13/03/2018

• Επίλυση μή γραμμικών εξισώσεων

- Δίνεται μία συνάρτηση f και θέλουμε να προσεγγίσουμε ρίζες της, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση:

$$f(x)=0.$$

  - Αν η f είναι πολυώνυμο μέχρι και τετάρτου βαθμού, υπάρχουν τύποι που δίνουν της ρίζες της.

  - Για πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού δεν υπάρχουν γενικοί τύποι για τις ρίζες του.

→ Οι αριθμητικές μέθοδοι δίνουν γενικά μία ακολουθία "προσεγγίσεων" $x_0, x_1, x_2, \ldots$ κάποιας ρίζας της f.

- Υπό κατάλληλες συνθήκες αυτή η ακολουθία συγκλίνει σε μία ρίζα της f. Τότε, για αρκετά μεγάλο N η x_N είναι καλή προσέγγιση της αντίστοιχης ρίζας της f.

• Συμβολισμός: Αν $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, τότε

$$C(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ συνεχής}\}$$

$$C^n(I) = \{f \in C(I) : f \text{ } n \text{ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη}\} \text{ με } n \in \mathbb{N}$$

• Γράφουμε $C[a,b]$ ή $C(a,b)$ αντί για $C([a,b])$ ή $C((a,b))$ και αντίστοιχα $C^n[a,b]$ ή $C^n(a,b)$.

• <u>Η μέθοδος της διχοτόμησης</u> (Η πιο απλή μέθοδος)

- Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι οικονομική ανά βήμα και <u>συγκλίνει πάντα</u> όταν μπορεί να εφαρμοστεί.
- Βασίζεται στο <u>Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής</u>:

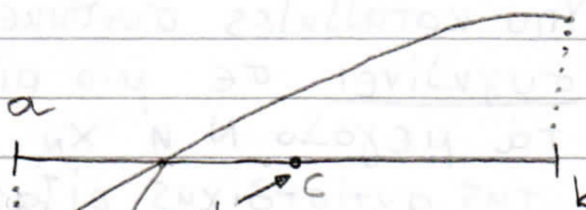
  - Έστω $g \in C[a,b]$ και k πραγματικός αριθμός μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$. Τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τ.ω. $g(x)=k$.

- <u>Ιδέα της μεθόδου</u>:

  Έστω $f \in C[a,b]$ $f(a)\cdot f(b)<0$.
  Τότε η f έχει στο $[a,b]$ (τουλάχιστον μία ρίζα)

<u>Σχηματικά</u>:

$$\boxed{c=\frac{a+b}{2}}$$



$\frac{a+b}{2}$ (διχοτομώ το $[a,b]$)

$0 \in [g(a),g(b)]$, άρα $\exists$ ρίζα στο $[a,b]$.

<u>1η Περίπτωση</u>: $f(c)=0$. Τότε το c είναι ρίζα της f.

<u>2η Περίπτωση</u>: $f(c)\neq 0$
- Αν $f(a)f(c)<0$, τότε υπάρχει ρίζα της f στο (a,c). Αν $f(a)f(c)>0$, τότε $f(c)f(b)<0$, οπότε υπάρχει ρίζα της f στο (c,b).

Για $x^* \in [a,b]$ έχουμε,

$$\rightarrow \left| x^* - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

- <u>Δεδομένα του αλγόριθμου:</u>
  a, b, f τ.ω. $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$

  $\rightarrow f \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$ (ε: μέγιστο επιτρεπτό σφάλμα, ανοχή σφάλματος).

- <u>Αλγόριθμος της διχοτόμησης:</u>

(Βιβλίο σελ. 42)

Υπολόγισε $f(a)$, $\delta = b - a$

1. $\delta \leftarrow \frac{\delta}{2}$

Αν $\delta \leq \varepsilon$, τύπωσε a, b. Έξοδος
διαφορετικά (δηλαδή αν $\delta > \varepsilon$)
υπολόγισε $c = \frac{a+b}{2}$, $f(c)$
τύπωσε $a, b, c, \delta, f(c)$
αν $f(c) = 0$, έξοδος
διαφορετικά (δηλαδή αν $f(c) \neq 0$):
αν $\operatorname{sgn} f(c) = \operatorname{sgn} f(a)$
$a \leftarrow c$, $f(a) \leftarrow f(c)$
διαφορετικά (δηλαδή αν $\operatorname{sgn} f(c) \neq \operatorname{sgn} f(a)$)
$b \leftarrow c$
Πήγαινε στο 1.

- Πρακτικά ζητήματα για τον αλγόριθμο της μεθόδου της διχοτόμησης.

1. Το ερώτημα $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(c)$ δεν πρέπει να τίθεται στην μορφή
   αν $f(a)f(c) > 0$, γιατί μπορεί να οδηγήσει σε υπεκχείλιση.

2. Το $c = \frac{a+b}{2}$, καλό είναι να υπολογίζεται από τη σχέση $c = a + \frac{b-a}{2}$, γιατί διαφορετικά μπορεί να οδηγήσει σε σημείο εκτός του διαστήματος $[a,b]$!

