

3ο κεφάλαιο

Γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $n \times n$ πίνακας
 $b \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με n συνιστώσες.

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τ.ω $Ax = b$.

Τέτοια γραμμικά συστήματα προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές, συνήθως ως μέρος ενοχότερων προβλημάτων.

Θα μας αναχρητίσαν τα θέματα:

- α) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του x :
- Λόγος (αναγκαίως πράξεις και ανακαίριση μητρώου)
 - Ευστάθιστων μεθόδων.

β) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων.

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων:

- α) Άμεσες: (παραλλαγές της μεθόδου αναίρεσης του Gauss): Όταν οι πράξεις γίνονται ακριβώς δίνουν τη λύση x ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων

β) Επαναληψεις: Δίταν μια ακολουθία $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots$
της \mathbb{R}^n .

Γενικά γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: Συντελεστές $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$
Δεύτερα μέλη: $b_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, \dots, n$.

Ζητούμενα: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ τω

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.$$

Με τον πίνακα

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

και τα διανύσματα $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

γράφουμε το γραμμικό σύστημα στη μορφή:

$$\boxed{Ax = b}$$

Θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικά συστήματα που έχουν ακριβώς μια λύση.

Κάθε μια από τις ακόλουθες συνθήκες είναι παρά και αναγκαία για να έχει το $Ax=b$ ακριβώς μία λύση.

- i) Ο A είναι αναστρέψιμος, δηλαδή υπάρχει ο A^{-1}
- ii) $\det A \neq 0$
- iii) $Ax=0 \Rightarrow x=0$
- iv) Οι γραμμές (ή οι στήλες) του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Τρόποι επίλυσης του $Ax=b$,
γνωστοί από τη Γραμμική Άλγεβρα.

α) Κανόνας του Cramer.

$A = (a^1, a^2, \dots, a^n)$, δηλαδή a^i είναι η i -οστή στήλη του A .

Με $A_i = (a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)$ έχουμε

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i=1, \dots, n$$

ε) Με τον A^{-1} : Υπολογίσαμε τον A^{-1} και έχουμε:

$$\boxed{x = A^{-1} \cdot b}$$

(Όχι $x = \frac{b}{A}$, όχι $x = b \cdot A^{-1}$).

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_n} x = A^{-1}b \\ &\Rightarrow I_n \cdot x = A^{-1}b \\ &\Rightarrow \boxed{x = A^{-1}b} \end{aligned}$$

Οι δύο αυτοί τρόποι έχουν μία θεωρητική σημασία,
όχι πρακτική.

α) Cramer: Πρέπει να υπολογίσουμε $n+1$ ορίζουσες
 $n \times n$ μινάμων.

$n \cdot x$ για την $\det A$, αναιρέθοντας ως προς j ,
έχουμε:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1, n-1}$ που προκύπτει από τον A αν
διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j .
Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, γράφουμε την ορίζουσα
~~του~~ $\det A$ ως άθροισμα $n!$ όρων με n παραγόμενες
ο μαθόντες.

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος απαιτούνται
 $n!(n-1)$ πολλαπλασιασμοί.

Συνολικά για τις $n+1$ ορίζουσες, απαιτούνται

$$\underbrace{(n+1) \cdot [n!(n+1)]}_{(n+1)! \cdot (n-1)}$$

Αυτός ο αριθμός αυξάνει πολύ γρήγορα με το n .
(Υπάρχουν άλλοι τρόποι υπολογισμού ορίζουσών με
λιγότερες πράξεις).

$$b) x = A^{-1} \cdot b$$

Ο A^{-1} απαιτείται σπάνια. Αν τον χρειαζόμαστε, τον υπολογίζουμε ως εξής: Έστω e^1, \dots, e^n η κανονική βάση του \mathbb{R}^n (οι στήλες του I_n),
$$e_j^i = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } j=i \\ 0 & \text{για } j \neq i \end{cases}$$

(το δέλτα του Kronecker ή το σύμβολο του Kronecker)

$$\text{Έστω } u^i \in \mathbb{R}^m. \text{ τ.ω. } Au^i = e^i, \quad i=1, \dots, n.$$

Για τον υπολογισμό των u^1, \dots, u^n απαιτείται η επίλυση n συστημάτων με πίνακα A . Έτσι
$$A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$$

Πράγματι,

$$A(u^1, u^2, \dots, u^n) = (Au^1, Au^2, \dots, Au^n) \\ = (e^1, e^2, \dots, e^n) = I_n.$$

Ο υπολογισμός του x από τη σχέση $x = A^{-1} \cdot b$ απαιτεί την επίλυση n συστημάτων με πίνακα τον A και τον πολλαπλασιασμό $A^{-1} \cdot b$

Δύο μεγάλες κατηγορίες γραμμικών συστημάτων (ή πινάκων)

α) Πυκνοί (ή αποθλακτικοί) πίνακες

Έχουν στοιχεία a_{ij} γενικά μη μηδενικά.

β) Αραιοί (ή σποραδικοί) πίνακες.

Έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία,

τα οποία, αν αξιοποιήσουμε έχουμε υπολογιστικό όφελος.

Μέγεθος πινάκων:

$n < 100$: μικροί πίνακες.

$100 < n < 1000$: μεσαίους (μέτριου μεγέθους)

$n > 1000$: μεγάλοι

Στην πράξη έχουμε συστήματα με μικρούς πίνακες ~~ενώ με~~ αραίους μέχρι μέτριου μεγέθους ενώ με αραίους πίνακες και μεγάλου μεγέθους.

- Οι αμεγες μέθοδοι χρησιμοποιούνται υπίως για μικρούς πίνακες
- Οι επαναληπτικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται υπίως για αραίους πίνακες.

Οι αμεγες μέθοδοι είναι παράγωγες της μεθόδου απαλοιφής του Gauss.

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Έστω $u = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας,
δηλ $u_{ij} = 0$ για $i > j$

Τότε $\det u = u_{11}u_{22} \dots u_{nn}$

Άρα, ο u είναι αντεστρέψιμος αν και μόνο αν
 $u_{ii} \neq 0$ για $i = 1, \dots, n$

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Το γραμμικό σύστημα
 $Ux = y,$

δίδει

$$\begin{cases} U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + \dots + U_{1n}x_n = y_1 \\ U_{22}x_2 + \dots + U_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ U_{n-1,n-1}x_{n-1} + U_{n-1,n}x_n = y_{n-1} \\ U_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Λίνεται εύκολα με ανέσφιξη:

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς x_n , αντικαθιστούμε το x_n στην προτελευταία εξίσωση και βρίσκουμε το x_{n-1} , κλπ και τέλος αντικαθιστούμε τα x_2, \dots, x_n στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε το x_1 .

Αλγόριθμος της ανέσφιξης.

$$x_n = \frac{y_n}{U_{nn}}$$

$$\text{για } k = n-1, n-2, \dots, 1 \\ x_k = \frac{1}{U_{kk}} \left[y_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj} x_j \right]$$

$$\left(\sum_{j \neq k} U_{kj} x_j = y_k \Rightarrow U_{kk} x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^n U_{kj} x_j \right)$$

Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $u \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντεστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας.

$u x = y$

Αλγόριθμος της μεθόδου απαλοιφής.

$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$ για $k = n-1, n-2, \dots, 1$:
 $x_k = \frac{1}{u_{kk}} [y_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj} x_j]$

Απαιτούμενες πράξεις.

- Διαίρεσεις: n
 - Πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις
- $(1+2+\dots+(n-1)) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$

Απαιτούμενη μνήμη: $\frac{n^2}{2} + O(n)$ για τα u_j και τα y_j

Τα x_i αποθηκεύονται στις θέσεις των y_i

Ίδια σαν μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

Με κατάλληλα μετασχηματισμούς γραμμών (δηλ. με ανάστροφη γραμμή δύο εφαιρέσεων) ή πρόσθεση κατά μέλη ενός πολλαπλασιασμού μιας εφαιρέσης σε μια άλλη) μετατρέπουμε ένα σύστημα $Ax = b$ σε ένα ισοδύναμο $u x = y$ με άνω τριγωνικό πίνακα u . Η διαδικασία αυτή λέγεται τριγωνοποίηση και μετά λύουμε

παράμενε το ίδιο

το $Ux = y$ με ομοδοδάρτηση
Δύο στάδια: τριγωνοποίηση και ομοδοδάρτηση.

Γενική περιγραφή:

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος
 θέτουμε $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$, $b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = b$

και γράφουμε το $Ax = b$ στη μορφή

$$\boxed{A^{(1)}x = b^{(1)}}$$

Τριγωνοποίηση:

1^ο Βήμα: Υποθέτουμε $a_{ii}^{(1)} \neq 0$ (μπορεί να επιτευχθεί με εναλλαγές εξισώσεων)

Πολλαπλασιαστές: $\cdot m_{i1} := \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $i=2, \dots, n$

Πολλαπλαιάσαμε στη πρώτη εξίσωση
 επί m_{i1} , την αφαιρούμε από την i -οστή εξίσωση
 και αντικαθιστούμε την i -οστή εξίσωση με
 το αποτέλεσμα, για $i=2, \dots, n$.

Έτσι, μετά το πρώτο βήμα παίρνουμε το
 σύστημα:

$$A^{(2)}x = b^{(2)} \text{ με}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \text{ και } b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

και $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$, $i, j = 2, \dots, n$.
 $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} \cdot b_1^{(1)}$, $i = 2, \dots, n$.

Βήμα r : $1 \leq r \leq n-1$.

