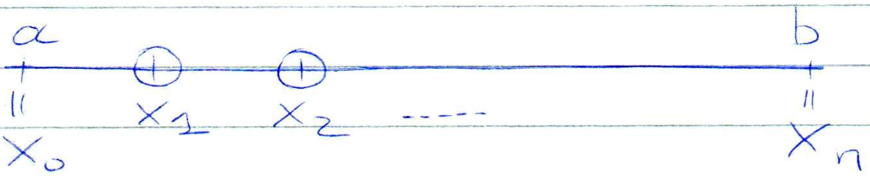
$$\Rightarrow f(x)-p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Psi(x)$$

$\forall x \in [a,b] \ \exists \xi \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1} \cdots (x-x_n)^{m_n+1}$$

(Μνημονικός κανόνας)

Splines



Ορισμός (Ομαλές πολυωνυμικές splines)

πολλές φορές δεν το λέμε και

Έστω $[a,b]$ ένα διάστημα,
$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $m \in \mathbb{N}$
Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου

$$S_m(\Delta) := \left\{ s \in C^{m-1}[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

λέγονται (πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς Δ)

Με άλλα λόγια, ζητάμε οι συναρτήσεις s να είναι $m-1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στους εσωτερικούς κόμβους $x_1, \dots, x_{n-1}$ του Δ

($s \in S_m(\Delta)$ και $s \in C^m[a,b]$
$\Rightarrow s \in \mathbb{P}_m[a,b]$)

Στην πράξη χρησιμοποιούνται συχνότατα οι χώροι $S_1(\Delta)$ και $S_3(\Delta)$

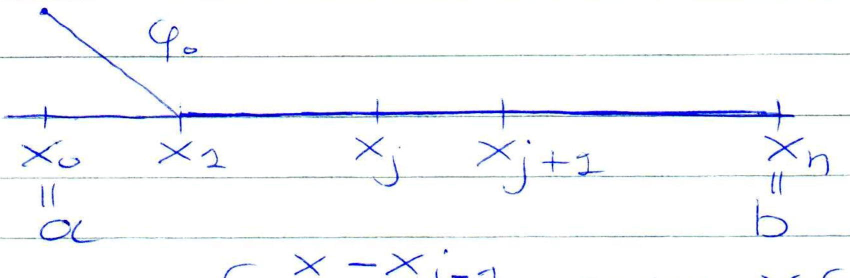
Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις

$\Delta: \ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$

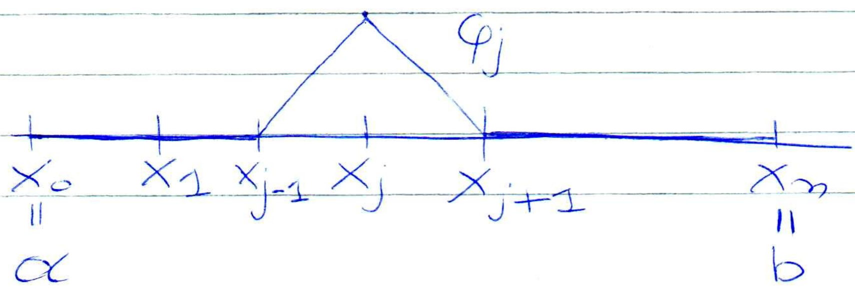
$$S_1(\Delta) = \left\{ s \in C[a,b] : s\big|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \ i=0,\dots,n-1 \right\}$$

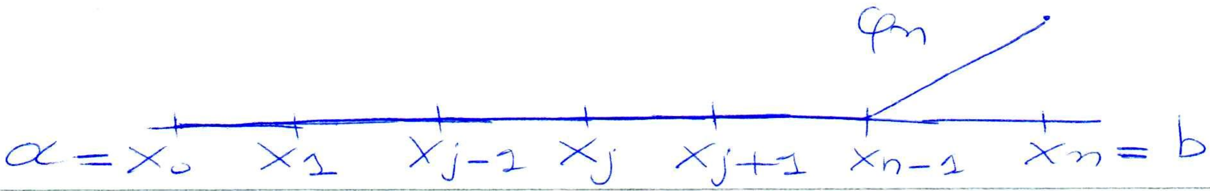
Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-x_1}{x_1-x_0} & \text{για } x \in [x_0,x_1] \\[2ex] 0 & \text{για } x \in [x_1,x_n] \end{cases}$$



$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \text{για } x \in [x_{j-1},x_j] \\[2ex] -\dfrac{x-x_{j+1}}{x_{j+1}-x_j} & \text{για } x \in [x_j,x_{j+1}] \\[2ex] 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$