- Παράδειγμα: $b=10$, $t=2$, $U=-L=10$, αποκοπή

$$a = 0.61, \quad b = 0.66$$

$$fl(a+b) = fl(1.27) = 1.2$$

$$\frac{fl(a+b)}{2} = 0.6 < a \; !$$

3. Πολύ μικρή ανοχή σφάλματος ε μπορεί να οδηγήσει σε φαύλο κύκλο.

$$c = a + \frac{b-a}{2}$$

- Αν $fl(c + fl(\varepsilon)) = c$, τότε παίρνουμε $c = a$.

• <u>Πρόταση</u> (Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου της διχοτόμησης)

- Έστω: $f \in C[a,b]$, $\mathrm{sgn} f(a) \neq \mathrm{sgn} f(b)$, και $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων (δηλαδή των μέσων των διαδοχικών διαστημάτων) που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης.

- Τότε είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N είτε $x_n \to x^*$ για $n \to \infty$, όπου x^* λύση της εξίσωσης $f(x)=0$. Μάλιστα ισχύει,

$$(1) \quad \boxed{|x^* - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots}$$

• <u>Απόδειξη</u>: Θέτοντας $a_1 := a$, $b_1 := b$ ας συμβολίσουμε με $I_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ τα διαδοχικά διαστήματα που κατασκευάζει η μέθοδος. Έστω x_i το μέσον του I_i. Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$. Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει ρίζα της f συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα I_i.

• Αν βρούμε την ρίζα ακριβώς, το πλήθος των I_i είναι πεπερασμένο.

• Διαφορετικά το πλήθος των I_i είναι άπειρο.

→ Μένει να αποδείξουμε την εκτίμηση (1), από την οποία έπεται αμέσως η σύγκλιση.

Έχουμε,

$$x^* \in I_n \rightsquigarrow x^* - x_n = x^* - \frac{a_n + b_n}{2} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \boxed{|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2}}$$

Αλλά,

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{2^2} = \dots =$$

$$= \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

Επομένως,

$$|x^* - x_n| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

- Έστω $\varepsilon > 0$. Ποιό πλήθος επαναλήψεων n εξασφαλίζει ότι η προσέγγιση x_n διαφέρει από κάποια x^* το πολύ ε?

Αρκεί,

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^n \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) \leq n \log 2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{n \geq \frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}}$$

15/03/2018

• Μέθοδος της διχοτόμησης

– Πλεονεκτήματα:

1. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό γενικές συνθήκες για την f: απαιτεί συνέχεια της f και αλλαγή προσήμου στην περιοχή μιάς ρίζας.

2. Συγκλίνει πάντα, όταν μπορεί να εφαρμοστεί.

3. Απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f σε κάθε βήμα.

4. Μπορούμε να προσδιορίσουμε εκ των προτέρων το πλήθος των βημάτων που εξασφαλίζουν την προσέγγιση μίας ρίζας με δεδομένη ακρίβεια.

– Μειονέκτημα:

• Η μέθοδος συγκλίνει πολύ αργά με αποτέλεσμα το συνολικό (υπολογιστικό) κόστος να είναι υψηλό.

→ Στην πράξη η μέθοδος χρησιμοποιείται ως ένας αρχικός "χοντρικός" εντοπισμός μίας ρίζας.

• Επαναληπτικές μέθοδοι:

- Ιδέα (αυτών των μεθόδων): Γράφουμε την εξίσωση $f(x)=0$ ισοδύναμα στη μορφή $\boxed{x=\phi(x)}$. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει αυτό.

Π.χ. αν μια g δεν έχει ρίζες,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)f(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x+g(x)f(x)}_{\phi(x)}=x$$

- Άρα, ξεκινώντας από ένα x_0 υπολογίζουμε μια ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αναδρομικά από τη σχέση,

$$(*) \quad \boxed{x_n := \phi(x_{n-1}),\ n\in\mathbb{N}}$$

- Ορισμός (Σταθερό σημείο)
Ένα σημείο x^* στο πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης ϕ λέγεται σταθερό σημείο της ϕ αν $\phi(x^*)=x^*$. Π.χ. τα σημεία της $f(x)=x$ στον $\mathbb{R}$ είναι όλα σταθερά σημεία.

• Υπόθεση: Έστω ότι η ακολουθία που παράγεται από την $(*)$ συγκλίνει, και έστω x^* το όριό της.
Έστω ότι η ϕ είναι συνεχής στο x^*.

• <u>Ερώτημα</u> : Είναι το x^* σταθερό σημείο τη ϕ;

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n-1}) \overset{\text{η } \phi \text{ είναι συνεχής στο } x^*}{=} \phi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) =$$

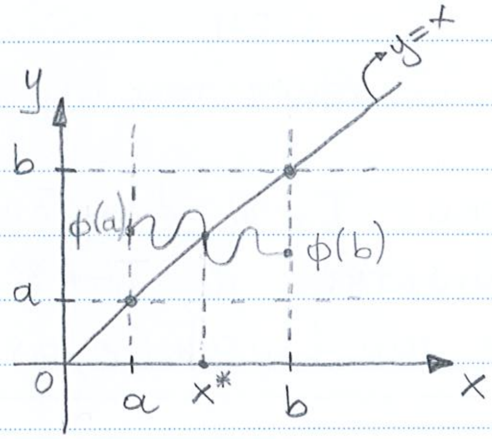
$= \phi(x^*)$, άρα το x^* είναι όντως σταθερό σημείο της ϕ.