Ξεκινάμε από το σύστημα $A^{(r)}x = b^{(r)}$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(r)} & a_{12}^{(r)} & \dots & a_{1n}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r-1,1}^{(r)} & a_{r-1,2}^{(r)} & \dots & a_{r-1,n}^{(r)} \\ 0 & \dots & a_{rr}^{(r)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}^{(r)} & a_{n,2}^{(r)} & \dots & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix} \quad \text{υποπίνακας } \tilde{A}^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{rr}^{(r)} & \dots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nr}^{(r)} & \dots & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix}$$

και $b^{(r)} = \begin{pmatrix} b_1^{(r)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r)} \\ b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(r)} \end{pmatrix}$

Θεωρούμε τον υποπίνακα $\tilde{A}^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})$ $i, j = r, \dots, n$.

Έτσι $\det A^{(r)} = a_{11}^{(r)} \dots a_{r-1,r-1}^{(r)} \det \tilde{A}^{(r)}$
 $\neq 0$

Έπειτα $\det \tilde{A}^{(r)} \neq 0$ δηλ $\tilde{A}^{(r)}$ είναι αντιστρέψιμος

Υπόθεση: $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ (μπορεί να ελεγχθεί)

Πολλαπλασιαστές: $m_{ir} = \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}$, $i = r+1, \dots, n$.

Πολλαπλασιάζουμε την r -οση εξίσωση επί m_{ir} , την αφαιρούμε από την i -οση και αντικαθιστούμε την i -οση με το αποτέλεσμα, για $i = r+1, \dots, n$.

Παίρνουμε το σύστημα $A^{(r+1)}x = b^{(r+1)}$ με τις πρώτες r γραμμές του $A^{(r+1)}$ και τις πρώτες r αντιστοιχίες του $b^{(r+1)}$ ίδιες με των $A^{(r)}$ και $b^{(r)}$ αντίστοιχα, και:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - m_{ir} \cdot a_{rj}^{(r)}, & i, j = r+1, \dots, n \\ b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir} \cdot b_r^{(r)}, & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

και τα στοιχεία $a_{ij}^{(r+1)} = 0$ για $i = r+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$.

Μετά από $n-1$ βήματα προκύπτει το σύστημα $A^{(n)}x = b^{(n)}$ με άνω τριγωνικό πίνακα $A^{(n)}$. Εδώ τελειώνει η τριγωνοποίηση. Πίνακας $A^{(n)}x = b^{(n)}$ με ορθοφόρηση.

Απαιτούμενες πράξεις
και μνήμη:

Το πλήθος των προθαφαιρέσεων είναι περίπου ίδιο με
το πλήθος των πολλαπλασιασμών.

Έχει επιμεραστεί να μετράμε ως αριθμητικές πράξεις
μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαφάσεις.

Επιχωροποίηση:

1^ο βήμα: Για τον υπολογισμό των πολλαπλασιασμών
μια, $i=2, \dots, n$ απαιτούνται $n-1$ πράξεις.
Για τον υπολογισμό των $a_{ij}^{(2)}$, $i, j=2, \dots, n$
απαιτούνται $(n-1)^2$ πράξεις.

2^ο βήμα: Πολλαπλασιαστές: $n-r$
Στοιχεία του A : $(n-r)^2$

Για τον A (και τους πολλαπλασιαστές) απαιτούνται
αριθμικά, στα $n-1$ βήματα,

$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-1)^2 + (n-i)] = \frac{n^3 - n}{3} \text{ πράξεις.}$$

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Για το διάνυσμα b απαιτούνται $n-i$ πράξεις
στο βήμα i , οπότε αριθμικά

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ πράξεις}$$

Για την ομβροδράμηση: $\frac{n^2+n}{2}$ πράξεις.

Συνολικό κόστος:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + n}{3} \text{ πράξεις} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

Παράδειγμα: $n=20$

Έστω ότι ο υπολογιστής εκτελεί 10^6 πράξεις / sec.
Με τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss απαιτούνται:

Κανόνας Cramer: Για τους $21! \cdot 19$ πολλαπλασιασμούς
απαιτούνται $\approx 3 \cdot 10^5$ αιώνες.

Απαιτούμενη μνήμη:

Για τον A: n^2 θέσεις μνήμης.

Για το b: n θέσεις μνήμης.

Δεν απαιτείται επιπλέον μνήμη.

Οι πολλαπλασιαστές m_{ir} , για $i=r+1, \dots, n$, αποθηκεύονται στις θέσεις των εσθίων αιρ, για $i=r+1, \dots, n$. Οι πολλαπλασιαστές αποθηκεύονται δηλαδή στις θέσεις, ζεύγη, (i, j) , $i > j$ του πίνακα A.

Τα νέα στοιχεία υπολογίζονται από τους εινους

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ir} \cdot a_{rj}, \quad i, j = r+1, \dots, n.$$

(Τα m_{ir} παίρνουν τα στοιχεία των αντίστοιχων αιρ)

Παρατηρήσεις: (Υπολογισμός επιζεύξης)

$$\det A = (-1)^m \det A^{(m)} \\ = (-1)^m \cdot (a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n)})$$

με m το πλήθος των εναλλαγών γραμμών στη φηγνολομένη.

Αναγκαίως πράξεις: $\frac{n^3}{3} + O(n)$ πράξεις.

Κόστος της μεθόδου του Gramer
για την επίλυση nxn γραμμικού
συστήματος:

$$(n+1) \left(\frac{n^3}{3} + O(n) \right) = \frac{n^4}{3} + O(n)$$

Ανεμφανής η μέθοδος σε σύγκριση
με τη μέθοδο αναίρεσης του Cramer.

Οδηγίες:

Τα στοιχεία $a_{ii}^{(i)}$ λέγονται οδηγία.

Παράδειγμα:

$$\begin{cases} 10^4 x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Ακριβής λύση } x_1 = 1,0001\dots \\ x_2 = 0,9998\dots \end{cases}$$

$$b = 10, \quad t = 3, \quad u = 20, \quad L = -20$$

επιρροή.

Προεπιλεγμένη λύση: $\begin{cases} \tilde{x}_1 = 0 \\ \tilde{x}_2 = 1 \end{cases}$ κορτί καινού προεπιλεγμένη!

Εξήγηση: $m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 10^4$

$$\begin{aligned} a_{22}^{(2)} &= fl(a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)}) \\ &= fl(1 - 10^4) = fl(-9999) \\ &= -10^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2^{(2)} &= fl(b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)}) = fl(2 - 10^4) = fl(-9998) \\ &= -10^4 \end{aligned}$$

Εξαιτίας της πληροφάνειας από την τελευταία επίλυση

$$10^{-4}x_1 + x_2 = 2$$

$$-10^4 x_2 = -10^4 \Rightarrow \tilde{x}_2 = 1 \quad \text{και} \quad \tilde{x}_1 = 0$$

Άσκηση 31

31-03-17

$U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωντικοί

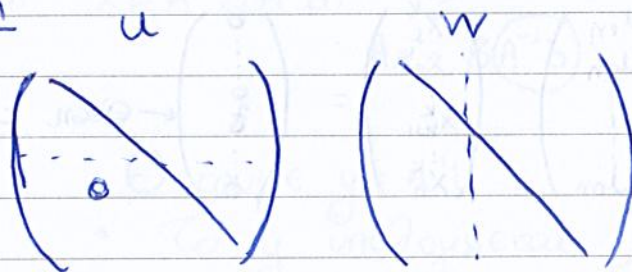
$\Rightarrow U \cdot W$ άνω τριγωντικός

$U \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωντικός και αντιστρέψιμος.

$\Rightarrow U^{-1}$ άνω τριγωντικός.

(αναλόγια για κάτω τριγωντικούς).

Απόδειξη



$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^n U_{ik} W_{kj} =$$

$$= \sum_{k=i}^n U_{ik} W_{kj} = U_{ii} W_{ij} + U_{i,i+1} W_{i+1,j} + \dots + U_{in} W_{nj}$$

$$U_{ii} = U_{i,i+1} = \dots = U_{i,i-1} = 0$$

Για $i > j$ έχουμε:

$$W_{ij} = W_{i+1,j} = \dots = W_{nj} = 0,$$

Επομένως,

$(UW)_{ij} = 0$ για $i > j$, δηλαδή
ο UW είναι άνω τριγωντικός.

$$U x^{(k)} = e^k$$

Με e^1, \dots, e^n την κανονική βάση του \mathbb{R}^n

Τότε

$$U^{-1} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$$

Ο U^{-1} είναι άνω τριγωνικός αν και μόνο αν,
για $\forall \theta \in \mathbb{K} \in \{1, \dots, n-1\}$ ισχύει:

$$x_{\theta+1}^k = \dots = x_n^k = 0$$

$$\text{Τώρα } U x^k = e^k \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Θέση } k.$$

Λίναμε αυτό το σύστημα με ανεξοδότηση
Πρωίτζει:

$$0 = x_n^k = x_{n-1}^k = \dots = x_{k+1}^k$$

Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A αντιστρέψιμος
 $b \in \mathbb{R}^n$

Ζητάμε: $A^{-1} b$

$A^{-1} B A^{-1} b$

$$x = A^{-1} b \Leftrightarrow$$

$$A^3 x = b \Leftrightarrow A(A^2 x) = b$$

Λίναμε τα συστήματα

$$A y = b$$

$$(A^2 x = y)$$

$$A(A^2 x) = y$$

Απόδειξη

$$A \cdot B = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$$

$$\boxed{\text{Για } i \leq j \text{ } (A_i - I_n) (A_j - I_n) = 0}$$

$$(A_i - I_n) (A_j - I_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \circ & a_{ii} & \dots \\ \circ & a_{ji} & \dots \\ \circ & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \dots & \circ \\ \circ & a_{jj} & \dots \\ \circ & a_{ij} & \dots \\ \circ & \dots & \dots \end{pmatrix} = 0$$

Αρα;

$$A_i A_i^{-1} = A_i + A_i^{-1} + I_n + \underbrace{(A_i - I_n)(A_i^{-1} - I_n)}_0 =$$

$$= \underbrace{A_i + A_i^{-1}}_{2I_n} - I_n = I_n$$

$$A_i A_j = A_i + A_j - I_n \quad \checkmark$$

Παράδειγμα

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} 10^{-4} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1,0001 \dots \\ x_2 = 0,9999 \dots \end{cases}$$

$$b = 10, \quad t = 3, \quad L = -20, \quad U = 20 \quad \text{εξαρτημένων.}$$

Προσεγγιστική λύση: $\tilde{x}_1 = 0$ } πολύ καλή!
 $\tilde{x}_2 = 1$ }

Εξήγηση: Λόγω του πολύ μικρού (σε απόλυτη τιμή) οδηγού 10^{-4} προκύπτει μεγάλος πολλαπλασιαστής πλ. και αυτό οδηγεί σε άβιμο αποτέλεσμα.

