Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

Άσκηση 2.18

$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x^* σταθερό σημείο της φ και η φ είναι $p \geq 2$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ~~σε~~ σε μία περιοχή του x^*.
Έστω $\varphi'(x^*) = \dots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ και $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ και το x_0 αρκετά κοντά στο x^*, τότε $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \underbrace{\varphi^{(p)}(x^*)}_{\neq 0}$$ δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς p.

Λύση

(τοπική σύγκλιση Νεύτωνα)

Αφού η $\varphi'(x^*) = 0$ και ($\varphi(x^*) = x^*$), όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2 διαπιστώνουμε ότι $x_n \to x^*$, $n \to \infty$. ∎ 1ο μέρος

Ανάπτυξη Taylor της φ (θέλω διαφορές)

$$\varphi(x_n) = \underbrace{\varphi(x^*)}_{= x^* \text{ (σταθερό σημείο)}} + (x_n - x^*)\underbrace{\cancel{\varphi'(x^*)}}_{\text{υπόθεση}} + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{p-1}}{(p-1)!} \underbrace{\cancel{\varphi^{(p-1)}(x^*)}}_{\text{υπόθεση}} + \frac{(x_n - x^*)^p}{p!} \cdot \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

με ξ_n μεταξύ x_n και x^*.

Άρα, $\varphi(x_n) = x^* + \dfrac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$.

Επομένως, $x_{n+1} = \varphi(x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x^* + \dfrac{(x_n - x^*)^p}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n)$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \varphi^{(p)}(\xi_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{1}{p!} \lim_{n\to\infty} \varphi^{(p)}(\xi_n)$$

$$\overset{\text{συνεχής}}{=} \frac{1}{p!} \cdot \varphi^{(p)}\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n\right)$$ ∎ 2ο μέρος

Άσκηση 2.4

$f : [-1, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} = (x - \frac{1}{2})^3$

Μέθοδος της διχοτόμησης, $x_n \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$

Λύση

$f(-1) < 0$ από $(-1-\frac{1}{2})^3$

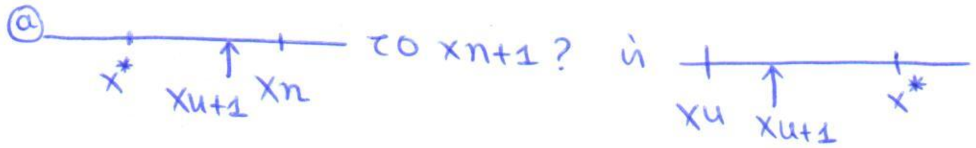
$f(\sqrt{2}) > 0$ από $(\sqrt{2}-\frac{1}{2})^3$, f συνεχής. Άρα, η μέθοδος της διχοτόμησης εφαρμόζεται σε αυτήν την περίπτωση. Επομένως, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει σε μία ρίζα x^* της f που βρίσκεται στο $[-1, \sqrt{2}]$.
Η μόνη ρίζα της f στο $[-1,\sqrt{2}]$ είναι το $x^* = \frac{1}{2}$ άρα αναγκαστικά $x_n \to \frac{1}{2}$, $n \to \infty$ (έχω μία ρίζα μόνο, αν είχα περισσότερες δεν θα ήξερα) ■

Άσκηση 2.7

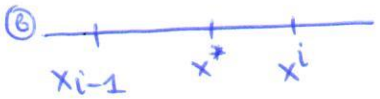
$\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1[a,b]$ $\max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1$.

$x^* \in [a,b]$ σταθερό σημείο της φ, $x_0 \in [a,b]$, $x_0 \neq x^*$ και $x_n := \varphi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$

α) Αν $\varphi'(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$ νδο η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει <u>μονότονα</u> στο x^*.