– <u>Πρόταση (Ύπαρξη σταθερού σημείου)</u> :

– Κάθε συνεχής (a) συνάρτηση, $\phi : [a,b] \to [a,b]$ (b) έχει (τουλάχιστον) ένα σταθερό σημείο.

Τα (a), (b) είναι υποθέσεις

<u>Σχηματικά</u> :



• <u>Απόδειξη</u> : Προφανώς ισχύει μία από τις ακόλουθες σχέσεις :

α) $\phi(a) = a$ ← a σταθερό σημείο
β) $\phi(b) = b$ ← b σταθερό σημείο
γ) $\phi(a) > a$ και $\phi(b) < b$

– Αρκεί να δείξω ότι και στην περίπτωση (γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.

Οπότε,

Θέτουμε $g(x) := \phi(x) - x$, $x \in [a,b]$
Αρκεί να αποδείξουμε ότι η g έχει (τουλάχιστον) μία ρίζα.

- Η g είναι συνεχής
- $g(a) = \phi(a) - a > 0$
- $g(b) = \phi(b) - b < 0$

- Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x^* \in (a,b)$ τ.ω. $g(x^*) = 0$.

Άρα $\phi(x^*) - x^* = 0$

δηλ, $x^* = \phi(x^*)$

- <u>Ορισμός</u> (<u>Συνθήκη του Lipschitz</u>)

- Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα. Λέμε ότι μία συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την <u>συνθήκη του Lipschitz</u>, αν υπάρχει $L \geq 0$ τ.ω.

$$\boxed{\forall x,y \in I \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y|}$$

- Ιδιαίτερα, αν το L μπορούμε να το επιλέξουμε μικρότερο της μονάδας, τότε η ϕ λέγεται <u>συστολή</u> στο I. $(0 \leq L < 1)$

- Παρατηρήσεις :

α) Από τη συνθήκη του Lipschitz έπεται η συνέχεια της ϕ.

β) Η $\phi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz (με $L=1$) αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη.

γ) Έστω ότι η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο I. Τότε η ϕ ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz, αν και μόνο αν η $|\phi'(x)|$ είναι φραγμένη στο I.

δ) Ειδική περίπτωση : Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα.

- Ισχυρισμός : Αν $\phi \in C^1[a,b]$, τότε η ϕ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με,

$$L = \max_{a \le x \le b} |\phi'(x)|$$

Πραγματικά, για $x \neq y$ έχουμε

$$\frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} = \phi'(\xi)$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{\phi(x)-\phi(y)}{x-y} \right| = |\phi'(\xi)| \le \underbrace{\max_{a \le \xi \le b} |\phi'(\xi)|}_{=L}$$

Οπότε,

$$|\phi(x)-\phi(y)| \le L|x-y|$$

ε) $\phi(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,1]$

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \phi'(x)\to\infty \text{ για } x\searrow 0$$

→ Δεν ικανοποιεί η συνθήκη του Lipschitz.

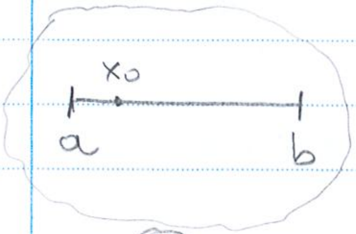
• <u>Θεώρημα</u> (της συστολής)

Έστω $\phi:[a,b]\to[a,b]$ μία συστολή με σταθερά $L\,(<1)$. Τότε η ϕ έχει στο $[a,b]$ μοναδικό σταθερό σημείο (ακριβώς ένα), δηλαδή

$$\exists_1\, x^*\in[a,b] \quad \phi(x^*)=x^*$$

- Για τυχαία αρχική τιμή $x_0\in[a,b]$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ με $x_n:=\phi(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$, είναι <u>καλά ορισμένη</u> (δηλαδή για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει ότι $x_n\in[a,b]$), <u>συγκλίνει</u> προς το x^*, και για τα σφάλματα x_n-x^* ισχύουν οι εκτιμήσεις:

(1) $$|x_n-x^*|\le L^n|x_0-x^*| \overset{(*)}{\le} L^n\max(x_0-a,\, b-x_0)$$



(*)

(2) $|x_n - x^*| \le \dfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$

(3) $|x_n - x^*| \le \dfrac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|$

• Απόδειξη:

• Μοναδικότητα σταθερού σημείου:

- Έστω $x^*, y^* \in [a,b]$, $x^* \neq y^*$,

$\phi(x^*) = x^*$ και $\phi(y^*) = y^*$.

Τότε θα είχαμε, $x^* - y^* = \phi(x^*) - \phi(y^*) \Rightarrow$

$$|x^* - y^*| = |\phi(x^*) - \phi(y^*)| \le \underset{<1 \text{ (Από υπόθεση)}}{L}\,\underbrace{|x^* - y^*|}_{\neq 0}$$

Οπότε, $L|x^* - y^*| < |x^* - y^*|$

Συνεπώς,

$|x^* - y^*| < |x^* - y^*|$

→ Άτοπο!

→ Άρα υπάρχει ακριβώς ένα σημείο.

· Ύπαρξη και (1):

Η ύπαρξη σταθερού σημείου έπεται από την προηγούμενη πρόταση.