$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{για } x\in[x_{n-1},x_n] \\ \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

- $\varphi_i \in S_1(\Delta)$, $i=0,\dots,n$.
- $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις

$$\sum_{i=0}^{n} c_i\varphi_i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \underbrace{\varphi_i(x_j)}_{=\delta_{ij}} = 0, \quad j=0,\dots,n$$

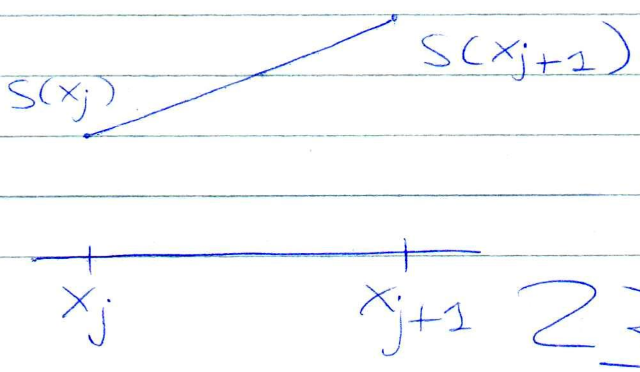
$$\Rightarrow c_j=0, \quad j=0,\dots,n$$

- Οι $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ παράγουν τον $S_1(\Delta)$

Έστω $s\in S_1(\Delta)$

Τότε

$$s=\sum_{i=0}^{n} \underbrace{s(x_i)}_{c_i}\varphi_i$$



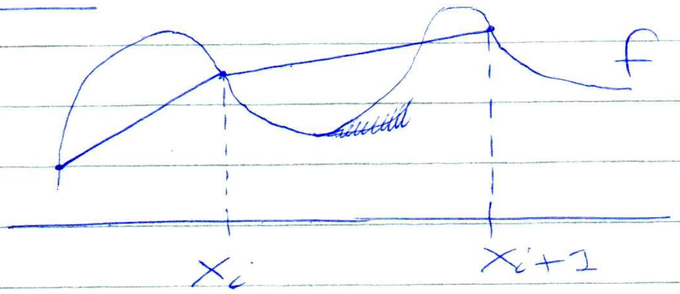
<u>Συμπέρασμα</u> $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ βάση του $S_1(\Delta)$

$\dim S_1^1(\Delta) = n+1$

<u>Πρόβλημα παρεμβολής</u>

$$(*) \begin{cases} \text{Έστω } f \in [a,b] \text{ Ζητείται} \\ s \in S_1^1(\Delta) \text{ τ.ω.} \\ s(x_i) = f(x_i), \ i = 0, \dots, n \end{cases}$$

<u>Ισχυρισμός</u>: Το (*) λύνεται μονοσήμαντα



$$\begin{cases} p_i \in \mathbb{P}_1 \\ p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$$

$$p_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

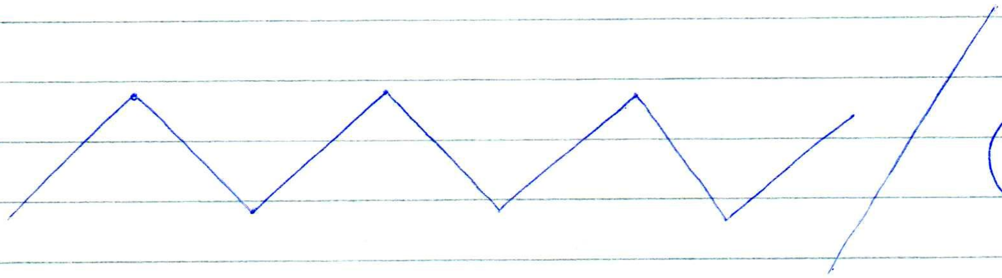
$p_i(x_i) = f(x_i)$ $\qquad x \in [x_i, x_{i+1}]$

$p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$

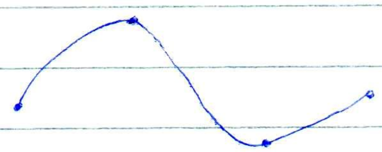
Η συνάρτηση $s:[a,b] \to \mathbb{R}$,

$s(x) = p_i(x)$ για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

ανήκει στον $S_1(\Delta)$ και αποτελεί τη μοναδική λύση του προβλήματος παρεμβολής (*)



Spline



15/5/14

Θεώρημα

(Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)

Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, και $s \in S_2(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα $x_0, \dots, x_n$.
Αν $h_i := x_i - x_{i-1}$ και $h := \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$

τότε
$$\|f - s\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - s(x)| \qquad \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$$

Απόδειξη

Έστω $p_i \in P_1$ τ.ω. $\begin{cases} p_i(x_i) = f(x_i) \\ p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases}$

Προφανώς $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $s(x) = p_i(x)$
και
$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \ \exists \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$$
$$f(x) - p_i(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2} (x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Επομένως, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$|f(x)-s(x)| = |f(x)-p_i(x)|$$

$$= \frac{\overbrace{|f''(\xi(x))|}^{\leq \|f''\|_\infty}}{2} \, |(x-x_i)(x-x_{i+1})|$$

$$\leq \underbrace{(x-x_i)(x_{i+1}-x)} \, \frac{\|f''\|_\infty}{2}$$

$$\leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4} \, \frac{\|f''\|_\infty}{2}$$

$$= \frac{(h_{i+1})^2}{8} \, \|f''\|_\infty$$

$$\leq \frac{h^2}{8} \, \|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{a \leq x \leq b} |f(x)-s(x)| \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

<u>Παρεμβολή με κυβικές splines</u>

$\Delta: \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$S_3(\Delta) = \left\{ s \in C^2[a,b] : \; s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \; i=0,\ldots,n-1 \right\}$$

Τα στοιχεία του $S_3(\Delta)$ λέγονται <u>κυβικές</u> splines

Πρόβλημα παρεμβολής

Ζητείται $s \in S_3(\Delta)$ τω.

$$s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n$$

Άγνωστοι: $4n$

Συνθήκες: $4n-2$

- Συνθήκες παρεμβολής στα σημεία $x_0,\dots,x_n$: $2n$
- Συνθήκες συνέχειας της s' στους κόμβους $x_1,\dots,x_{n-1}$: $n-1$
- ...... s'' : $n-1$

Απαιτούνται δύο ακόμα συνθήκες

1ο Πρόβλημα παρεμβολής:

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Για $f \in C^1[a,b]$
Αυτό το πρόβλημα παρεμβολής έχει ακριβώς μία λύση.

2^{o} Πρόβλημα Παρεμβολής

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n, \\ s''(x_0) = f''(x_0) \\ s''(x_n) = f''(x_n) \end{cases}$$

Για $f \in C^2[a,b]$ αυτό το πρόβλημα παρεμβολής έχει ακριβώς μία λύση

3^{o} Πρόβλημα Παρεμβολής

$s \in S_3(\Delta)$ τ.ω. $s''(a) = s''(b) = 0$ λέγονται φυσικές κυβικές splines

Ζητείται $s \in S_3(\Delta)$ φυσική κυβική spline τ.ω

$$s(x_i) = f(x_i), \; i=0,\dots,n$$

Το πρόβλημα έχει ακριβώς μία λύση.

Θεώρημα (Εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines)

Έστω Δ ένας διαμερισμός του $[a,b]$, $f \in C^2[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ η λύση του Πρώτου Προβλήματος Παρεμβολής. Θέτουμε:

$$h := \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}),$$

$$M = \frac{h}{\min\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})}$$

Τότε, αν $f \in C^4[a,b]$, τότε ισχύει

$$\| f^{(m)} - s^{(m)} \|_\infty \leq C_m h^{4-m} \| f^{(4)} \|_\infty ,$$
$m = 0, \ldots, 3$

με $C_0, \ldots, C_3$ ανεξ της f.

<u>Παρατήρηση</u>

$$C_0 = \frac{3}{384}, \quad C_1 = \frac{1}{24} \quad \text{βέλτιστες}$$

$$C_3 = \max \left\{ 2, \frac{1}{2} \left(M + \frac{1}{M} \right) \right\}$$

<u>Παρεμβολή με κυβικές splines τύπου Hermite</u>

<u>Ορισμός</u> Έστω $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του διαστήματος $[a,b]$. Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ τ.ω. $s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3$, $i = 0, \ldots, n-1$.

λέγονται <u>κυβικές splines Hermite</u> ως προς τον διαμερισμό Δ.

<u>Θεώρημα</u> (Παρεμβολή με κυβικές splines Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε υπάρχει <u>ακριβώς μία</u> κυβική spline Hermite ως προς Δ τ.ω.

