20/04/2018

• Άσκηση 3.1

$U, W \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικοί (όμοια για κάτω τριγωνικούς)

i) ΝΔΟ: UW είναι άνω τριγωνικός

$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} W_{kj} \underset{\substack{U \text{ άνω} \\ \text{τριγων.} \\ (U_{i1}=U_{i2}=\cdots=U_{i,i-1}=0)}}{=} \sum_{k=i}^{n} U_{ik} W_{kj} =$$

$$= U_{ii} W_{ij} + U_{i,i+1} W_{i+1,j} + \cdots + U_{in} W_{nj}$$

- Για $i>j$, έχουμε $W_{ij} = W_{i+1,j} = \cdots = W_{nj} = 0$

Οπότε, $(UW)_{ij} = 0$, δηλαδή ο UW είναι άνω τριγωνικός.

ii) $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικός και αντιστρέψιμος

ΝΔΟ: U^{-1} άνω τριγωνικός.

Θεωρώ τα στοιχεία x^k τ.ω. $U x^k = e^k$, $k=1,\dots,n$

Τότε $U^{-1} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$

Λύνοντας το σύστημα $Ux^k = e^k$ με οπισθοδρόμηση παίρνουμε,

$$x_n^k = x_{n-1}^k = \cdots = x_{k+1}^k = 0$$

(γιατί οι αντίστοιχες συνιστώσες του e^k είναι 0)

Συμπέρασμα : U^{-1} άνω τριγωνικός

• Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$, A αντιστρέψιμος, $b \in \mathbb{R}^n$

i) $A^{-4} b$

διάνυσμα

$x = A^{-4} b \Rightarrow A^4 x = b$

$\Rightarrow A \cdot \underbrace{(A^3 x)}_{y} = b$

1. $Ay = b$
$A^3 x = y \Leftrightarrow A \underbrace{(A^2 x)}_{z} = y$

2. $Az = y$
$A^2 x = z \Leftrightarrow A \underbrace{(Ax)}_{v} = z$

3. $Av = z$

4. $Ax = v$

Λύνουμε 4 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών τον A.

ii) $A^{-1}BA^{-1}b$

$$x = A^{-1}BA^{-1}b \Rightarrow Ax = \underbrace{BA^{-1}b}_{y}$$

$A^{-1}b = y \iff$

1 $\boxed{Ay = b}$

$Ax = By$

→ Λύνουμε 2 συστήματα με πίνακα A και κάνουμε έναν πολλαπλασιασμό πίνακα επί διάνυσμα.

Άσκηση 3.6

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & a_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}$$

ΝΔΟ

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -a_{n,i} & & 1 \end{pmatrix}$$

και, για $i<j$

$$A_iA_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & & \\ 0 & & \vdots & & 1 & \\ & & & 0 & a_{j+1,j} & \ddots & \\ & & a_{ni} & & \vdots & & 1 \\ & & & & a_{nj} & & \end{pmatrix}$$

Ιδέα: σαν να τους προσθέτω τους πίνακες A_i και A_j.

2 στη διαγώνιο αν τους πρόσθετα.

Απόδειξη:

(*) $AB = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$ για κάθε $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

Ισχυρισμός: Για $i \leq j$ ισχύει ότι $(A_i - I_n)(A_j - I_n) = 0$

(Αν αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό τότε τα επιθυμητά αποτελέσματα προκύπτουν αμέσως από την (*))

Η μόνη στήλη του $A_i - I_n$ που περιέχει μη μηδενικά στοιχεία είναι η i. Τα στοιχεία αυτά πολλαπλασιάζονται με τα αντίστοιχα της γραμμής i του πίνακα $A_j - I_n$ τα οποία είναι 0.

Άσκηση 3.7

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

Υπόθεση: $A = LU$

ΝΔΟ.: Η ανάλυση είναι μοναδική

$A = \hat{L}\hat{U}$
με $\hat{L} \in \mathbb{R}^{n,n}$ κάτω τριγωνικό με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικό.