Έχουμε $x_0 \in [a,b]$ και $x_1 = \phi(x_0) \in [a,b]$ και επαγωγικά βλέπουμε ότι $x_n \in [a,b]$, για $n \in \mathbb{N}$. Άρα η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι όντως καλά ορισμένη.

Τώρα,

$$x_n - x^* = \phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)$$

$$\Rightarrow |x_n - x^*| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(x^*)| \leq L|x_{n-1} - x^*|,$$

$$|x_n - x^*| \leq L|x_{n-1} - x^*|$$

- Επαγωγικά παίρνουμε,

$$\boxed{|x_n - x^*| \leq L^n |x_0 - x^*|}$$

Αυτή η εκτίμηση δίνει αμέσως την (1).

• Ύπαρξη σταθερού σημείου και 2:

- Έχουμε,

$$x_n - x_{n-1} = \phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| = |\phi(x_{n-1}) - \phi(x_{n-2})|$$

$$\Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq L|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

Άρα, επαγωγικά παίρνουμε:

$$(*) \quad \boxed{|x_n - x_{n-1}| \leq L^{n-1}|x_1 - x_0|} \longrightarrow \text{Για διαδοχικούς όρους.}$$

- Επομένως, για $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+k} - x_n = (x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)$$

προσθέτω και αφαιρώ τους ενδιάμεσους όρους

Τριγωνική ιδιότητα (ανισότητα)

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} + x_{n+k-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\Rightarrow |x_{n+k} - x_n| \underset{(*)}{\leq} L^{n+k-1}|x_1 - x_0| + L^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \cdots + L^n|x_1 - x_0|$$

Οπότε,

$$|x_{n+k} - x_n| \leq L^n \underbrace{(1 + L + L^2 + \cdots + L^{k-1})}_{\frac{1-L^k}{1-L}} \cdot |x_1 - x_0|$$

δηλαδή,

$$|x_{n+k} - x_n| \leq L^n \frac{1 - \overset{\leq 0}{L^k}}{1 - L}|x_1 - x_0|$$

$$\Rightarrow \boxed{|x_{n+k}-x_n| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|}$$

- Το φράγμα στο δεξιό μέλος γίνεται όσο μικρό θέλουμε, αρκεί να επιλέξουμε το n αρκετά μεγάλο.

• Ορισμός σύγκλισης ακολουθίας:

$a_n \to a,\ n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$

• Βασική ακολουθία (ή ακολουθία Cauchy):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon$$

- Αν μία ακολουθία συγκλίνει είναι ακολουθία Cauchy και αντίστροφα.

- Αφού η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy, θα συγκλίνει. Έστω x^* το όριο της. Έχουμε,

$a \leq x_n \leq b$

άρα $a \leq x^* \leq b$

- Όπως έχουμε δει το x^* είναι τότε σταθερό σημείο της ϕ,

$$\left(x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n-1}) \underset{\phi \text{ συνεχής στο } x^*}{=} \phi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \right.$$

$$\left. = \phi(x^*) \right) \text{ (Υπαρξη σταθερού σημείου).}$$

- Έχουμε,

$$|x_{n+k} - x_n| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \quad \text{(Βιβλίο σελ. 49)}$$

$$\Big\downarrow k \to \infty$$

$$|x^* - x_n| \le \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Αυτή είναι η (2).

Απόδειξη της (3):

Θέτουμε $y_0 := x_{n-1}$ και $y_1 = \phi(y_0) = \phi(x_{n-1}) = x_n$

και εφαρμόζουμε τη (2):

$$|y_1 - x^*| \le \frac{L}{1-L} |y_1 - y_0|$$

οπότε,

$$|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$ δηλαδή ισχύει η (3).

- Παρατηρήσεις:

a) Η (3) είναι καλύτερη της (2),

$$\frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}| \underset{(*)}{\le} \frac{L}{1-L} L^{n-1} |x_1 - x_0|$$

$$= \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Το πρώτο φράγμα στην 1 δεν είναι χρήσιμο στην πράξη γιατί χρησιμοποιεί το άγνωστο x^*

Έχουμε,

$$x_1 - x_0 = (x_1 - x^*) + (x^* - x_0) =$$

$$= [\phi(x_0) - \phi(x^*)] + (x^* - x_0)$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le \underbrace{|\phi(x_0) - \phi(x^*)|}_{\le L|x_0 - x^*|} + |x^* - x_0|$$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| \le (1+L)|x_0 - x^*|$$

• <u>Συμπέρασμα</u>: Το φράγμα στη 2 είναι το πολύ κατα τον παράγοντα $\frac{1+L}{1-L}$ μεγαλύτερο από το πρώτο φράγμα στην 1

β) Η 3 είναι εκτίμηση <u>εκ των υστέρων</u>, μας δίνει πληροφορία για το x_n αφού πρώτα το βρούμε

Η 2 είναι εκτίμηση <u>εκ των προτέρων</u>.

γ) Τι γίνεται αν $L=1$?