Εναλλαγή γραμμών:

$$\begin{cases} \oplus x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Στον "υπολογισμό μας" πάρναμε στη προσεγγιστική λύση $\tilde{x}_1 = 1$ } πολύ καλή!
 $\tilde{x}_2 = 1$ }

Μερική οδηγία (ή οδηγίες κατά γραμμές)

Στο βήμα r της τριγωνοποίησης εξετάζουμε τα στοιχεία $a_{kr}^{(r)}$, $k = r, r+1, \dots, n$ της r -ετης υποστήλης του $A^{(r)}$, βρίσκουμε ένα με μέγιστη απόλυτη τιμή, και με εναλλαγές γραμμών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού.

Επί πλέον κόστος: $\frac{n^2}{2} - n$ πράξεις.

Παρατήρηση: Ο όρος "πολύ μικρός οδηγός" είναι μάλλον ασαφής

π.χ. το \otimes γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 10^4 x_2 = 10^4 \\ 1 \cdot x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Ο υπολογιστής μας δίνει $\tilde{x}_1 = 0$, ενώ με εναλλαγή
 $\tilde{x}_2 = 0$

γραμμών δίνει $\tilde{x}_1 = 1$
 $\tilde{x}_2 = 1$

Ο πραγματικός λόγος της ασταθίας στη πρώτη περίπτωση είναι το μέγεθος της ανόργανης τιμής του $|a_{11}|$ σε σύγκριση με το $|a_{12}|$. Πραγματικά έχουμε

με εναλλαγή γραμμών είναι $|a_{11}| = 10^{-4}$, ενώ
 $|a_{22}| = 1$

Ολική οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές και στήλες)

Στο βήμα i της τριγωνοποίησης με εναλλαγές γραμμών και στηλών φέρνουμε στη θέση του οδηγού $a_{ii}^{(i)}$ ένα από τα στοιχεία του υποπινάκω a_{kk} , $k, l = i, \dots, n$ με τη μέγιστη απόλυτη τιμή.

(Προσοχή: Εναλλαγή των στηλών r και s αντιστοιχεί στην μεταστροφή των αντίστοιχων αγνώστων x_r σε x_s και x_s σε x_r)

Επιπλέον κόστος: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$

(Ουσιαστικά διπλασιάζεται το κόστος!)

- Η μέθοδος ανολοφής του Gauss χωρίς οδήγηση θεωρείται ασταθής αριθμητικά. Για υγιεινές υασιότητες εφαρμογών, π.χ. όταν ο A είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0, x^T A x > 0$, είναι ευσταθής και μόνον σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται

- Η μέθοδος της ολικής οδήγησης θεωρείται ευχάριστη αλγόριθμος. Εστ πράξη. Χρησιμοποιείται σπάνια γιατί διπλασιάζει το κόστος.
- Η μέθοδος της μερικής οδήγησης. Η πιθανότητα να είναι αεχάριστη είναι πολύ μικρή. Χρησιμοποιείται πολύ σπάνια γιατί επιπλέον αυξάνει λίγο το συνολικό κόστος.

○ αλγόριθμος της αναίλιφης Εστ πράξη:

Ο αλγόριθμος αναίλιφης του Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων $Ax = b$ γραφεται Εστ πράξη σε δύο στάδια:

- στο πρώτο στάδιο εκτελούνται οι υπολογισμοί της τριγωνοποίησης που αφορούν μόνο τον πίνακα A.
- στο δεύτερο χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα του πρώτου και το b και υπολογίζεται η λύση x .

Γνωστό ζεύγος: DECOMP
SOLVE.

DECOMP: Υλοποιεί το πρώτο στάδιο. Έχει ως είσοδο τα στοιχεία του A που αποθηκεύονται σε n^2 θέσεις μνήμης. Εκτελεί αναίλιφη Gauss με μερική οδήγηση. Το τελικό προϊόν ^{του A} αποθηκεύεται στο ίδιο "φίχνο" του αρχικού πίνακα, ενώ στις θέσεις (i, j) με $i > j$ αποθηκεύονται οι πολλαπλασιαστές m_{ij} . Καταγράφονται επίσης εναλλαγές γραμμών (σε ένα διάνυσμα με n αντιστοιχίες).

Κόστος: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις
 $n^2 + O(n)$ θέσεις μνήμης.

SOLVE: Χρησιμοποιεί ως είσοδο τα αποτελέσματα της DECOMP και το b , εκτελεί τις πράξεις που αφορούν το b και με ολοθρόσφιση υπολογίζει το x . Το x αποθηκεύεται στη θέση του b .

Κόστος: $n^2 + O(n)$ πράξεις
 n θέσεις μνήμης.

4-04-17.

Ο αλγόριθμος αναλοφής του Gauss στη πράξη.

Εφαρμογή: Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε m γραμμικά συστήματα με τον ίδιο πίνακα A και δεξιά μέλη b, b', b'', \dots .
Καταίμε μία φορά στη DECOMP (που κάνει τις πράξεις της τριγωνοποίησης που αφορούν τον A), και m φορές τη SOLVE, μία για κάθε δεξίο μέλος b, b', \dots .

Συνολικό κόστος: $\frac{n^3}{3} + O(n^2) + m(n^2 + O(n))$ πράξεις

Παράδειγμα: Υπολογισμός του A^{-1} .

Πίνακας τα n γραμμικά ευσταθιστά:

$$A u^i = e^i, \quad i=1, \dots, n$$

με e^1, \dots, e^n την κανονική βάση του \mathbb{R}^n .

Τότε έχουμε $A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$.

Συνολικό κόστος: $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2) + n \left(\frac{2}{3}n^2 + O(n) \right)$

$$= n^3 + O(n^2) \text{ πράξεις.}$$

Μνήμη: $2n^2 + O(n)$

Η αναλυση LU:

Η φάση της τριγωνοποίησης ενός πίνακα αντιστρέψιμου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ κατά την απαλοιφή του Gauss, μπορεί να εκφραστεί σε γλώσσα πινάκων ως αναλυση του A σε γινόμενο,

$$A = P^T L U, \text{ με πίνακες } P, L, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

οι οποίοι έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Ο P είναι πίνακας μετάρθεσης

Καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών που έγιναν κατά την απαλοιφή.

(Ένας πίνακας μετάρθεσης προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_n με εναλλαγές γραμμών. Αποθνήσκονται σε ένα διάνυσμα με n συνιστώσες.)

- Ο L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας, με μονάδες στη διαγώνιο και κάτω από τη διαγώνιο περιέχει τους πολλαπλασιαστές m_{ij} (τα διαγώνια στοιχεία δεν αποθηκεύονται.)
- Ο U είναι άνω τριγωνικός, και είναι το τελικό προϊόν $A^{(n)}$ της τριγωνοποίησης.

Αυτός είναι απλώς ένας άλλος τρόπος για να δείχουμε το στάδιο της τριγωνοποίησης του πίνακα A . Για την ανάλυση απαιτούνται απλώς οι ίδιες πράξεις με την τριγωνοποίηση.

Η ανάλυση θα την αποδείξουμε σε λίγο. Πώς την χρησιμοποιούμε για να λύσουμε το $Ax = b$

$$Ax = b \quad \begin{array}{l} \text{P ανεξάρτητος} \\ \Leftrightarrow PAx = Pb \\ \Leftrightarrow \boxed{LUx} = Pb \end{array}$$

α) Αναλύουμε τον PA σε γινόμενο LU . β) υπολογισμός του x :

β) Κατασκευάζουμε το διάνυσμα Pb (με εναλλαγή αντιστοιχιών του b), και επιλύουμε το σύστημα $Ly = Pb$

Ο L είναι κάτω τριγωνικός και η επίλυση του $Ly = Pb$ μπορεί να γίνει με τρόπο εντελώς αντίστροφο της αμεσοδρόμησης.

Από την πρώτη εξίσωση υπολογίζουμε το y_1 , το αντικαθιστούμε και υπολογίζουμε το y_2 κ.λπ.

β2) Λύουμε το $Ux = y$ με αμεσοδρόμηση.

Η φάση Θ αντιστοιχεί στην SOLVE ενώ η α) στην DECOMP.

Απόδειξη της αναγωγής $A = P^{-1}LU$

1^η περίπτωση: υποθέτουμε ότι κατά την απολοϊφή δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών. (δίν) $P = I_n$

Ορίζουμε τον πίνακα M_1 ,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ -m_{21} & \ddots & & & & \\ -m_{31} & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ -m_{n1} & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ και έχουμε ότι ο } A^{(2)} = M_1 A.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$* A^{(n)} = M_{n-1} \dots M_2 M_1 A.$$

με $M_r \in \mathbb{R}^{n,n}$, $r=1, 2, \dots, n-1$ που δίνονται ως εξής:

$$(m_r)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ -m_{ir} & \text{για } i=r+1, \dots, n \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Δηλαδή ο M_r είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, με μονάδες στην διαγώνιο ~~και~~, με στοιχεία $-m_{ir}$, $i=r+1, \dots, n$, στην υποστητή r κάτω από τη διαγώνιο και παντού αλλού μηδέν.

