27/03/2018

Άσκηση 2.19

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \phi(x^*) = x^*$$

ϕ, $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

Έστω,

$$\phi'(x^*) = \phi''(x^*) = \dots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0$$

$$\text{και } \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

$$x_{n+1} := \phi(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

- Για x_0 αρκετά κοντά στο x^* ισχύει $x_n \to x^*$, $n \to \infty$.

Έχουμε $\phi(x^*) = x^*$ και $\phi'(x^*) = 0$. Όπως στο θεώρημα με την τοπική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα,

$$\lim \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

($\Rightarrow$ η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p).

Απόδειξη: Έχουμε,

$$x_{n+1} = \phi(x_n) = \phi(x^*) + (x_n - x^*)\phi'(x^*) + \dots +$$

$$+ \frac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!} \phi^{(p-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \phi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \phi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = \frac{1}{p!}\,\phi^{(p)}(\xi_n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{p!}\,\phi^{(p)}(x^*)$$

• <u>Εφαρμογή</u>

$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2 \quad , n \in \mathbb{N}_0$

$$x_0 \in [1/3, 5/3]$$

τότε $\quad x_n \to x^* = 1 \;, n \to \infty$

Τάξη σύγκλισης;

Με $\phi(x) = x^2 - 2x + 2$ έχουμε,

$$x_{n+1} = \phi(x_n),\; n \in \mathbb{N}_0$$

Έχουμε,

$$\phi'(x) = 2x - 2 \rightsquigarrow \phi'(1) = 2\cdot 1 - 2 = 0$$

Επίσης,

$$\phi''(x) = 2 \rightsquigarrow \phi''(1) \neq 0$$

Συμπέρασμα $p = 2$ (Υπόθεση: ϕ ομαλή)

Άσκηση 2.4

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης για την $f(x)=0$ με $f: [1,-\sqrt{2}] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$$

NΔΟ: $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

Λύση: $f(x) = (x - 1/2)^3$ και

$$f(-1) = (-3/2)^3 < 0$$
$$\text{και } f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1/2)^3 > 0$$

Η f είναι συνεχής.

- Άρα η μέθοδος της διχοτόμησης μπορεί να εφαρμοστεί και συγκλίνει σε κάποια ρίζα της f στο $[-1,\sqrt{2}]$. Αφού η μοναδική ρίζα είναι το $\frac{1}{2}$ έχουμε

$x_n \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$.

Άσκηση 2.7

$\phi: [a,b] \to [a,b]$, $\phi \in C^1[a,b]$

$\max_{a\le x\le b} |\phi'(x)| < 1$, και $x^* \in [a,b]$ το σταθερό σημείο της ϕ στο $[a,b]$.

Αν $x_0 \in [a,b]$, $x_0 \neq x^*$, $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, ΝΔΟ.

α) Αν $\phi'(x)>0$ $\forall x \in [a,b]$ ΝΔΟ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει <u>μονότονα</u> στο x^*.

β) Αν $\phi'(x)<0$ $\forall x\in[a,b]$ ΝΔΟ το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i για κάθε $i\in\mathbb{N}$.

Λύση:

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του x^* και η σύγκλιση της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο x^* έπονται από το θεώρημα της συστολής.

Έχουμε,
$$x_i - x^* = \phi(x_{i-1}) - \phi(x^*) =$$
$$= \phi'(\xi_i)(x_{i-1}-x^*)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x_i - x^* = \phi'(\xi_i)(x_{i-1}-x^*)}$$

$$\Rightarrow (x_i - x^*)(x_{i-1}-x^*) = \phi'(\xi_i)\underbrace{(x_{i-1}-x^*)^2}_{>0}$$

- Αν $\phi'(\xi_i)>0$ τότε τα $x_i - x^*$ και $x_{i-1}-x^*$ είναι ομόσημα.

- Αν $\phi'(\xi_i)<0$, τότε τα $x_i - x^*$ και $x_{i-1}-x^*$ είναι ετερόσημα

Επίσης, $|x_i - x^*| = \underbrace{|\phi'(\xi_i)|}_{<1} \cdot |x_{i-1} - x^*| < |x_{i-1} - x^*|$

Άσκηση 2.8:

$x_0 \in [0,1]$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ΝΔΟ: $x_n \to x^* \in [0,1]$, $n \to \infty$

• Απόδειξη:

Έστω $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$

θα ήθελα να είναι $[0,1]$ έτσι ώστε να μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα της συστολής.

$$\phi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

Τότε,

$$x_{n+1} = \phi(x_n)$$

Έχουμε, $\phi'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} > 0$ επομένως η ϕ είναι αύξουσα.