<u>Παράδειγμα</u>: $\phi(x) = -x \quad , x \in [-1,1]$

• $\phi : [-1,1] \to [-1,1]$

• $\phi(x) - \phi(y) = -x - (-y) = y - x$

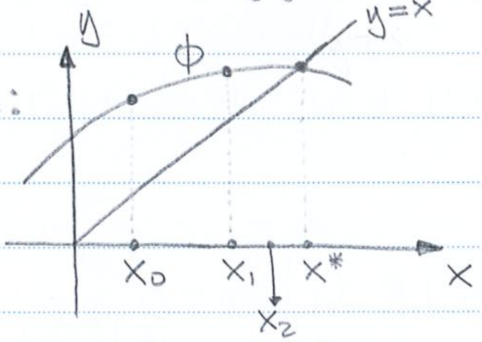
$$\Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| \underset{L=1}{=} |x - y|$$

• Έστω $x_0 \in [-1,1]$, $x_0 \neq 0$.
Τότε, η ακολουθία $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι:

$x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots$ Δεν συγκλίνει!

• <u>Γεωμετρική εξήγηση</u>:

Συγκλίνουσα:



• <u>Ταχύτητα (τάξη) σύγκλισης ακολουθιών</u>

- Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ μία συγκλίνουσα ακολουθία και x^* το όριό της.

• <u>Ορισμός</u> (τάξη σύγκλισης):

- Λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (τουλάχιστον) <u>γραμμικά</u> ή ότι η <u>τάξη σύγκλισης</u> είναι (τουλάχιστον) ένα, αν υπάρχει σταθερά $C<1$ και $N \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$$\forall n \geq N \quad |x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|$$

- Λέμε ότι η σύγκλιση είναι (τουλάχιστον) <u>τάξης</u> <u>p</u>, $p>1$, αν υπάρχει σταθερά C τ.ω.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^p$$

$\hookrightarrow$ επιτρέπω το C να είναι αρκετά μεγάλο.

Για $p=2$ ή 3 μιλάμε για τετραγωνική και κυβική, αντίστοιχα, σύγκλιση.

• <u>Παρατηρήσεις</u>:

α) Αν η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) p, τότε είναι και (τουλάχιστον) q για $1 \le q \le p$.

$$\bullet\ |x_{n+1}-x^*| \le C|x_n-x^*|^p$$
$$= \underbrace{C|x_n-x^*|^{p-q}}_{\le \tilde{C}}|x_n-x^*|^q$$

β) Πώς προσδιορίζουμε την τάξη σύγκλισης;

- Γενικά αυτό είναι ένα δύσκολο ζήτημα. Για ακολουθίες της μορφής $x_n=\phi(x_{n-1})$, $n\in\mathbb{N}$ με <u>ομαλή ϕ</u> η τάξη είναι φυσικός αριθμός και προσδιορίζεται εύκολα. (Άσκηση 2.19)

- Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση όπου $x_n \ne x^*$ για κάθε n.

Τότε, η $\oplus$ γράφεται στην μορφή,

$$\left|\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p}\right| \le C \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία,

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι <u>φραγμένη</u>.

- Μία ικανή συνθήκη είναι αυτή η ακολουθία να συγκλίνει.

Έστω,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = a$$

• <u>Ισχυρισμός</u>: Αν $a \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι <u>ακριβώς</u> p.

• Ότι είναι τουλάχιστον p το ξέρουμε ήδη.

• Θα αποδείξουμε ότι η τάξη δεν μπορεί να είναι $p+\varepsilon$ με $\varepsilon > 0$.

- Έστω,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^{p+\varepsilon}$$

Τότε,

$$\left| \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} \right| \leq C |x_n - x^*|^{\varepsilon}$$

Αφήνοντάς το n να τείνει στο ∞ παίρνουμε, $|a| \leq C \cdot 0 \Rightarrow a = 0$, Άτοπο.

→ Πίσω στο Θεώρημα της συστολής:

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*)$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - x^*| \leq \underbrace{L}_{<1} |x_n - x^*| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

• <u>Συμπέρασμα</u>: Η τάξη σύγκλισης είναι (τουλάχιστον) ένα.

<u>Ερώτημα</u>: Πότε είναι η τάξη υψηλότερη του ένα;

<u>Υπόθεση</u>: $\phi \in C^1[a,b]$ (ϕ ομαλή)

Τότε,

$$x_{n+1} - x^* = \phi(x_n) - \phi(x^*) =$$

$$= \phi'(\xi_n)(x_n - x^*)$$ με ξ_n μεταξύ x_n και x^*

Άρα,

$$\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \phi'(\xi_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = \lim_{n\to\infty} \phi'(\xi_n) = \phi'(x^*)$$

• <u>Συμπέρασμα</u>: Αν $\phi'(x^*) \neq 0$, τότε η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς 1.

– Για να είναι η τάξη μεγαλύτερη του 1, πρέπει να ισχύει $\phi'(x^*) = 0$.

22/03/2018

• Η μέθοδος του Νεύτωνα

– Είναι η πιό γνωστή επαναληπτική μέθοδος.