Οι M_r είναι αναστρέψιμοι, $\det = 1$, και

$$(M_r^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i=j \\ +m_{ir} & \text{για } i=r+1, \dots, n \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (\text{Άσκηση 3.6})$$

Άρα από την * παίρνουμε

$$A = \underbrace{(M_1^{-1} \dots M_{n-2}^{-1} M_{n-1}^{-1})}_{\text{Άσκηση 3.6}} \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ +m_{21} & \ddots & & & & \\ +m_{31} & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ +m_{n1} & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } A = L \underbrace{(A^{(n)})}_U$$

2^η περίπτωση: Κατά την αναίρεση Gauss επιτρέπονται
και εναλλαγές γραμμών (είτε για να βρουν
οδηγούς $a_{ii} \neq 0$ είτε για μερική οδηγία).

Η γραμμή του πίνακα A την οποία στο βήμα
 i φέρναμε στη θέση του οδηγού (δηλαδή την
εναλλάσσουμε με την i -στή γραμμή) ώστε αλλάξει
πλέον θέση ώστε τα στοιχεία της αθροίζονται
κατά τη διάρκεια της αναίρεσης. Επομένως,
υπάρχει μια μετάθεση των γραμμών του πίνακα
 A που αν την κάνουμε πριν από το πρώτο βήμα
της αναίρεσης, θα οδηγούσε σε έναν πίνακα A' ,
η τριγωνοποίηση του οποίου θα μπορούσε να
γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Αρα, σύμφωνα με την πρώτη (1^η) περίπτωση

$A' = LU$ με L, U πίνακες με τις ελεύθερες
ιδιοσότητες.

Θα δούμε τώρα ότι ο A' προκύπτει από τον A με πολλαπλασιασμό
από τα αριστερά με έναν πίνακα μετάθεσης P .

(Τότε $A' = PA$, οπότε $PA = LU$, $A = P^{-1}LU$)

Έστω μια μετάθεση:

$$P = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \quad \text{μια μετάθεση των αριθμών}$$

$1, \dots, n$. Ο αντίστροφος πίνακας μετάθεσης P προκύπτει
από τον I_n , αν μεταθέσουμε τις γραμμές του και η
 i_k γραμμή του P είναι η i_k γραμμή του I_n

π.χ

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

μεταθέσει

αντίστροφος πίνακας μεταθέσει.

Η 3^η γραμμή του P είναι η πρώτη γραμμή του I₃
1^η " " " " " 2^η " "
2^η " " " " " 3^η " "

Τώρα, το γινόμενο PA προκύπτει από τον A με τις ίδιες αριθμικές εναλλαγές γραμμών που από τον I_n οδηγούν στον P. Έτσι προηγούμενο παράδειγμα.

$$PA = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Συμπέρασμα: Στον πίνακα A' στην δεύτερη περίπτωση οδηγούμαστε πολλαπλασιάζοντας τον A από αριστερά με έναν κατάλληλο πίνακα μεταθέσει P.

Παραδείγματα:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$P = I_2$$

Αναίτητη Gauss $m_{21} = \frac{1}{2}$

Εναλλακτική
 $LU = \dots = A$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Αναλοισή Γαυς:

$$m_{21} = \frac{1}{2}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$m_{31} = 1$$

Ο $a_{22}^{(2)}$ είναι μηδέν \Rightarrow ο A δεν αναλύεται
σε γινόμενο L.U χωρίς εναλλαγές
γραμμών.

$$\text{Με } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ έχουμε } PA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \textcircled{B}$$

Αναλοισή Γαυς: $m_{21} = 1$

$$m_{31} = \frac{1}{2}$$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε ότι $B = PA = LU \Rightarrow A = P^{-1}LU$.
(εναρμόθρον $PA = LU$)

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

41-40-2

β) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} .913 & .659 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}$$

Θεωρείτε το σύστημα

$$Ax = \begin{pmatrix} .254 \\ .217 \end{pmatrix} \quad \text{Λύση} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Λύνουμε το σύστημα με απαλοιφή Gauss (που συμπίπτει τόσο με την απαλοιφή Gauss με κερμική οδηγία όσο και με θυσία) σε έναν υπολογιστή με βάση το 10 ($\epsilon=10$), $t=3$, αναομα και παίρνουμε ως λύση τη προέξηση

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} -0.443 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{πολύ} \\ \text{κακή!} \end{array}$$

Τι συμβαίνει;

Το σύστημα

$$Ay = \begin{pmatrix} .253 \\ .218 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{(μεταβολή τάξης } 10^{-3})$$

έχει τη λύση $y = \begin{pmatrix} 1223 \\ -1694 \end{pmatrix}$

Άρα το σύστημα έχει κακή κατάσταση.

Η $\det A = -10^{-6}$ έχει πολύ μικρή απόλυτη τιμή.

Θα δούμε αργότερα ότι η κατάσταση ενός συστήματος δεν έχει καμία σχέση με την απόσταση του πίνακα αντιστροφών.

6-04-17

Νόρμες Διασυστημάτων και Νιρώνων

Για να μετρήσουμε στη κατάσταση γραμμικών συστημάτων πρέπει να μπορούμε να μετράμε αποστάσεις μεταξύ διασυστημάτων και μεταξύ νιρώνων. Ένα βολικό μέτρο για αυτόν τον σκοπό είναι οι νόρμες. Η νόρμα αποτελεί γενίκευση της έννοιας της απόλυτης τιμής.

Νόρμες Διασυστημάτων.

Ορισμός (Νόρμα): Έστω X ένας γραμμικός χώρος στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} , και $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, αντίστοιχα. Μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|,$$

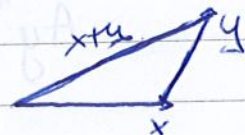
λέγεται νόρμα (εστιασμένη, norm), αν ισχύουν:

$$(N_1) \quad \forall x \in X \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N_2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall x \in X \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

$$(N_3) \quad \forall x, y \in X \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(τριγωνική ανισότητα)



Παρατηρήσεις

$$i) \quad \forall x \in X \quad \|x\| \geq 0$$

$$0 = \overset{(N_1)}{\|x-x\|} = \|x + (-x)\|$$

$$\overset{(N_3)}{\leq} \|x\| + \underbrace{\|(-x)\|}_{\overset{(N_2)}{= \|x\|}} = 2\|x\|$$

ii) Τριγωνική ανισότητα προς τα υόρις:

$$\underline{\forall x, y \in X \quad \|x-y\| \geq |\|x\| - \|y\||}$$

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \stackrel{(N_3)}{\leq} \|x-y\| + \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

Αντίστροφα αντιστοιχεί, $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$
οπότε ενοποιώντας $\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.

Παραδείγματα:

1. $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| := |x|$, για $x \in \mathbb{R}$
 $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ με $\|z\| := |z|$, για $z \in \mathbb{C}$

2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ με $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, όπου $x = (x_1, \dots, x_n)^T$
(l_1 -νορμα)

Πράγματα,

$$(N_1) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 0 \\ \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i=1, \dots, n \\ \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N_2) \quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^n |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^n (|\lambda|) |x_i|$$

$$= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) = |\lambda| \cdot \|x\|_1$$

$$(N_3) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \\ \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$$= \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ με $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (∞-νόρμα ή νόρμα μεγίστου)

Η απόδειξη είναι εύκολη

4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ με $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (l_2 -νόρμα ή Ευκλείδεια νόρμα)

Οι (N_1) και (N_2) αποδεικνύονται πολύ εύκολα.

Θεωρούμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^n ,
 $(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, x, y \in \mathbb{R}^n$

Παρατήρηση: $\|x\| = \sqrt{(x, x)_2}$

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |(x, y)_2| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

Απόδειξη:

• Για $y=0$ τετριμμένη

• Έστω $y \neq 0$. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

έχουμε:

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y)_2 = (x, x)_2 + 2\lambda(x, y)_2 + \lambda^2(y, y)_2$$

$$= \|x\|_2^2 + 2(x, y)_2 \cdot \lambda + \underbrace{\|y\|_2^2}_{\neq 0} \cdot \lambda^2$$

Ήσαστε και αναγκαία συνθήκη.

$$\Delta \leq 0$$

$$\Delta = (2(x, y)_2)^2 - 4 \cdot \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

Άρα

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(x, y)_2^2 \leq 4\|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

$$\Leftrightarrow (x, y)_2^2 \leq \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

Τριγωνική ανισότητα:

$$\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y)_2 = \|x\|_2^2 + 2(x,y)_2 + \|y\|_2^2$$

$$\stackrel{C-S}{\leq} \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

5. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$ με $p=1, 2, \infty$

Για $z \in \mathbb{C}^n$ οι $\|z\|_p$ ορίζονται όπως προηγουμένως.

Η $\|\cdot\|_2$ παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_2$

$$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i \quad \text{με } \bar{y}_i \text{ τον συζυγή του } y_i.$$

6. $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ με $\|f\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$
νόρμα μεγίστου.

Πράγματα:

$$(M_1) \quad f \in C[a, b] \quad \|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow$$

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Leftrightarrow f = 0$$

$$(N_2) \quad \lambda \in \mathbb{R}, f \in C[a, b]$$

$$\|\lambda \cdot f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |\lambda \cdot f(x)|$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} (|\lambda| \cdot |f(x)|)$$

$$= |\lambda| \cdot |f(\tilde{x})| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

με κατάλληλο $\tilde{x} \in [a, b]$

(N3) $f, \phi \in C[a, b]$

$$\|f + \phi\|_{\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + \phi(x)|$$

$$= \max |f(x) + \phi(x)| \\ \leq |f(x)| + |\phi(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|\phi\|_{\infty}$$

Ορισμός: (Ισοδυναμίες νόρμες) Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ λέγονται ισοδύναμες (ή επιπίπτουσες) αν υπάρχουν θετικές σταθερές m και M τ.ω

$$\forall x \in X \quad m \|x\| \leq \|x\|' \leq M \|x\|.$$

(ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{M} \|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m} \|x\|')$$

3.1 Πρόταση (Ισοδυναμία νόρμων στον \mathbb{R}^n)

Όλες οι νόρμες στον \mathbb{R}^n είναι ισοδύναμες μεταξύ τους.