β) Αν $\varphi'(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$, νδο το x^* περιέχεται μεταξύ x_{i-1} και x_i $\forall i \in \mathbb{N}$



Λύση

Η ύπαρξη και μοναδικότητα του x^* και το γεγονός ότι $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ έπονται από το θεώρημα της συστολής (με $L = \max\limits_{a \le x \le b} |\varphi'(x)| < 1$)

Μένει να αποδείξω τα α), β)

$$x_{i-1} - x^* = \varphi(x_{i-1}) - \varphi(x^*) \Rightarrow \boxed{x_i - x^* = \varphi'(\xi_i)(x_{i-1} - x^*)}$$

β) $\varphi'(\xi_i) < 0 \Rightarrow (x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) < 0 \Rightarrow x_i - x^*$ και $x_{i-1} - x^*$ ετερόσημα.

α) $\varphi'(\xi_i) > 0 \Rightarrow (x_i - x^*)(x_{i-1} - x^*) > 0 \Rightarrow x_i - x^*,\ x_{i-1} - x^*$ ομόσημα.

Επίσης, $|x_i - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi_i)|}_{<1}\,\overbrace{|x_{i-1} - x^*|}^{\neq 0}$

$< |x_{i-1} - x^*|$

Συγκλίνει μονότονα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο x^*. ■

Άσκηση 2.8

$x_0 \in [0,1]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{\frac{x_n}{2}}$, $n \in \mathbb{N}_0$

ΝΔΟ: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο $[0,1]$.

Λύση

Ορίζουμε μία συνάρτηση $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$.

Τότε έχουμε $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος της συστολής.

- Η φ είναι αύξουσα ($\varphi'(x)$ ... από εδώ το βλέπουμε), οπότε $0 \le x \le 1$, θα έχουμε $\varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(1)$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}, \qquad \varphi(1) = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

Έχουμε δηλαδή, $\Rightarrow \frac{1}{2} \le \varphi(x) \le \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\Rightarrow \varphi(x) \in [0,1]$

Επομένως, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ■

- να είναι συστολή, $\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$ είναι αύξουσα. Πότε παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της; όταν $x=1$.

$\max|\varphi'(x)| = \frac{\sqrt{e}}{4} < 1$.

Συμπέρασμα, η φ είναι συστολή. ■

Το αποτέλεσμα έπεται από το θεώρημα της συστολής ■τέλος

<u>Άσκηση 2.9</u>

$x_0 \in [0,1]$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$

<u>ΝΔΟ</u>: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ συγκλίνει και το όριο ανήκει στο $[0,1]$.

<u>Λύση</u>

Ορίζουμε $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^{x})$ (όπου x_n βάζω το x)

τότε $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$

• $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{x}) \leq 0 \ \forall x \in [0,1]$. Άρα, η φ είναι <u>φθίνουσα</u>, οπότε για $x \in [0,1]$ θα έχουμε. $\underbrace{\varphi(1)}_{=\frac{1}{3}(3-e)} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(0)}_{=\frac{1}{3}} \Rightarrow 0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Συμπέρασμα, $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. ■ 1η συνθήκη στο θ. συστολής

• $\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{x})$.

$\Rightarrow |\varphi'(x)| = \frac{1}{3}\underbrace{(e^{x} - 1)}_{\text{αύξουσα}}$. Οπότε $\overset{\text{μέγιστη τιμή, } x=1}{\Rightarrow}$ $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{3}(e-1) \Rightarrow \max|\varphi'(x)| = \frac{1}{3}(e-1) < 1$

■ 2η συνθήκη

Επομένως, η φ ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος της συστολής οπότε τα ζητούμενα έπονται από το θεώρημα. ■

Άσκηση 2.10

$x_0 \in [0,1]$, $x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(3+4x_n^2 - e^{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Εκφώνηση: όμοια με τα προηγούμενα

Λύση

$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3+4x^2 - e^x\right)$

• $\varphi'(x) = \frac{1}{6}(8x - e^x)$

$\varphi''(x) = \frac{1}{6}(8 - e^x) > 0$. Άρα, η $\varphi'(x)$ είναι αύξουσα. Οπότε, $\varphi'(0) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(1)$.