Άρα $LU = \hat{L}\hat{U} \Rightarrow \hat{L}^{-1}LU = \hat{U} \Rightarrow \hat{L}^{-1}L = \hat{U}U^{-1}$

$\hat{L}^{-1}L$: κάτω τριγωνικός

$\hat{U}U^{-1}$: άνω τριγωνικός

Άσκηση 3.1

Συμπέρασμα:

$$\hat{L}^{-1}L = \hat{U}U^{-1} = D = diag(d_{11}, \dots, d_{nn})$$

Έχουμε $\hat{L}^{-1} \cdot L = D \Rightarrow L = \hat{L} D \Rightarrow$

$$\underbrace{L_{ii}}_{=1} = \underbrace{\hat{L}_{ii}}_{=1} d_{ii} \rightsquigarrow d_{ii} = 1 \quad , i = 1, \dots, n$$

Άρα $D = I_n$

$\hat{L}^{-1} \cdot L = I_n \rightsquigarrow L = \hat{L}$

$\hat{U}U^{-1} = I_n \rightsquigarrow \hat{U} = U$

Άσκηση 3.10

$A=(a_{ij})\in \mathbb{R}^{n,n}$

Κύριες ορίζουσες του A:

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \quad \delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

- Αν $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1} \neq 0$, ΝΔΟ, $A = LU$

Απόδειξη:

1ο Βήμα της τριγωνοποίησης:

Αφού $a_{11}\neq 0$, μπορεί να γίνει χωρίς πρόβλημα (χωρίς εναλλαγές γραμμών).

Έστω ότι γίνεται απρόσκοπτα $i-1$ βήματα. Τότε,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & & a_{1i}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2i}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i \neq 0$$

$$\Rightarrow a_{11}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{ii}^{(i)} = \delta_i \Rightarrow a_{ii}^{(i)} \neq 0$$

Άρα μπορούμε να κάνουμε και το βήμα i χωρίς πρόβλημα.

Άσκηση 3.11

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , i=1,\dots,n$$

ΝΔΟ: A αντιστρέψιμος, $A = LU$

$$Ax = 0 \Rightarrow (Ax)_i = 0 \,, \; i=1,\dots,n \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \Rightarrow a_{ii} x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j \Rightarrow$$

$$|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \quad , i=1,\dots,n$$

• Έστω $x \neq 0$. Τότε, για κάποιο ℓ $\;|x_\ell| = \|x\|_\infty \neq 0$

- Για $i = \ell$, η ⊛ δίνει:

$$|a_{\ell\ell}| \cdot |x_\ell| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \cdot \overbrace{|x_j|}^{\leq |x_\ell|}$$

$$\Rightarrow |a_{\ell\ell}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \qquad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$
οπότε ο A είναι αντι-
στρέψιμος.

Τώρα,
$$\delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} \neq 0 \quad , i=1,\dots,n$$

έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο
(άρα είναι αντιστρέψιμος)

- Σύμφωνα με την Άσκηση 3.10 ο A αναλύεται σε γινόμενο LU.

<u>Άσκηση 3.23</u>

α) $1<p, q<\infty \quad , \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$a, b \geq 0$

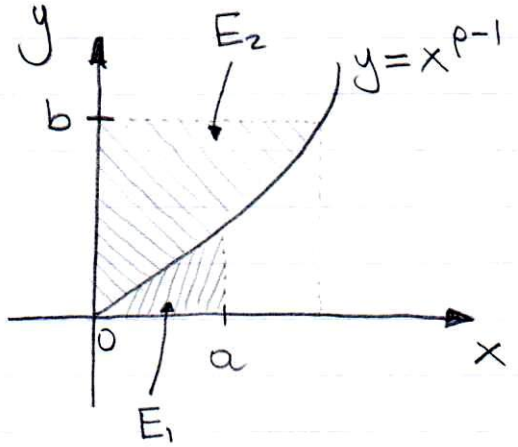
<u>ΝΔΟ:</u> $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (ανισότητα του Young)

$p=2 \rightsquigarrow q=2$

$ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} \iff a^2+b^2-2ab \geq 0 \iff$

$(a-b)^2 \geq 0$ ✓

<u>Γεωμετρική Ερμηνεία</u>: Έστω $a, b > 0$ (ενδιαφέρουσα περίπτωση)



$$E_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^b y^{\overset{(*)\to q-1}{\frac{1}{p-1}}} dy = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}$$

- Η ανισότητα του Young ισχύει ώς ισότητα μόνο για $b = a^{p-1}$

$(*)$ $\frac{1}{p-1} = q-1 \iff 1 = (p-1)(q-1)$

$\iff 1 = pq - p - q + 1 \iff pq = p + q \iff 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ ✓

β) $1 \leq p < \infty$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

<u>ΝΔΟ:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \overline{y}_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

(ανισότητα Hölder)

• Για $x=0$ ή $y=0$ η ανισότητα είναι τετριμμένη.