Ορισμός (Σύγκλιση ακολουθίας)

Λέμε ότι μια ακολουθία $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$

συγκλίνει ως προς μια συγκεκριμένη νόρμα $\|\cdot\|$

$$a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow$$

προς X , αν υπάρχει $x \in X$ (το όριο της

ακολουθίας ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$) τ.ω

$$\|x^{(n)} - x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

Γράφουμε $x^{(n)} \rightarrow x$, για $n \rightarrow \infty$
 ή $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$ (ως προς τη νόρμα 1.11).

Ός επακόλουθο της Πρότασης 3.1, μια ακολουθία $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ συγκλίνει (ως προς οποιαδήποτε νόρμα του \mathbb{R}^n), αν συγκλίνει ως προς τη νόρμα 1.11, δηλαδή:

$$x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow \infty \Leftrightarrow x_i^{(m)} \rightarrow x_i, m \rightarrow \infty$$

$i = 1, \dots, n.$

Ορισμός (Πλήρης χώρος)

Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy του X (ως προς τη συγκεκριμένη νόρμα 1.11) συγκλίνει (σε αυτή τη νόρμα 1.11), δηλαδή αν για $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ισχύει:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon \right) \Rightarrow \exists x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N |x_n - x_m| < \varepsilon \right)$$

ακολουθία Cauchy

$$x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N |x_n - x| < \varepsilon$$

Θεώρημα (Πληρότητα του \mathbb{R}^n).

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n . Τότε ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης.

Νόρμες πινάκων.

Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα πινάκων, αν ικανοποιεί τις (N_1) , (N_2) , (N_3)

και

$$(N_4) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Θα ασχοληθούμε με μια ειδική κατηγορία νόρμων πινάκων, τις φυσικές νόρμες πινάκων.

Ορισμός (Φυσική νόρμα πινάκων).

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n . Η απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \text{λέγεται}$$

φυσική νόρμα πινάκων ή νόρμα παραγόμενη από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του \mathbb{R}^n .

Σημαντική ιδιότητα:

$$\circledast \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

• Για $x=0$, η \circledast είναι προφανής.

• Για $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \Leftrightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Άσκησης.Άσκηση 3.7 $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αναστρέψιμοςΈστω $A = L \cdot U$.ΝΔΟ: Η ανάλυση είναι μοναδική.Απόδειξη:

$$A = LU = \tilde{L} \cdot \tilde{U} \Rightarrow$$

$$\tilde{L}^{-1} \underbrace{L}_{I_n} \underbrace{U^{-1}}_{I_n} = \tilde{L}^{-1} \tilde{L} \tilde{U} U^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{L}^{-1} L = \tilde{U} \cdot U^{-1}}$$

Σύμφωνα με την Άσκηση 3.1, στο αριστερό μέλος έχουμε έναν κάτω τριγωνικό πίνακα ενώ στο δεξιό έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Επομένως, ο πίνακας είναι διαγώνιος, οπότε

$$\tilde{L}^{-1} \cdot L = \tilde{U} \cdot U^{-1} = D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$$

Ισορροπία: $D = I_n$

Πράγματι, έχουμε

$$\tilde{L}^{-1} \cdot L = D \Rightarrow L = \tilde{L} \cdot D$$

οπότε

$$L_{ii} = \tilde{L}_{ii} d_{ii}, \quad i=1, \dots, n$$

αλλά $L_{ii} = \tilde{L}_{ii} = 1$ οπότε

$$d_{ii} = 1, \quad i=1, \dots, n.$$

Άρα

$$\tilde{L}^{-1} \cdot L = I_n \rightsquigarrow L = \tilde{L}$$

$$\tilde{U} \cdot U^{-1} = I_n \rightsquigarrow \tilde{U} = U$$

Άσκηση 3.10.

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$$

$$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

κρίτες υποκρίτους του A .

Υπόθεση: $\delta_i \neq 0, i=1, \dots, n-1$

ΝΑΟ $A=LU$.

Απόδειξη

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής γίνεται χωρίς πρόβλημα, γιατί το $a_{11} \neq 0$. Έστω, επαγωγικά, $i-1$ βήματα της απαλοιφής ($i < n$) γίνονται χωρίς πρόβλημα

τότε, έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1i}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2i}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \dots & a_{ii}^{(i)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \delta_i \neq 0 \\ \Rightarrow a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{ii}^{(i)} & = \delta_i \neq 0 \\ \Rightarrow a_{ii}^{(i)} & \neq 0 \end{aligned}$$

Άρα και το βήμα i της απαλοιφής γίνεται χωρίς πρόβλημα.

Άσκηση 3.11

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά υπερακτική διαγώνια.

δηλ

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n$$

a) A αναστρέψιμος:

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\Rightarrow (Ax)_i = 0, \quad i=1, \dots, n \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i=1, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j, \quad i=1, \dots, n.$$

$$\Rightarrow |a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j|, \quad i=1, \dots, n$$

Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω $\|x\|_\infty = |x_k|$

Τότε η προηγούμενη ανισότητα με $i=k$

δίνει:

$$|a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j| \stackrel{\leq |x_k|}{\leq |x_k|}$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| |x_k| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) |x_k|$$

Για $x_k \neq 0$ παίρνουμε:

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|, \quad \underline{\text{Άτονο.}}$$

6) $A = L \cdot U$

Θεωρούμε τον πίνακα A_i ,

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ii} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, n-1$$

Οι A_i έχουν αυστηρά υπεραρχική διαγώνια, οπότε σύμφωνα με το 4ο ερώτημα είναι αντιστρέψιμοι. Επομένως για τα $\delta_i = \det A_i, i=1, \dots, n-1$ ισχύει $\delta_i \neq 0, i=1, \dots, n$.

Σύμφωνα με την προηγούμενη Άσκηση ο πίνακας A αναλύεται σε γινόμενο LU.

25-04-17

Νόρμες πινάκων

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto$

να ικανοποιούν:

(N1)

(N2)

(N3)

(N4) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Φυσιώδεις νόρμες

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^m .

Η αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα πινάκων

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m,m} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Σημαντική Ιδιότητα

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|.$$

Ερώτημα: Πως υπολογίζουμε μια φυσική νόρμα πινάκων;

Αυτό είναι γενικά ένα δυσκολό πρόβλημα.

- Αν $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\| \leq C_1 \|x\|$, με μια σταθερά C_1 , τότε $\|A\| \leq C_1$.
- Αν $\exists y \in \mathbb{R}^n \quad y \neq 0$ τ.ω $\|Ay\| \geq C_2 \|y\|$, με μια σταθερά C_2 , τότε $\|A\| \geq C_2$.

Προσπαθούμε να αποδείξουμε τέτοιες ανισότητες με όσο μικρότερο C_1 γίνεται και με όσο μεγαλύτερο C_2 γίνεται. Αν $C_1 = C_2$, τότε $\|A\| = C_1 (= C_2)$.

Για τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ αυτό μπορεί να υλοποιηθεί και οδηγεί εξής τύπους:

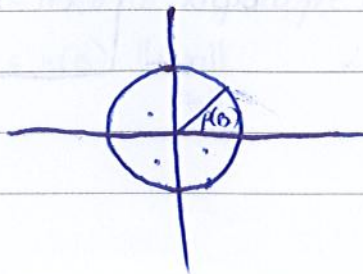
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Νόρμα του αθροίσματος γραμμών})$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Νόρμα του αθροίσματος στήλων}).$$

$$\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{1/2}$$

συμμετρικός πίνακας (έχει πραγματικές ιδιοτιμές)

Έστω $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας. Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του, τότε το $\rho(B) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ λέγεται φασματική ακτίνα του B .



Δείκτες κατάστασης πίνακα

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$, αντιστρέψιμος

Θέλουμε να μελετήσουμε την κατάσταση
του γραμμικού συστήματος

$$Ax = b$$

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και η αντίστοιχη
παρ φύσει νόρμα πινάκων

Ειδική περίπτωση: Έστω $\Delta b \in \mathbb{R}^n$

Τότε η αντίστοιχη μεταβολή της λύσης
 Δx του x είναι τ.ω.

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Έχουμε

$$\cancel{Ax} + A\Delta x = \cancel{b} + \Delta b \Rightarrow$$

$$\boxed{A\Delta x = \Delta b} \Rightarrow$$

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1} \cdot \Delta b\| \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

Πρόθεση: $b \neq 0$, οπότε $x \neq 0$

Άρα,

$$\textcircled{*} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\|x\|}$$

Όμως, $Ax = b \Rightarrow \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$,

$$\text{άρα} \quad \boxed{\|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}} \textcircled{**}$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ab\|}{\|b\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|Ab\|}{\|b\|}$$

Για ειδωιά b , $b \neq 0$ αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα Συντελεστής, ο αριθμός

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ είναι ο συντελεστής ευαισθησίας του $Ax = b$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του \mathbb{R}^n

Δείκτης κατάστασης του A :

$$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$\text{cond}(A)$

Ισχυρισμός: $\kappa(A) \geq 1$.

$$1 = \|I_n\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

- Αν ο $\kappa(A)$ είναι μικρός (όχι πολύ μεγαλύτερος του 1), τότε το σύστημα έχει υψηλή υπαίσθηση ενώ αν
- $\kappa(A)$ είναι πολύ μεγάλος, τότε το σύστημα $Ax = b$ έχει υαυή υπαίσθηση.

Θεώρημα (Ευστάθεια της σχετικής μεταβολής λύσεων γραμμικών συστημάτων).

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον \mathbb{R}^n και η αντίστοιχη φασική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$. Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αναστρέψιμος πίνακας, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε, αν $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Αν $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, τότε ο $A + \Delta A$ είναι αναστρέψιμος και

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon) \quad Ax = b \\ (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A\| \cdot \|\Delta A\|} \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

γ) Αν $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, τότε ο $A + \Delta A$ είναι αναστρέψιμος και $Ax = b$

$$\left. \begin{array}{l} (A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A\| \cdot \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Απόδειξη

α) Απόδειξη με πδπ.