$\Rightarrow -\frac{1}{6} \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{6}(8-e)$, $\forall x \in [0,1]$

Σε απόλυτη τιμή $\left|-\frac{1}{6}\right| < \left|\frac{1}{6}(8-e)\right|$. Άρα, $|\varphi'(x)| \leq \frac{8-e}{6}$

$\Rightarrow \max\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| \leq \frac{8-e}{6} = a$. (το θέτω a το $\frac{8-e}{6}$) < 1

άρα, φ είναι συστολή. ■ 2η συνθήκη

• $\forall x \in [0,1]$

$$\max_{0\leq x\leq 1} \varphi(x) = \frac{1}{6}\max\left(3+4x^2-e^x\right)$$

$$\leq \frac{1}{6}\left(\underbrace{\max_{0\leq x\leq 1}(3+4x^2)}_{\text{αύξουσα } 0\leq x\leq 1,\ x=1} + \overbrace{\max(-e^x)}^{\text{φθίνουσα},\ x=0}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(7-1) = \frac{1}{6}\cdot 6 = 1$$

Βρίσκουμε μία εκτίμηση.

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \Rightarrow$
$\max f(x) \leq \max f_1(x) + \max f_2(x)$

Άρα $\varphi(x) \leq 1$.

Παρόμοια για το ελάχιστο τώρα,

$$\min \varphi(x) \geq \frac{1}{6}\left(\min_x(3+4x^2) + \min_x(-e^x)\right)$$

$$= \frac{1}{6}(3-e) \geq 0$$

Συμπέρασμα, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$. Οπότε, η $\varphi : [0,1] \to [0,1]$. Σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ③ συγκλίνει, το όριο της $x^* \in [0,1]$

και $|x_n - x^*| \le \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|$ ■ 1η συνθήκη (από τους 3 τύπους σε μία απόδειξη που είχαμε να αποδείξουμε είναι ο τύπος (2ος τύπος)).

Άσκηση 2.11

$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = \cos(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ΝΔΟ συγκλίνει η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ $x_n \to x^*$, $n \to \infty$ τ.ω. $\cos x^* = x^*$ (σταθερό σημείο δηλαδή) και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$.
(δηλαδή η τάξη $p=1$).

Λύση

Ορίζουμε $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\varphi(x) = \cos(x)$.

- $\varphi'(x) = -\sin(x) \Rightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| = 1$. σημαίνει ότι η φ δεν είναι συστολή.

Παρατηρούμε ότι, για οποιοδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$, ισχύει $x_n \in [-1,1]$ αφού $\cos x \in [-1,1]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Τροποποιούμε την προηγούμενη συνάρτηση, και είναι $\varphi: [0,1] \to [0,1]$, $\varphi(x) = \cos x$. ■ 1η συνθήκη

- Όμως τώρα $\max\limits_{-1\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \max\limits_{-1\le x\le 1} |\overbrace{\sin(x)}^{\text{περιττή}}| = \max\limits_{0\le x\le 1} \sin x = \sin(1) < 1$ ■ 2η συνθήκη

Άρα, η φ είναι συστολή και συγκλίνει στο $[-1,1]$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συστολής: $x_n \to x^*$, $n \to \infty$
$x^* \in [-1,1]$ και $\underbrace{\cos(x^*)}_{>0\ (\cos(-1),\ \cos(1)>0)} = x^*$.

Έχουμε, $x_{n+1} = \cos x_n - \cos x^* \overset{\text{θ. μέσης τιμής}}{=} (-\sin \xi_n)(x_n - x^*)$

ξn μεταξύ xn και x*

$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n - x^*} = -\sin \xi_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = -\underbrace{\sin x^*}_{>0}$

$= -\sqrt{1-\cos^2 x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$ ■