Ιδιαίτερα, $\phi(0) \leq \phi(x) \leq \phi(1) \quad \forall x \in [0,1]$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq \frac{\sqrt{e}}{2} < 1$$

Άρα $0 \leq \phi(x) \leq 1$, δηλαδή $\phi : [0,1] \to [0,1]$

Επιπλέον, $|\phi'(x)| = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \le \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$

$$\Rightarrow \max_{0 \le x \le 1} |\phi'(x)| \le \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$$

Άρα η ϕ είναι συστολή στο $[0,1]$

→ Το συμπέρασμα βγαίνει από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.9 :

$$x_0 \in [0,1]$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n}), \ n \in \mathbb{N}_0$$

ΝΔΟ $x_n \to x^* \in [0,1], \ n \to \infty$

→ $\phi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x), \ x \in [0,1]$

$\phi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x) \le 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Επομένως η ϕ είναι φθίνουσα, οπότε $\phi(1) \le \phi(x) \le \phi(0)$ $\forall x \in [0,1]$

Ιδαίτερα,
$$0 < \frac{3-e}{3} \le \phi(x) \le \frac{1}{3} < 1$$

Άρα $\phi : [0,1] \to [0,1]$

$$|\phi'(x)| = \frac{e^x - 1}{3} \le \frac{e^1 - 1}{3} = \frac{e-1}{3} < 1$$

$\Rightarrow \max_{0 \le x \le 1} |\phi'(x)| \le \frac{e-1}{3} < 1$, άρα η ϕ είναι συστολή στο $[0,1]$ και το συμπέρασμα βγαίνει από το θεώρημα της συστολής.

Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$, $\quad x_{n+1} = \frac{1}{6}(3+4x_n^2 - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$

<u>ΝΔΟ</u>: $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ και $x^* \in [0,1]$

και
$$|x_n - x^*| \leq \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|, \quad n \in \mathbb{N}$$
με $a = \frac{8-e}{6}$

<u>Απόδειξη</u>:

Με $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$\phi(x) = \frac{1}{6}(3+4x^2 - e^x)$

έχουμε,
$$\boxed{x_{n+1} = \phi(x_n), n \in \mathbb{N}_0}$$

Έχουμε,
$$\phi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$$

και
$$\phi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

→ Επομένως, η ϕ' είναι αύξουσα.

Άρα,
$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max(|\phi'(0)|, |\phi'(1)|) =$$
$$= \max\left(\frac{1}{6}, \frac{8-e}{6}\right) = \frac{8-e}{6} = a \; (= L < 1)$$

Επομένως η ϕ είναι συστολή στο $[0,1]$ με σταθερά Lipschitz $L=\alpha=\frac{8-e}{6}<1$

Αν αποδείξουμε ότι $\phi:[0,1]\to[0,1]$ τότε τα συμπεράσματα έπονται από το θεώρημα της συστολής.

· Έχουμε:

$$\max_{0\le x\le 1}\phi(x)=\frac{1}{6}\max_{0\le x\le 1}(3+4x^2-e^x)\le$$

$$\le\frac{1}{6}\Big[\max_{0\le x\le 1}\underbrace{(3+4x^2)}_{\text{αύξουσα}}+\max_{0\le x\le 1}\underbrace{(-e^x)}_{\text{φθίνουσα}}\Big]\overset{*}{=}$$

Γενικά: $\max_{a\le x\le b}(f(x)+\phi(x)) = f(\hat{x})+\phi(\hat{x})\le$

$$\le \max_{a\le x\le b}f(x)+\max_{a\le x\le b}\phi(x)$$

Δεν ισχύει ως ισότητα, αντιπαράδειγμα,

$f(x)=x$, $x\in[0,1]$, $\phi(x)=1-x$, $x\in[0,1]$

$$\max_{0\le x\le 1}(f(x)+\phi(x))=1$$

$$\max_{0\le x\le 1}f(x)=\max_{0\le x\le 1}\phi(x)=1$$

$*$

$$=\frac{1}{6}(7-1)=1\le 1$$

και

$$\min_{0\le x\le 1}\phi(x)\ge\frac{1}{6}\Big[\min_{0\le x\le 1}(3+4x^2)+\min_{0\le x\le 1}(-e^x)\Big]=$$

$$= \frac{1}{6}(3-e) \geq 0$$

Συμπέρασμα, $\forall x \in [0,1]$

$0 \leq \phi(x) \leq 1$ δηλαδή όντως, $\phi : [0,1] \to [0,1]$

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$

$x_{n+1} = \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ : $x_n \to x^*$, $n \to \infty$, με $x^* = \cos x^*$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$$