β) Πρώτα θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας $A + \Delta A$ είναι αναστρέψιμος και ότι

$$\textcircled{*} \quad \|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|}$$

Έχουμε:

$$A + \Delta A = A(I_n + A^{-1} \Delta A)$$

Θέτουμε $B = A^{-1} \cdot \Delta A$. Θα αποδείξουμε ότι ο $I_n + B$ είναι αναστρέψιμος. Έχουμε

$$\|B\| = \|A^{-1} \cdot \Delta A\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.36, ο $I_n + B$ είναι αναστρέψιμος και $\|(I_n + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$

Επομένως, αφού $\|B\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| < 1$,

έχουμε

$$\textcircled{+} \quad \|(I_n + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|}$$

Συμπέρασμα, ο $A+\Delta A$ είναι αναστρέψιμος, ως γινόμενο αντιστρέψιμων, και $(A+\Delta A)^{-1} = (I_n + B)^{-1} \cdot A^{-1}$

Επί πλέον,

$$\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \|(I_n + B)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \|A^{-1}\|,$$

δηλαδή ισχύει η \circledast .

Τώρα,

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \Rightarrow$$

$$(A+\Delta A) \cdot \Delta x = b - Ax - \Delta Ax \Rightarrow$$

$$\Delta x = -(A+\Delta A)^{-1} \cdot \Delta Ax \Rightarrow$$

$$\|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \cdot \|x\| \Rightarrow$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\overset{u(A)}{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

$\gamma)$

$$\text{Έστω } (A+\Delta A)(x+\Delta x) = (b+\Delta b) \Rightarrow$$

$$(A+\Delta A)\Delta x = (b+\Delta b) - Ax - \Delta Ax$$

$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta Ax$$

$$\Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1} (\Delta b - \Delta Ax)$$

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \|x\|)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\overset{u(A)}{\|A^{-1}\| \|\Delta A\|}}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$\text{Όμως, } b = Ax \Rightarrow \|b\| \leq \|A\| \|x\|,$$

Οπότε η προηγούμενη έκφραση δίνει,

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{u(A)}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Παρατηρήσεις: i) Οι α) και β) είναι ειδικές περιπτώσεις της γ.
 ii) Όλες οι ευρυπτικές είναι βέλτερες

Εναλλακτικές μέθοδοι

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ αντιστρέψιμος
 Με μια δοθείσα αρχική προσέγγιση $x^{(0)}$, οι εναλλακτικές μέθοδοι δίνουν μια ακολουθία $x_0^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots$ προσεγγίσεων της x .

Ειδικές εναλλακτικές μέθοδοι:

- Μέθοδος του Jacobi
- Μέθοδος του Gauss-Seidel

Υπόθεση: $a_{ii} \neq 0$, $i=1, \dots, n$

Πώς οδηγούμαστε σε αυτές τις μεθόδους;
 (Πώς προκύπτουν).

$$Ax = b \Leftrightarrow (Ax)_i = b_i, i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \Leftrightarrow a_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) \quad i=1, \dots, n$$

Jacobi: $x^{(m)} \rightarrow x^{(m+1)}$

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

Επιαναληπτικές μέθοδοι

$$\underline{Ax = b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, \quad \det A \neq 0$$

Μέθοδοι του Jacobi και των
Gauss-Seidel.

Πρόθεση: $a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$

Τότε

$$Ax = b \Leftrightarrow x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right], \quad i = 1, \dots, n$$

Jacobi: $x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right]$

Gauss-Seidel: $x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(m)} \right], \quad i = 1, \dots, n$

- Η μέθοδος του Jacobi μπορεί να αποσπαστεί παραλληλота.
- Η μέθοδος των Gauss-Seidel δεν μπορεί να αποσπαστεί παραλληλота.
- Υπάρχει μια κατηγορία γραμμικών συστημάτων για την οποία η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει πολύ πιο γρήγορα από την μέθοδο Jacobi.
Γενικά όμως, υπάρχουν συστήματα για τα οποία η μία μέθοδος συγκλίνει και η άλλη δεν συγκλίνει!
- Οι μέθοδοι αυτές είναι ιδιαίτερα κατάλληλες για αραιά πινάκες.

Η υλοποίηση γίνεται στη μορφή που δώσαμε. Για τη θεωρητική μελέτη θα τις γράψουμε σε κατάλληλότερη μορφή.

Ορίστε

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & & & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & \\ & & & & a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Τότε $A = L + D + U$

Jacobi:

$$a_{ii}x_i^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)}, \quad i=1, \dots, n$$
$$\Leftrightarrow D x^{(m+1)} = b - (L+U)x^{(m)}$$

$$x^{(m+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b$$

Gauss-Seidel:

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(m+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(m)}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(L+D)}_{\text{ανώτερη}} x^{(m+1)} = b - Ux^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(m+1)} = -(L+D)^{-1}Ux^{(m)} + (L+D)^{-1}b$$

Γενική αναγνώριση μεθόδου

$$A = M - N, \quad \text{με } M \text{ ανώτερη.}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow (M-N)x = b \Leftrightarrow$$

$$Mx = Nx + b \Leftrightarrow$$

$$\boxed{Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b}$$

Ειδιές περιπτώσεις:

Jacobi: $M_J = D$, $N_J = -(L+U)$

Gauss-Seidel: $M_{GS} = (L+D)$, $N_{GS} = -U$

Έστω ότι $x^{(m)} \rightarrow y$, $m \rightarrow \infty$

Τότε

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b$$

$$\downarrow \quad \quad \downarrow$$

$$My \quad \quad Ny + b$$

$$\Rightarrow My = Ny + b \Leftrightarrow$$

$$(M-N)y = b \Leftrightarrow Ay = b \Leftrightarrow$$

$$\boxed{y = x}$$

Συμπέρασμα, αν μια επαναληπτική μέθοδος συγκλίνει, τότε συγκλίνει στο σωστό επί, δηλ

$$x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow \infty$$

Επίσημα: Πότε συγκλίνει μια επαναληπτική μέθοδος;

$$\left. \begin{aligned} M x^{(m+1)} &= N x^{(m)} + b \\ M x &= N x + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} M(x^{(m+1)} - x) &= N(x^{(m)} - x) \\ \Rightarrow x^{(m+1)} - x &= \underbrace{M^{-1}N}_{G}(x^{(m)} - x) \end{aligned}$$

Ο πίνακας $G := M^{-1} \cdot N$ λέγεται πίνακας επαναληψής της μεθόδου.

Έχουμε

$$x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα επαγωγικά,

$$x^{(m)} - x = G^m(x^{(0)} - x), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

Άρα

$$\begin{aligned} \|x^{(m)} - x\| &= \|G^m(x^{(0)} - x)\| \\ &\leq \|G^m\| \|x^{(0)} - x\| \end{aligned}$$

και αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα για κάποιο $x^{(0)}$.

Οπότε

$$\boxed{x^{(m)} \rightarrow x, \quad m \rightarrow \infty \Leftrightarrow G^m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty}$$

Βοηθητικό αποτέλεσμα

Λήμμα (Σχέση φασικής νόρμας και φασματικής αντίστροφης πίνακα)

Έστω $\|\cdot\|$ μια οποιαδήποτε νόρμα στον \mathbb{C}^n .

Τότε, για κάθε πίνακα $P \in \mathbb{C}^{n,n}$

ισχύει

$$(*) \quad \rho(P) \leq \|P\|$$

(με $\|\cdot\|$ την αντίστοιχη φασική νόρμα).

Αντίστροφα, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$
 και $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσική νόρμα
 $\|\cdot\|$ τ.ω

$$\|P\| \leq \rho(P) + \varepsilon.$$

$\lambda_1(P), \dots, \lambda_n(P)$
 ιδιοτιμές του P
 Φακτορική αυτίνα:
 $\rho(P) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(P)|$

Απόδειξη (μονο της \circledast).

Έστω λ $\in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του P και $z \in \mathbb{C}^n$
 αντιστοίχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$Pz = \lambda z$$

$$\Rightarrow \underbrace{\|\lambda z\|}_{\|\lambda\| \cdot \|z\|} = \|Pz\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$$

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|z\| \leq \|P\| \cdot \|z\|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda| \leq \|P\|}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε
 ιδιοτιμή, ισχύει και η \circledast .

Θεώρημα (Τυπές και αναγωγικές ενθήμες
 συλλήψεις επαναληπτικών μεθόδων)

Έστω x η λύση του $Ax = b$

Τότε παρακάτω είναι ισοδύναμα:

α) Η επαναληπτική μέθοδος

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \quad (A = M - N)$$

συλλήπει, δηλαδή για κάθε αρχική προσέγγιση
 $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, έχουμε $x^{(m)} \rightarrow x$, $m \rightarrow \infty$.

β) $\boxed{\rho(G) < 1}$, με $G = M^{-1} \cdot N$

των πινάκων επαναληψής της μεθόδου

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ τ.ω
 $\|G\| < 1$

δ) $\lim_{m \rightarrow \infty} G^m = 0$

$$\alpha) \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \delta) \Rightarrow \alpha).$$

Απόδειξη

$\alpha) \Rightarrow \beta)$: Έστω ότι $x^{(m)} \rightarrow x$, $m \rightarrow \infty$
για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$. Τότε,
από τη σχέση

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$$

Έπεται ότι

$$\oplus \quad G^m (x^{(0)} - x) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty,$$

για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$

Για δεδομένο $y \in \mathbb{C}^n$, επιλέγουμε
 $x^{(0)} = x + y$ και η \oplus δίνει

$$\boxed{G^m y \rightarrow 0, m \rightarrow \infty}$$

Έστω λ ιδιοτιμή του G και z αντίστοιχο
ιδιοδιάνυσμα.