(*) $s(x_i) = f(x_i)$, $s'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 0, \dots, n$
Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$, τότε

$$\| f - s \|_\infty \leq \frac{1}{384} h^4 \| f^{(4)} \|_\infty,$$

με $h := \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

<u>Απόδειξη</u> Έστω $p_i \in \mathbb{P}_3$ τω.

$$\begin{cases} p_i(x_j) = f(x_j) \\ p_i'(x_j) = f'(x_j) \end{cases} \quad j = i, i+1$$

Προφανώς, η $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$s(x) = p_i(x)$, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$i = 0, \dots, n-1$, είναι η μοναδική λύση του (*)

Εκτίμηση σφάλματος: Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε $s(x) = p_i(x)$ και

$\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\exists \xi(x) \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - p_i(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2$$

Άρα, για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,

$$| f(x) - s(x) | = | f(x) - p(x) | =$$

$$= \frac{|f^{(4)}(\xi(x))|}{4!} \Big[\underbrace{(x-x_i)(x_{i+1}-x)}_{\leq \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}} \Big]^2$$

$$\leq \frac{\|f^{(4)}\|_\infty}{24} \frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16}$$

$$\leq \frac{h^4}{24 \cdot 16} \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \underbrace{\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - S(x)|}_{\|f-S\|_\infty} \leq \frac{h^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty$$

<u>Άσκηση 4.4</u> $p \in \mathbb{P}_3$

$p(x_i) = \ln(x_i)$, $x_i = i+1$, $i = 0,1,2,3$

<u>ΝΔΟ</u>: $\varepsilon(x) := \ln(x) - p(x)$,
έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες
$f(x) := \ln(x)$, $x \in [1,4]$

$\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi(x) \in (1,4)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

x_0 x_1 x_2 x_3

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2}$

$f'''(x) = +2x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

Άρα,

$$\ln(x) - p(x) = \underbrace{-\frac{6}{4(\xi(x))^4}}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Επομένως, η $\ln(x) - p(x)$ έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες, τις $1, 2, 3, 4$.

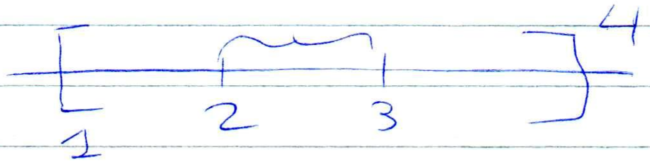
<u>Άσκηση 4.5</u> $p \in \mathbb{P}_3$

$p(i) = e^i$, $i = 1, 2, 3, 4$

ΝΔΟ: $\forall x \in (2,3)$: $e^x > p(x)$

$f(x) := e^x$

Το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $1, 2, 3, 4$.



$\forall x \in [1,4]\ \exists \xi(x) \in (1,4)$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άρα

$\forall x\in(2,3)\ \exists\,\xi(x)\in[1,4]$

$$e^x-p(x)=\underbrace{\underset{+}{\frac{e^{\xi(x)}}{4!}}\underset{+}{(x-1)}\underset{+}{(x-2)}\underset{-}{(x-3)}\underset{-}{(x-4)}}_{>0}$$

$\Rightarrow \forall x\in(2,3)\ \ e^x-p(x)>0$

$\Rightarrow e^x>p(x)$

<u>Άσκηση 4.6</u> $f\in C[a,b]$, $a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$

$p\in\mathbb{P}_n$ $\ p(x_i)=f(x_i),\ i=0,\ldots,n$

ΝΔΟ: Κάθε P πολυώνυμο

τ.ω. $P(x_i)=f(x_i),\ i=0,\ldots,n,$

είναι της μορφής $P:=p+rq$ με q τυχαίο πολυώνυμο και $r(x)=(x-x_0)\ldots(x-x_n)$

$P - p$ πολυώνυμο

$(P-p)(x_i) = P(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - f(x_i)$
$= 0, \ i = 0, \dots, n$

τα $x_0, \dots, x_n$ είναι ρίζες του $P - p$.

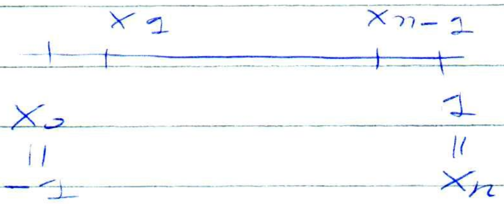
<u>Συμπέρασμα:</u>

$$P(x) - p(x) = \underbrace{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{\substack{\shortparallel \\ r(x)}} \cdot q(x)$$

20/5/14

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i := -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$



(x_i κόμβος $\Rightarrow$ $-x_i$ κόμβος)