• Για $p=1$, έχουμε $q=\infty$, και η ανισότητα γράφεται ως

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \max_{1 \leq i \leq q} |y_i|$$

→ Τώρα για $x \neq 0$, $y \neq 0$ και $p > 1$,

<u>1η Περίπτωση</u> : $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$

<u>Ανισότητα του Young:</u>

$$|x_i \overline{y}_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i \overline{y}_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|y_i|^q}{q} =$$

$$= \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{= \|x\|_p^p = 1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}_{= \|y\|_q^q = 1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

2^{η} Περίπτωση: $x, y \in \mathbb{C}^n$, $x, y \neq 0$

Θέτω $\tilde{x} = \dfrac{1}{\|x\|_p} \cdot x$

$$\tilde{y} = \frac{1}{\|y\|_q} y \quad \left(\text{Προφανώς } \|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1\right)$$

Άρα, σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση,

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \cdot \tilde{y}_i| \leq \|\tilde{x}\|_p \cdot \|\tilde{y}\|_q \iff$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{\|x\|_p} x_i \cdot \frac{1}{\|y\|_q} y_i \right| \leq 1 \iff$$

$$\frac{1}{\|x\|_p \cdot \|y\|_q} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$$

Ασκηση 3.23

γ) Ν.Δ.Ο. $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ είναι νόρμα.

$1 \leq p \leq \infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Έστω $1<p<\infty$, Τότε οι (N_1) και (N_2) είναι τετριμμένες.

(N_3) $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$ $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

(ανισότητα του Minkowski)

→ Γνωρίζω από (β) την ανισότητα του Hölder

$$\forall x,y \in \mathbb{C}^n \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Έχουμε, $\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \cdot |x_i+y_i|^{p-1} \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ανισότητα}\\ \text{Hölder}}}{\leq} \|x\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} + \|y\|_p\left(\sum_{i=1}^{n}\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q\right)^{1/q} =$$

$$= (\|x\|_p+\|y\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{\overbrace{(p-1)q}^{p\ \oplus}}\right)^{1/q = \frac{p-1}{p}} =$$

$$= (\|x\|_p+\|y\|_p)\left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{1/p}}_{\|x+y\|_p}\right)^{p-1}$$

$$= (\|x\|_p+\|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p+\|y\|_p$$

Επίσης $\oplus$, $(p-1)q = p \Leftrightarrow pq = p+q \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{q}+\frac{1}{p}$

δ) $1 \leq p < q \leq \infty$, $x \in \mathbb{C}^n$ τώρα δεν ισχύει $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

<u>ΝΔΟ</u> $\|x\|_q \leq \|x\|_p$

(ανισότητα του Jensen)

<u>Παρατήρηση</u>: Για $x = \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ έχουμε $\|x\|_p = 1$, οπότε η ανισότητα του Jensen ισχύει ως ισότητα.

Προφανώς,

$$|x_i| \leq \|x\|_p \quad , i=1,\dots,n$$

• Άρα,

$$\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \leq \|x\|_p \quad \text{ή} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$

Δηλαδή η ανισότητα του Jensen ισχύει για $q=\infty$.

• $q<\infty$

$$|x_i|^q = |x_i|^p \cdot |x_i|^{\overset{>0}{q-p}}$$

$$|x_i| \leq \|x\|_p$$

$$\Rightarrow |x_i|^q = |x_i|^p \|x\|_p^{q-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^q = \|x\|_p^{q-p}\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x\|_q^q \leq \underbrace{\|x\|_p^{q-p}\cdot\|x\|_p^p}_{\|x\|_p^q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x\|_q^q \leq \|x\|_p^q \Rightarrow \boxed{\|x\|_q \leq \|x\|_p}$$

Άσκηση 3.24

$\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ στον $\mathbb{R}^n$

Βέλτιστες σταθερές σύγκρισης.

Σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen
$\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq n\|x\|_\infty$$

Για $x = (1\ 1\ 1 \cdots 1)^T$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1 \underset{GS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2}}_{\sqrt{n}}$$

Για $x = (1\ 1 \cdots 1)^T$ έχουμε $\|x\|_1 = n$, $\|x\|_2 = \sqrt{n}$, οπότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

- Επίσης, $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2 = n\|x\|_\infty^2 \Rightarrow$

  ↳ κάθε x_i είναι μικρότερο ή ίσο της νόρμας μεγίστου.

$$\Rightarrow \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$

Για $x = (1\ 1 \cdots 1)^T$ ισχύει ως ισότητα.