Έστω x_n προσέγγιση μιας λύσης x^* της εξίσωσης $f(x)=0$. Τότε ορίζουμε την προσέγγιση x_{n+1} ως εξής:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>Υπόθεση</u>: $f'(x_n) \neq 0$

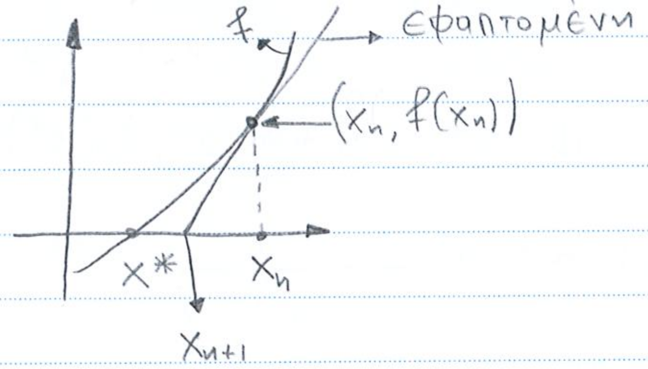
– Είναι επαναληπτική μέθοδος με <u>συνάρτηση επανάληψης</u>:

$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, δηλαδή γράφεται

στη μορφή, $\boxed{x_{n+1} = \phi(x_n),\ n \in \mathbb{N}_0}$

• <u>Τρόποι κατασκευής της μεθόδου</u>:

– <u>Γεωμετρικός τρόπος κατασκευής</u>:



Εξίσωση της εφαπτομένης στο γράφημα της f στο σημείο $(x_n, f(x_n))$:

$$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n}=f'(x_n)$$

$$\Rightarrow y=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)$$

- Τέμνει τον άξονα των x στο σημείο που δίνει $y=0$, δηλαδή όταν,

$$f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)=0 \Leftrightarrow$$

$$x=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- <u>Αναλυτικός τρόπος κατασκευής:</u>

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{g(x)f(x)+x}_{\phi(x)}=x$$

Έχουμε $\phi'(x)=1+g'(x)f(x)+g(x)f'(x)$

οπότε,

$$\phi'(x^*)=1+g'(x^*)\cancel{f(x^*)}^{\,0}+g(x^*)f'(x^*)=0$$

για να έχω σύγκλιση ταχύτερη από 1.

$$\Leftrightarrow g(x^*)=-\frac{1}{f'(x^*)}$$

Αυτό μας οδηγεί στην επιλογή $g(x)=-\dfrac{1}{f'(x)}$

που μας οδηγεί στην μέθοδο του Νεύτωνα.

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

- Υποθέτουμε ότι η x^* είναι απλή ρίζα της f και η f είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*. Τότε η ϕ είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^* και

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} =$$

$$= \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

→ Άρα $\boxed{\phi'(x^*) = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{[f'(x^*)]^2} = 0}$

- Θεώρημα (Τοπικά τετραγωνική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)

Έστω x^* απλή ρίζα μίας συνάρτησης f, δηλαδή $f(x^*)=0$ και $f'(x^*) \neq 0$, και έστω ότι η f είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει ένα κλειστό διάστημα I με μέσον το x^*, τ.ω. για $x_0 \in I$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που κατασκευάζει η μέθοδος του Νεύτωνα,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

να συγκλίνει στο x^*. Μάλιστα, ισχύει

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

δηλαδή η τάξη σύγκλισης είναι τουλάχιστον 2, και είναι ακριβώς 2 άν $f''(x^*)\neq 0$.

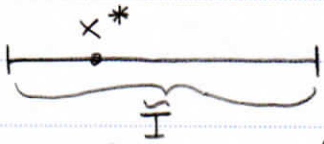
• <u>Απόδειξη</u>: Όπως είδαμε για τη συνάρτηση επανάληψης,

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ισχύει $\phi'(x^*)=0$.

– Αφού η ϕ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^* και $\phi'(x^*)=0$, υπάρχει ένα κλειστό διάστημα $\tilde{I}$ που περιέχει το x^* στο εσωτερικό του τ.ω.

$$\max_{x\in\tilde{I}} |\phi'(x)| = L < 1$$



– Ιδιαίτερα υπάρχει κλειστό διάστημα (ώστε να πάρω μέγιστο) I με μέσον το x^* τ.ω.

$$\max_{x\in I} |\phi'(x)| = L < 1$$

Ιδιαίτερα, η ϕ είναι <u>συστολή</u> στο I.

Τώρα, για $x\in I$ έχουμε,

$$\phi(x) - x^* = \phi(x) - \phi(x^*) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow |\phi(x) - x^*| \le L|x - x^*| \le |x - x^*|$$

- Συμπέρασμα $\phi(x) \in I$.
  Άρα $\phi : I \to I$

→ Η σύγκλιση της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο x^* έπεται από το θεώρημα της συστολής.

- <u>Απόδειξη της (*)</u> :

Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως πρός το σημείο x^*, έχουμε,

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2!} f''(\xi_{n_1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})$$

με ξ_{n_1}, ξ_{n_2} σημεία μεταξύ x_n και x^*.

Αντικαθιστούμε στη μέθοδο του Νεύτωνα και παίρνουμε,

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^2}{2} f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})} =$$

$$= (x_n - x^*)^2 \frac{f''(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2} f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})}$$

Άρα,

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} = \frac{f''(\xi_{n2})-\frac{1}{2}f''(\xi_{n1})}{f'(x^*)+(x_n-x^*)f''(\xi_{n2})} \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\longrightarrow \frac{f''(x^*)-\frac{1}{2}f''(x^*)}{f'(x^*)} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

- Πρόταση (Ολική σύγκλιση της μεθόδου του Νεύτωνα)
  - Έστω $a\in\mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και τ.ω. $f(a)<0$ και $f'(x)>0$ και $f''(x)>0$ για $x\geq a$.
  Τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο διάστημα $[a,\infty)$ (απλή ρίζα $f'(\rho)\neq 0$).
  Για οποιοδήποτε $x_0\geq a$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στη ρ.