Απόδειξη :

Με $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = \cos x$

έχουμε, $\boxed{x_{n+1} = \phi(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0}$

Έχουμε, $\phi'(x) = -\sin x$ οπότε,

$\max_{x\in\mathbb{R}} |\phi'(x)| = 1$ άρα η ϕ δεν είναι συστολή

→ Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_n \in [-1, 1]$, $n \geq 1$

Με,

$$\phi : [-1, 1] \to [-1, 1]$$

$\phi(x) = \cos x$, έχουμε

$$\boxed{x_{n+1} = \cos x_n \quad , n \geq 1}$$

Τώρα,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |-\sin x| = \max_{0 \leq x \leq 1} \sin x =$$

λόγω του ότι η $\sin x$ είναι περιττή συνάρτηση.

$$= \underbrace{\sin 1}_{= L} < 1$$

Επομένως, η ϕ είναι συστολή στο $[-1, 1]$, με $L = \sin 1 < 1$
Άρα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο x^* στο $[-1, 1]$ (και στο $\mathbb{R}$)
Η σύγκλιση της $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο x^* έπεται από το θεώρημα της συστολής.

Τώρα,

$$x_{n+1} - x^* = \cos x_n - \cos x^* =$$
$$\underset{\text{Θ.Μ.Τ.}}{=} -\sin(\xi_n)(x_n - x^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\sin(\xi_n) \to -\sin x^*, \quad n \to \infty$$

$\boxed{x^* > 0}$

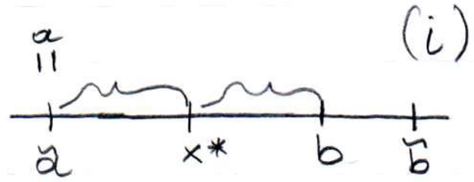
και $-\sin x^* = -\sqrt{1 - \cos x^*} = -\sqrt{1 - (x^*)^2}$

Άσκηση 2.12

$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\phi(x^*) = x^*$
$\phi'(x^*) = 0$

ΝΔΟ: υπάρχει $[a, b]$ με μέσον x^* τ.ω. η ϕ να ικανο-
(← διάστημα $a<b$)
ποιεί στο $[a,b]$ τις υποθέσεις του θεωρήματος της συστολής.

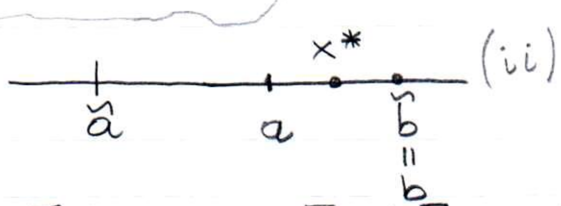
Απόδειξη:



Αφού $\phi'(x^*)=0$ και η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^* υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $[\breve{a}, \breve{b}]$ που περιέχει το x^* ως εσωτερικό σημείο του, τ.ω.

$$\max_{\breve{a} \le x \le \breve{b}} |\phi'(x)| < 1$$

$\boxed{\begin{array}{l} - 1^{\underline{\eta}} \text{ Περίπτωση, (i)} \\ - 2^{\underline{\eta}} \text{ Περίπτωση, (ii)} \end{array}}$

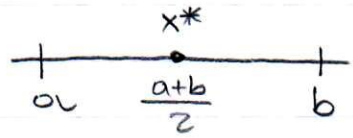


Άρα υπάρχει διάστημα $[a,b]$ υποδιάστημα του $[\breve{a}, \breve{b}]$ με μέσον το x^* τ.ω.,

$$\max_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1$$

Τώρα,

$$\circledast \quad x \in [a,b] \iff |x - x^*| \le \frac{b-a}{2}$$



Επιπλέον, για $x \in [a,b]$ έχουμε,

$$|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| \le$$

$$\le L|x - x^*| \le |x - x^*| \le \frac{b-a}{2}$$

για $L = \max_{a \le x \le b} |\phi'(x)| < 1$

- Σύμφωνα με την $\circledast$ συμπεραίνουμε ότι $\phi(x) \in [a,b]$.

Επομένως, $\phi : [a,b] \to [a,b]$.