08/05/2018

Άσκηση 3.31

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπάρχει φυσική νόρμα τ.ω. $\|A\| = 2.5$?

Λύση:

χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) =$

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 - 4$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = -3 \end{matrix}\right\}$$

→ Φασματική ακτίνα,

$$\rho(A) = \max(1, 3) = 3$$

Άρα, $\rho(A) > \|A\|$ επομένως τέτοια φυσική νόρμα δεν υπάρχει.

Άσκηση 3.32

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

a) $\|A\|_{max} = \max\limits_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

→ Είναι φυσικές νόρμες;

- Έχουμε, $\|I_n\|_E = \sqrt{n} \neq 1$, για $n \geq 2$, άρα η $\|\cdot\|_E$ δεν είναι φυσική νόρμα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_{max} = 2$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο : $p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (\lambda-1)^2 - 4$, Άρα $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\right\}$$

Φασματική ακτίνα $\rho(A) = 3$ οπότε $\rho(A) > \|A\|_{max}$.

Επομένως, η $\|\cdot\|_{max}$ δεν είναι φυσική νόρμα β) $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n} \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$$

$$(\text{δηλ.} \quad \|A\|_2 \leq \|A\|_E)$$

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \left((Ax)_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)^2 \leq$$

$$\underset{GS}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2 \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}_{= \|x\|_2^2} =$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij})^2 \right) \|x\|_2 = \|A\|_E^2 \cdot \|x\|_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$$

Ασκηση 3.36

$\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και αντίστοιχη νόρμα στον $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\quad \|A\| < 1$

ΝΔΟ: $I_n - A$ αντιστρέψιμος και,

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$(I_n - A)x = 0 \Rightarrow x = Ax \Rightarrow \|x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Αν $x \neq 0$, τότε $1 \leq \|A\|$ άτοπο

$$1 = \| \underbrace{(I_n - A)^{-1}(I_n - A)}_{I_n} \|$$

- $1 \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \|\underbrace{I_n - A}\|$

$$\leq \underbrace{\|I_n\|}_{1} + \|A\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$$

$$\begin{aligned} 1 &= \|(I_n - A)^{-1} \cdot (I_n - A)\| \\ &\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1} A\| \\ &\geq \|(I_n - A)^{-1}\| - \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \|A\| \\ &= \|(I_n - A)^{-1}\| \underbrace{(1 - \|A\|)}_{>0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 - \|A\|} \geq \|(I_n - A)^{-1}\|$$

Άσκηση 3.64

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ΝΔΟ: Jacobi συγκλίνει Gauss-Seidel γενικά αποκλίνει.

$$G_J = -\underbrace{D^{-1}}_{=I_n}(L+U) = -(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \cdots = -\lambda(\lambda^2 - \tfrac{1}{4})$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm 1/2$

Φασματική ακτίνα: $\rho(G_J) = 1/2$

Αφού $\rho(G_J) < 1$, η μέθοδος συγκλίνει.

Gauss-Seidel

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & -2 & 21/4 \\ 0 & 0 & -7/4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

με πράξεις

$\Rightarrow$ Άνω τριγωνικός άρα οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του,

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 7/4$$

Φασματική ακτίνα:

$$\rho(G_{GS}) = 2 \geq 1 \rightarrow \text{η μέθοδος αποκλίνει.}$$

Άσκηση 3.65

$Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Gauss - Seidel συγκλίνει
- Jacobi γενικά αποκλίνει.

Απόδειξη

Gauss-Seidel :

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

ίδιος με
την προηγούμενη Άσκηση

• Ιδιοτιμές : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$

• Φασματική ακτίνα : $\rho(G_{GS}) = 1/2 < 1$ συγκλίνει

Jacobi :

$$G_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U) = -\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο :

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \dots = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$$

• $\lim_{\lambda \to -\infty} p(\lambda) = +\infty$

• $p(-1) = 1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2 < 0$

Άρα το p έχει (τουλάχιστον) μία ρίζα στο διάστημα $(-\infty, -1)$

Προφανώς, η απόλυτη τιμή αυτής είναι μεγαλύτερη του 1, άρα

$\rho(G_J) > 1$ Επομένως, η μέθοδος γενικά αποκλίνει