$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$
$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ:

f άρτια $\Rightarrow$ p άρτια,
f περιττή $\Rightarrow$ p περιττή

φ άρτια / περιττή, $\varphi(-x) \underset{-}{=} \varphi(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

f άρτια
Θέτουμε $q(x) := p(-x)$ $\forall x \in [-1,1]$

- $q \in \mathbb{P}_n$
- $q(x_i) = p(-x_i) \underset{\substack{\uparrow \\ -x_i \text{ σημείο παρεμβολής}}}{=} f(-x_i) \overset{\substack{f \text{ άρτια} \\ \downarrow}}{=} f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

<u>Συμπέρασμα:</u> $q = p$,

οπότε $p(x) = p(-x) \quad \forall x \in [-1, 1]$

f περιττή

Θέτουμε $q(x) = -p(-x)$

- $q \in \mathbb{P}_n$
- $q(x_i) = -p(-x_i) = -f(-x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow q = p \Rightarrow$

$p(x) = -p(-x) \Leftrightarrow$
$p(-x) = -p(x)$
$\Rightarrow p$ περιττή

<u>Άσκηση 4.16</u>

$f \in C^5[0,1]$, $p \in \mathbb{P}_4$

$$\left.\begin{aligned} p^{(i)}(0) &= f^{(i)}(0) \\ p^{(i)}(1) &= f^{(i)}(1) \end{aligned}\right\} \quad i = 0, 1$$
$$p(1/2) = f(1/2)$$

<u>ΝΔΟ:</u> $\forall x \in [0,1] \ \exists \xi \in (0,1)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)^2$$

Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^4[a,b]$, $p \in \mathbb{P}_3$

$$\begin{cases} p(x_i) = f(x_i), & i=0,1,2, \\ p'(x_1) = f'(x_1) \end{cases}$$

ΝΔΟ:

(*)

$\forall x \in [a,b] \quad \exists \xi \in (a,b)$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$
  Τότε η (*) ισχύει για κάθε $\xi \in (a,b)$

- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

  Θέτουμε $\Phi(t) := (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$
  και
  $$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t),$$
  $t \in [a,b]$

Προφανώς, $\varphi \in C^4[a,b]$
Επίσης
$$\begin{cases} \varphi(x_i) = 0, & i=0,1,2 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (σύμφωνα με το Θ. του Rolle)

η φ' έχει τουλάχιστον τρεις ρίζες ξ_1, ξ_2, ξ_3
(διαφορετικές του x_1)

• Αλλά $\varphi'(x_1) = 0$

Άρα η φ' ~~[illegible]~~ έχει στο $[a, b]$ τουλάχιστον 4 ρίζες

$\Rightarrow$ η φ'' " " (a, b) " 3 ρίζες

⋮

η $\varphi^{(4)}$ " " " " 1 ρίζα, έστω ξ

Τώρα
$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

οπότε

$$0 = f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \Phi(x)$$

Άσκηση 4.16

• $x \in \{0, 1/2, 1\}$ τετριμμένη για κάθε ξ

• $x \in [0, 1]$, $x \notin \{0, 1/2, 1\}$

$$\Phi(t) := t^2 \left(t-\tfrac{1}{2}\right)(t-1)^2$$

$$\varphi(t) := f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t),$$
$$t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi(1/2) = \varphi(1) = 0 \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλάχιστον 4 ρίζες, διαφορετικές των 0, 1

Όμως, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$

<u>Συμπέρασμα</u>

Η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλ. 6 ρίζες
η φ'' " " $(0,1)$ " 5 "
⋮
$\varphi^{(5)}$ 1 ρίζα, έστω ξ

Όμως
$$\varphi^{(5)}(t) = f^{(5)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 5!$$

Άρα
$$0 = f^{(5)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 5!$$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \Phi(x)$$

Άσκηση 4.18

$\Delta: \; a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$m \in \mathbb{N}$

$$\Sigma_m(\Delta) = \left\{ s \in C^m[a,b] : s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \; i = 0, \dots, n-1 \right\}$$

<u>ΝΔΟ</u>: $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s \in \mathbb{P}_m$

Έστω $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$.

Για $x \in [x_{i-1}, x_i]$ έχουμε

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i -)}{j!} (x - x_i)^j$$

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$ έχουμε

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i +)}{j!} (x - x_i)^j$$

Αφού η S είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x_i, ισχύει $S^{(j)}(x_i-) = S^{(j)}(x_i+)$, $j=0,\dots,m$.

Επομένως, η S είναι το ίδιο πολυώνυμο στα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$