Τότε,

$$Gz = \lambda z,$$

οπότε, αναγνώριμα,

$$G^m z = \lambda^m z$$

Όμως,

$$G^m z \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ οπότε}$$

$$\lambda^m z \rightarrow 0, m \rightarrow \infty \text{ δηλαδή}$$

$$\|\lambda^m z\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$|\lambda|^m \cdot \|z\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$\neq 0$

$$\text{Έπεται, } |\lambda|^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{|\lambda| < 1}$$

Άρα, $\boxed{\rho(G) < 1}$

$\epsilon) \Rightarrow \gamma)$: $\rho(G) < 1 \Rightarrow$ για κάθε $\epsilon > 0$
 υπάρχει φυσική νύμφα $\| \cdot \|$ τέω
 $\|G\| \leq \underbrace{\rho(G)}_{< 1} + \epsilon$

Για $\epsilon < 1 - \rho(G)$ παίρνουμε $\rho(G) + \epsilon < 1$,
 οπότε $\|G\| < 1$.

$\gamma) \Rightarrow \delta)$: Έστω $\|G\| < 1$. Τότε
 $\|G^m\| = \|G \cdot G \dots G\| \leq \|G\| \cdot \|G\| \dots \|G\|$
 $= \|G\|^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$

Σημειών

$$G^m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$\delta) \Rightarrow \alpha)$:

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x) \Rightarrow$$

$$\|x^{(m)} - x\| \leq \|G^m\| \cdot \|x^{(0)} - x\|$$

$\downarrow 0, m \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow x^{(m)} - x \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \rightarrow x, m \rightarrow \infty$$

Προσοχή στο "Υπάρχει" στο $\gamma)$.

Παράδειγμα. $G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

($\gamma)$) $\boxed{\|G\|_\infty = \|G\|_1 = \|G\|_2 = 0} > 1$

($\epsilon)$) Ιδιότητες των νυμφών $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \rightsquigarrow \rho(G) = 0 < 1$.

Μαθηματικά, $G^2 = 0$ ($\delta)$)

Βοηθητικό αποτέλεσμα επιλογής ιδιοτιμών λων.

Λήμμα (Ανισότητα του Gerschgorin)

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ και λ ιδιοτιμή του A . Τότε, υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω

$$|\alpha_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |\alpha_{sj}|$$

Απόδειξη

Έστω $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο διόδιάνωμα,

$$Az = \lambda z \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j = \lambda z_i, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow (a_{ii} - \lambda) z_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} z_j$$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \cdot |z_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \cdot |z_j|$$

Έστω $s \in \{1, \dots, n\}$ τ.ω $|z_s| = \|z\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|$

Τότε, η προηγούμενη εκτίμηση με $i=s$

δίνει,

$$|\alpha_{ss} - \lambda| \cdot |z_s| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \cdot |z_j| \leq |z_s| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

$$\Rightarrow |\alpha_{ss} - \lambda| \cdot |z_s| \leq \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \right) |z_s|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\alpha_{ss} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|}$$

28-04-17

Άσκηση 3.23

α) Ανισότητα του Young.

Αν $1 < p, q < \infty$ τω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
 και $a, b \geq 0$, $\forall \delta > 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

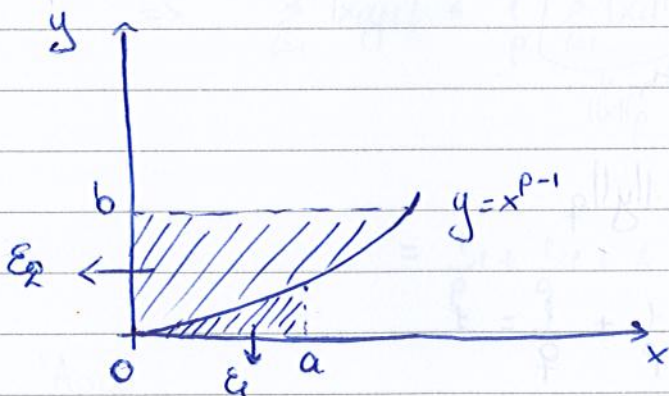
Ειδική περίπτωση $p=2$ ($q=2$).

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

(Ισοτητα ισχυει μονο
για $b = a^{p-1}$)

$$2ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$



$$E_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{x^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^p y^{\frac{1}{p-1} = q-1} dy = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

$$\frac{1}{p-1} = q-1 \Leftrightarrow 1 = (p-1)(q-1) \Leftrightarrow$$

$$1 = pq - p - q + 1 \Leftrightarrow$$

$$p + q = pq \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \quad \checkmark$$

6) Ανισότητα του Holder.

Για $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε

$$\|\cdot\|_p: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

για $x, y \in \mathbb{C}^n$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

με p, q τω $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

για $p=2$ ($q=2$) η ανισότητα αυτή είναι η ανισότητα του Cauchy-Schwarz.

$$p=1 \quad (q=\infty)$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right) \|y\|_\infty$$

Αν $x=0$ ή $y=0$ η ανισότητα είναι ξεφτισμένη.

Ενδιαφέροντα περιπτώσεων

$$1 < p < \infty \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad y \neq 0$$

Ειδική περίπτωση

$$\|x\|_p = 1 \quad \text{και} \\ \|y\|_q = 1$$

$$1 < p < \infty, \quad \text{και}$$

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad (\text{Young})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)}_{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)}_{\|y\|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

γενική περίπτωση

$$\tilde{x} = \frac{1}{\|x\|_p} \cdot x$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q} \cdot y$$

Τότε $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$, οπότε αρφύρα
με την προηγούμενη περίπτωση

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1 \quad \text{Άρα,}$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq 1, \quad \text{οπότε} \quad \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1$$

$$\text{δηλ.} \quad \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

γ) για $1 \leq p \leq \infty$ η $\|\cdot\|_p$ είναι κόπια

$\mathbb{Q}, (\mathbb{N}_1), (\mathbb{N}_2)$ είναι τετριπμένες.

Η (\mathbb{N}_3) λέγεται ανισότητα του Minkowski:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n \quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

• $p=1$ τετριπμένη

• $1 < p < \infty$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^n \overbrace{|x_i+y_i|}^{|x_i+y_i|} \cdot |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\|x+y\|_p^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| |x_i+y_i|^{p-1}$$

$$\leq \underbrace{(\|x\|_p + \|y\|_p)}_{\text{Holder}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{p-1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\stackrel{**}{=} (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1) \cdot q} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{p-1}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$$

$$\Rightarrow \cancel{\|x+y\|_p^p} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cancel{\|x+y\|_p^{p-1}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

2-05-14

Αντιθέση του Gerschgorin

Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n,n}$
και λ ιδιοτιμή του. Τότε, υπάρχει

$s \in \{1, \dots, n\}$ τέω

$$|\lambda - a_{ss}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

Συμπέρασμα: Κάθε ιδιοτιμή ενός πίνακα A ανήκει
σε έναν κύκλο $K_s(a_{ss}, r_s)$

$s=1, \dots, n$ με κέντρο a_{ss} και ακτίνα

$$r_s = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}|$$

Με άλλα λόγια, όλες οι ιδιοτιμές του
 A περιέχονται στην ένωση κύκλων $K_s(a_{ss}, r_s)$.

Οι κύκλοι αυτοί λέγονται κύκλοι του
Gerschgorin.



Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος
αν και μόνο αν το μινδέρ δ_A είναι
ιδιοτιμή του.

Πραγματικά,

$$A \text{ αντιστρέψιμος} \Leftrightarrow (Ax=0 \Rightarrow x=0) \\ \Leftrightarrow (Ax=0 \cdot x \Rightarrow x=0)$$

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i=1, \dots, n$$

Ισχυριόσιος: $\circ A$ είναι αντιστρέψιμος.

Έστω όσα $\circ A$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Τότε το $\lambda=0$ είναι ιδιοτιμή του, οπότε
συμφωνά με την ανισότητα του Gerschgorin
υπάρχει σε $\{1, \dots, n\}$ ε.ω.

$$|a_{ss} - 0| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \Leftrightarrow$$

$$|a_{ss}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^n |a_{sj}| \quad (\text{Άτονο})$$

Θεώρημα: (Σύγκριση του Jacobi και των Gauss-Seidel
στη περίπτωση αυστηρά αντιστρέψιμων με
αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο)

Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ έχει αυστηρά κυρίαρχη
διαγώνιο. Τότε,

α) Οι πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$ και

$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ των μεθόδων του Jacobi

και των Gauss-Seidel, αντίστοιχα, ικανοποιούν
τις ανισότητες

$$\|G_J\|_\infty < 1 \quad \text{και} \quad \|G_{GS}\| < 1$$

β) Οι μέθοδοι του Jacobi και των Gauss-Seidel συγκλίνουν.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τα προηγούμενα ο A είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διαφορετικά του μηδενός, οπότε οι μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν.

α) Θέτουμε

$$G = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \right)$$

Προφανώς $G < 1$.

Jacobi: Ισχυρισμός $\|G_J\|_\infty = G$

Τώρα,

$$\|G_J\|_\infty = \|D^{-1}(L+U)\|_\infty$$

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & & 0 \\ & \frac{1}{a_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{mm}} & \dots & \frac{a_{m,n-1}}{a_{mm}} & 0 \end{pmatrix}$$

Σταθμίζοντας
 $D \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$(DB)_{ij} = \sum_{k=1}^n D_{ik} B_{kj} = D_{ii} B_{ij}$$

$$(BD)_{ij} = \sum_{k=1}^n B_{ik} D_{kj} = B_{ij} D_{jj}$$

$$\text{Άρα, } \|G_J\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|$$

$$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)$$
$$= G$$

Ισχυρισμός: Για τη μέθοδο Gauss-Seidel
 $\|G_{GS}\|_{\infty} \leq G$

Για να αποφεύγουμε τον υπολογισμό του $(L+D)^{-1}$
θα χρησιμοποιήσουμε έναν έμμεσο τρόπο:

Για $y \in \mathbb{C}^n$ θέτουμε $u := G_{GS} \cdot y$.