- Απόδειξη:

  - Μοναδικότητα ρίζας: Προφανής αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

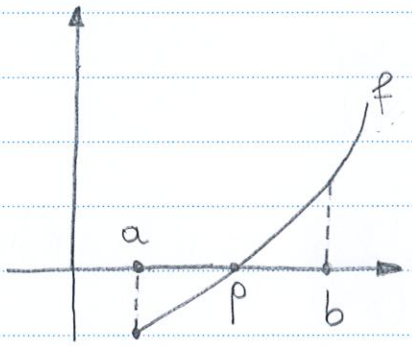
  - Ύπαρξη ρίζας: Αφού η f είναι συνεχής και παίρνει και αρνητικές τιμές, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάποιο $b>a$ ισχύει $f(b)>0$.

Έχουμε, $f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)}_{>0}$

$\Rightarrow$ Αν $f(a) + (b-a)f'(a) > 0$
(δηλαδή $b > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$), τότε $f(b) > 0$

- <u>Σύγκλιση</u>:

$$f(x) > 0 \iff x > \rho$$
$$f(x) < 0 \iff x < \rho$$



$x_{n+1} = \phi(x_n) \iff x_{n+1} - \rho = \phi(x_n) - \phi(\rho) \Rightarrow$

$x_{n+1} - \rho = \phi'(\xi_n)(x_n - \rho)$

$\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ >0

$\Rightarrow \phi'(x) > 0 \iff x > \rho$
$\phi'(x) < 0 \iff x < \rho$

<u>Συμπέρασμα</u>:

$x_n > \rho \Rightarrow x_{n+1} > \rho$
$x_n < \rho \Rightarrow x_{n+1} > \rho$

Με εξαίρεση το x_0 (που μπορεί να είναι είτε μικρότερο είτε μεγαλύτερο του ρ) για $x_0 \neq \rho$ ισχύει πάντα, $x_n > \rho \ \forall n \geq 1$

Επίσης, για $n \geq 1$, έχουμε,

$$x_{n+1} = x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{>0} < x_n$$

• Συμπέρασμα: Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη προς τα κάτω.

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

Έστω x^* το όριο της, έχουμε,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty}$$

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Leftrightarrow f(x^*) = 0$$

Άρα $x^* = p$.

• Ερώτημα: Τι συμβαίνει στην περίπτωση πολλαπλής ρίζας.

Παράδειγμα: $f(x) = x^2$, το $x=0$ διπλή ρίζα

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n)^2}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n \rightsquigarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n x_0 \to 0$$

για $n \to \infty$

$$\Rightarrow x_{n+1} - 0 = \frac{1}{2}(x_n - 0)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - 0}{x_n - 0} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \text{Τάξη σύγκλισης } p = 1$$

27/03/2018

• Γενική Περίπτωση:

Έστω x^* μία ρίζα πολλαπλότητας m μιας συνάρτησης f, δηλαδή,

$$f(x^*) = f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0$$
$$\text{και} \quad f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Έστω ότι η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του x^*.

- Αν η αρχική τιμή x_0 είναι κοντά στο x^*, τότε η ακολουθία προσεγγίσεων $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει στο x^*.

- Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης;

Με ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \cdots + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n_1}) \qquad =0$$

, με ξ_{n_1} ένα σημείο μεταξύ x_n και x^*.

Άρα $f(x_n) = \dfrac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_{n_1})$.

Εντελώς αντίστοιχα έχουμε,

$$f'(x_n) = \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(\xi_{n_2})$$

Άρα,

$$x_{n+1}-x^*=x_n-x^*-\frac{\dfrac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi_{n_1})}{\dfrac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(\xi_{n_2})}$$

$m!=m(m-1)!$

$$\Rightarrow x_{n+1}-x^*=(x_n-x^*)-\frac{x_n-x^*}{m}\frac{f^{(m)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(\xi_{n_2})}\Rightarrow$$

$$\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=1-\frac{1}{m}\frac{f^{(m)}(\xi_{n_1})}{f^{(m)}(\xi_{n_2})}\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\frac{1}{m}$$

$f^{(m)}(\xi_{n_1})\to f^{(m)}(x^*)$

$f^{(m)}(\xi_{n_2})\to f^{(m)}(x^*)$

• <u>Συμπέρασμα</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*}=1-\frac{1}{m}$$

- Για $m\geq 2$ έχουμε $1-\frac{1}{m}\neq 0$, άρα η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς ένα.

Αν είναι γνωστή η πολλαπλότητα m, τότε η παραλλαγή της μεθόδου του Νεύτωνα,

$$x_{n+1}=x_n-\frac{m f(x_n)}{f'(x_n)}$$ συγκλίνει <u>τετραγωνικά</u>.

- Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου

  - Πλεονεκτήματα:

    Για αρχική προσέγγιση x_0 κοντά σε μία ρίζα x^* μιας ομαλής συνάρτησης f η μέθοδος συγκλίνει ταχύτατα αν η x^* είναι απλή ρίζα ή αν τροποποιήσουμε κατάλληλα τη μέθοδο όταν γνωρίζουμε την πολλαπλότητα m της ρίζας x^*. Σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις η μέθοδος συγκλίνει ολικά.

  - Μειονεκτήματα:

    Το διάστημα I στο οποίο πρέπει να ανήκει η αρχική προσέγγιση x_0 ώστε η μέθοδος να συγκλίνει σε μία ρίζα x^* της f δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων και μπορεί να είναι πολύ μικρό.

- Χρήση της μεθόδου στην πράξη

  Εκτός από τις περιπτώσεις που η μέθοδος του Νεύτωνα συγκλίνει ολικά, αυτή χρησιμοποιείται στην πράξη σε συνδυασμό με άλλες, βραδύτερες μεθόδους, όπως η μέθοδος της διχοτόμησης. Με τη βραδύτερη μέθοδο υπολογίζουμε μια καλή αρχική προσέγγιση για τη μέθοδο του Νεύτωνα και εν συνεχεία εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα για να επιταχύνουμε τη σύγκλιση.

• <u>Μέθοδος της τέμνουσας</u>

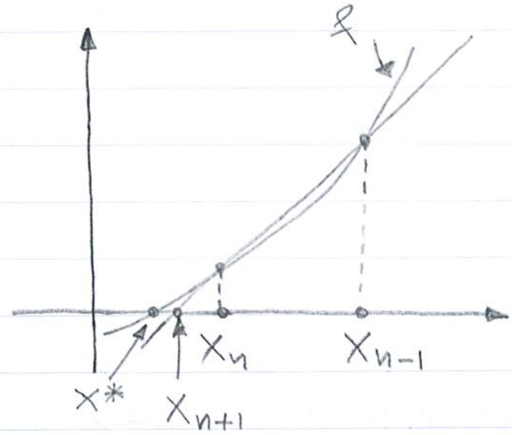
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$$

- Προκύπτει από την μέθοδο του Νεύτωνα προσεγγίζοντας την παράγωγο με τον λόγο $\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$

- Η μέθοδος <u>δεν</u> μπορεί να γραφεί στη μορφή $\boxed{x_{n+1} = \phi(x_n)}$ με κατάλληλο ϕ.

- Χρειάζεται <u>δύο αρχικές προσεγγίσεις</u> x_0 και x_1.

- <u>Γεωμετρική ερμηνεία</u>:



• <u>Θεώρημα (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου της τέμνουσας)</u>

Έστω x^* ρίζα μιας συνάρτησης f και $(a,b) \subset \mathbb{R}$ με $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα διάστημα I που περιέχει το x^* τ.ω. για $x_0, x_1 \in I$ με $x_0 \neq x_1$ η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος της τέμνουσας με αρχικές τιμές x_0 και x_1 είναι καλά ορισμένη και συγκλίνει στο x^*. Η τάξη σύγκλισης είναι $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.62$

→ χρυσή τομή

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

- Το κόστος της μεθόδου της τέμνουσας ανά βήμα είναι ένας υπολογισμός της f.

- Παρατήρηση: Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία συγκλίνουσα ακολουθία, y^* το όριό της, και έστω ρ η τάξη σύγκλισης. Τότε η ακολουθία,

$\tilde{y}_n := y_{2n}$, συγκλίνει στο y^* και η τάξη

(παίρνω κάθε 2ο όρο)

σύγκλισής της είναι (τουλάχιστον) ρ^2.

- Απόδειξη:

Έχουμε $|y_{n+1}-y^*| \le C\,|y_n-y^*|^\rho$ (*)

Άρα, $|\tilde{y}_{n+1}-y^*| = |y_{2n+2}-y^*| \le C\,|y_{2n+1}-y^*|^\rho$

$$\overset{(*)}{\le} C\left(C\,|\underbrace{y_{2n}}_{\tilde{y}_n}-y^*|^\rho\right)^\rho$$

$$\Longrightarrow |\hat{y}_{n+1} - y^*| \leq \underbrace{C^{p+1}}_{\hat{C}} |\hat{y}_n - y^*|^{p^2}$$

- <u>Παρατηρήσεις</u>:

  - Η μέθοδος της τέμνουσας χρησιμοποιείται στην πράξη <u>συχνότερα</u> από τη μέθοδο του Νεύτωνα, επειδή απαιτεί μόνο γνώση της f και όχι της f'.
  - Είναι λίγο βραδύτερη από τη μέθοδο του Νεύτωνα και χρειάζεται αρκετά καλές προσεγγίσεις για να συγκλίνει.

  - Είναι πιό οικονομική από τη μέθοδο του Νεύτωνα ανά βήμα.

  - <u>Υπόθεση</u>: Το κόστος υπολογισμού των f και f' είναι το ίδιο.

    Ποιά μέθοδος είναι οικονομικότερη συνολικά;

    Επειδή, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ <u>η</u> $2.62 > 2$

    η μέθοδος της τέμνουσας είναι συνολικά οικονομικότερη απο τη μέθοδο του Νεύτωνα.