Θα αποδείξουμε ότι

$$\|u\|_{\infty} \leq G \|y\|_{\infty}, \text{ δηλαδή}$$
$$\forall y \in \mathbb{C}^n \quad \|G_{GS} \cdot y\| \leq G \|y\|_{\infty},$$

οπότε

$$\|G_{GS}\|_{\infty} \leq G$$

Προϋποθέσεις: Για $i=1, \dots, n$ ισχύει

$$(*) \quad |u_i| \leq C \|y\|_\infty$$

Θα αποδείξουμε αναγωγικά την $(*)$
Έχουμε

$$u = G_{\text{res}} \cdot y \Leftrightarrow u = -(L+D)^{-1} \cdot u \cdot y$$

$$\Leftrightarrow (L+D) \cdot u = -u \cdot y$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} u_j = - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow a_{ii} u_i = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow u_i = - \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} y_j \right], \quad i=1, \dots, n$$

Για $i=1$ έχουμε

$$u_1 = - \frac{1}{a_{11}} \left[\sum_{j=2}^n a_{1j} y_j \right] \Leftrightarrow$$

$$|u_1| \leq \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^n |a_{1j}| |y_j| \leq \|y\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow |u_1| \leq \left(\frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^n |a_{1j}| \right) \cdot \|y\|_\infty$$

$$\leq C$$

$$\Leftrightarrow |u_1| \leq C \cdot \|y\|_\infty$$

Αναγώγικα, n $(*)$ ισχύει για $i=1$.

Βήμα της επαγωγής: Έστω ότι $n \otimes$ ισχύει για $1, 2, \dots, i-1$
 Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για i .

Πράγματι, από τη \oplus παίρνουμε

$$|u_i| \leq \frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| |u_j| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| |y_j| \right)$$

$\leq G \cdot \|y\|_{\infty} \leq \|y\|_{\infty}$
 \uparrow
 υπόθεση επαγωγής.

$$\Rightarrow |u_i| \leq \frac{1}{|a_{ii}|} \left(\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right)$$

$$\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Επομένως,

$$|u_i| = \underbrace{\left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)}_{\leq G} \|y\|_{\infty}$$

Το β) έπεται από το γενικό θεώρημα σύμπτωσης επαναληπτικών μεθόδων

Άσκηση (3.23)

δ) Ανωότητα του Jensen:

Για $1 \leq p \leq q \leq \infty$ και $x \in \mathbb{C}^n$
 ισχύει $\|x\|_q \leq \|x\|_p$

(Για $x = (1, 0, \dots, 0)$ η ανωότητα
 ισχύει ως ισότητα)

Προφανώς,

$$|x_i| \leq \|x\|_p, \quad i=1, \dots, n.$$

$$|x_i|^p \leq \sum_{j=1}^n |x_j|^p \Leftrightarrow$$

$$|x_i|^p \leq \|x\|_p^p$$

(Ιδιαίτερα,

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_p$$

$\|x\|_\infty$

δηλαδή η ζμπαιμεν ανωότητα ισχύει
 για $q = \infty$)

Έστω $q < \infty$. Τότε $|x_i|^q = |x_i|^p \cdot \underbrace{|x_i|^{q-p}}_{\leq \|x\|_p} \Rightarrow$

$$|x_i|^q \leq |x_i|^p \cdot \|x\|_p^{q-p} \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^q \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right) \cdot \|x\|_p^{q-p}$$

$\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q \cdot \|x\|_p^{q-p}$

$$\Rightarrow \|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q$$

$$\Rightarrow \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Άσκηση (3.24)

$\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ του \mathbb{R}^n .

Βέλτιστες σταθερές σύγκρισης;

Λύση:

Σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen

έχουμε:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

και οι σταθερές (n μοναίδια) είναι βέλτιστες.

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$

Πράγματι:
$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$
$$\leq \|x\|_\infty + \dots + \|x\|_\infty = n \cdot \|x\|_\infty$$

Για $x = (1, 1, \dots, 1)_{\neq 0}^T \in \mathbb{R}^n$ η ανισότητα
ισχύει ως ισότητα.

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$

Πράγματι:

$$\|x\|_2^2 = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$$
$$\leq \|x\|_\infty^2 + \dots + \|x\|_\infty^2 = n \cdot \|x\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

(Για $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα)

Ισχυρισμός: $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i|$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{CS}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Για $x = (1, \dots, 1)$ έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \|x\|_1 = n \\ \|x\|_2 = \sqrt{n} \end{array} \right\} \text{ οπότε } \|x\|_1 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_2.$$

Άσκηση (33)

Υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^{2,2}$ τ.ω

για τον $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ να ισχύει ότι $\|A\| = 2,5$

Λύση: Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)^2 - 4,$$

$$\text{άρα } p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda+1 = \pm 2$$

$$\lambda_1 = \overset{-3}{-3}, \lambda_2 = 1.$$

Φασματική ακτίνα:

$$\rho(A) = \max(|-3|, |1|) = 3$$

Αφού, ισχύει ότι $\|A\| < \rho(A)$, οπότε δεν υπάρχει τέτοια φυσική νόρμα.

Άσκηση 3.32.

$$a) \|A\|_{\max} = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Είναι αυτές φασματικές νόρμες;

Με τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος (Άσκηση 3.31)
έχουμε

$$\|A\|_{\max} \stackrel{1}{\leq} \rho(A) \stackrel{3}{\leq} \|A\|_F$$

Άρα η $\|A\|_{\max}$ δεν είναι φασματική νόρμα.

$$\|I_n\|_F = \sqrt{n} > 1 \quad \text{για } n > 1$$

Ενώ για φασματικές νόρμες έχουμε

$$\text{ότι } \|I_n\| = 1$$

Πράγματι,

$$\|I_n\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|I_n x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

$$b) x \in \mathbb{R}^n \quad \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

(δηλαδή $\|A\|_2 \leq \|A\|_F$)

$$\text{Έχουμε ότι } \|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i|^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|^2$$
$$\stackrel{\text{CS}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)}_{\|x\|_2^2}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \|x\|_2^2$$
$$= \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)}_{\|A\|_F^2} \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \|A\|_F^2 \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|x\|_2$$

4-05-17

Άσκηση 336 (Θεώρημα 3.3)

$\|\cdot\|$ νόρμα στον \mathbb{R}^n και η αντιστοίχη φυσική νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$

Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ τ.ω $\|A\| < 1$,

ΝΔ.Ο

- 0 $I_n - A$ αντιστρέψιμος.
- $\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

- $(I_n - A)x = 0 \Leftrightarrow x - Ax = 0 \Leftrightarrow$
 $x = Ax \Rightarrow \|x\| = \|Ax\| \Rightarrow$
 $\|x\| \leq \|A\| \|x\|.$

Αν $x \neq 0$, τότε $1 \leq \|A\|$, άτοπο.

- $I_n = (I_n - A)^{-1} (I_n - A) \Rightarrow$

$$\|I_n\| = \|(I_n - A)^{-1} (I_n - A)\| \Rightarrow$$

$$1 \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \underbrace{\|I_n - A\|}_{\leq \|I_n\| + \|A\|} = 1 + \|A\|$$

$$\Rightarrow 1 \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq 1 + \|A\|.$$

$$\begin{aligned} 1 &= \|(I_n - A)^{-1} (I_n - A)\| \\ &= \|(I_n - A)^{-1} - (I_n - A)^{-1} A\| \Rightarrow \\ &\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1} \cdot A\| \end{aligned}$$

πρόσφατη
εως φορές!

$$\leq \|(I_n - A)^{-1}\| \|A\|$$

$$\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\| \|A\|$$

$$\Rightarrow 1 \geq \|(I_n - A)^{-1}\| \underbrace{(1 - \|A\|)}_{> 0}$$

↑ προς τα πάνω ⊕
↓ προς τα κάτω ⊖

Άσκηση 3.64

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΝΑΟ:

- Η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει.
- Η μέθοδος των Gauss-Seidel γρήγορα αποκλίνει.

• Jacobi

$$G_J = -\underbrace{(D^{-1})}_{I_3} (L+U) = -(L+U)$$

Μόνο για 3x3 matrices

Άρα,

$$G_T = - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 2 & 0 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Κανόνας του Sarrus:

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) := \det(G_T - \lambda \cdot I_3)$$

Κανόνας του Sarrus.

A

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{11}	a_{12}

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$p(\lambda) = \dots = -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4}) \quad (\text{όχι σφαιρικό αλλά επισημασμένο ως ιδιοτιμές})$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$
 $\lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{2}$

Φασματική ανάλυση

$$p(G_T) = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{συμπίπτει.}$$

• Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1} \cdot U$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -2 & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

αρα ο αντιστρεψιμος ειναι αυτη η αααα
 επιπλευς ειναι τα
 ιδιοτητες ειναι τα
 διαγωνια ελεμτα.

Ιδιοτητες $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = \frac{7}{4}$

$\rho(G_{GS}) = 2 \geq 1 \rightarrow$ γενικα ανδρυσαν.

Άσκηση 3.65

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

N.A.O.

- Gauss-Seidel συγκλινει
- Jacobi : γενικα αποκλινει.

- Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1} \cdot U =$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Στοιχεία : $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$, $\rho_3 = \frac{1}{3}$.

$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow$ συγκλινει.

• Jacobi ^{μοναδιαίος πινακός}
 $G_T = -D(L+u) = -(L+u)$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(G_T - \lambda I_3) = \dots = \\ &= -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Τώρα, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \varphi(\lambda) = +\infty$

$$\varphi(-1) = +1 + \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2.$$

Κοιτάμε τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(-1, +\infty)$ για ρίζες.

Συμπέρασμα: Υπάρχει ρίζα του φ στο $(-\infty, -1)$.

Άρα, $\rho(G_T) > 1$ οπότε γινώδι έχουμε απόλυτη.