19/8/2016

Ασκήσεις 1ου κεφ.

$\boxed{1.2}$

α) $1-\cos x$, $|x|$ μικρή χωρίς ανάπτυγμα Taylor

Λύση

έχουμε χρησιμοποιήσει την ταυτότητα στο μάθημα.

$$1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

β) $e^{x-y} = e^x \cdot e^{-y} = e^x \cdot \frac{1}{e^y} = \frac{e^x}{e^y}$

γ) $\log x - \log y = \log\frac{x}{y}$

δ) $\sin(a+x)-\sin(a)$, $|x|$ μικρή το $a+x$ είναι κοντά στο a και $\sin(\alpha+x)$ κοντά με $\sin(a)$ άρα αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$ ← τύπος

Άρα, $\sin(\underbrace{\alpha+x}_{x}) - \sin(\underbrace{\alpha}_{y}) = 2\sin\frac{\cancel{\alpha}+x-\cancel{\alpha}}{2}\cos\frac{a+x+a}{2}$

$$= 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{2a+x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\left(a+\frac{x}{2}\right)$$

$\boxed{1.3}$

$x^2-2ax+b=0$, $a,b>0$ και $a^2 \gg b$

Λύση

Ρίζες, $x_1 = a+\sqrt{a^2-b}$ χωρίς πρόβλημα

$x_2 = a - \underbrace{\sqrt{a^2-b}}_{\text{κοντά στο } a^2}$ υπάρχει πρόβλημα

και με την ρίζα ≈ α

Αφαίρεση ίσων αριθμών

Πώς να αποφύγω την αφαίρεση?

$x^2 - 2ax + b = (x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2$ θα πρέπει $x_1 \cdot x_2 = b$

το b το ξέρω $\Rightarrow$ $\boxed{x_2 = \frac{b}{x_1}}$

$$x_2 = a - \sqrt{a^2-b} = \frac{(a-\sqrt{a^2-b})(a+\sqrt{a^2-b})}{a+\sqrt{a^2-b}} = \frac{\cancel{a^2}-(\cancel{a^2}-b)}{a+\sqrt{a^2-b}} = \frac{b}{\underbrace{a+\sqrt{a^2-b}}_{x_1}} = \frac{b}{x_1}$$

$\boxed{1.4}$

$x^3 + 3p\cdot x + 2q = 0$, p, q πραγματικοί αριθμοί

$p^3 + q^2 > 0$

α) Πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα 3 ρίζες. Όλα τα πολ/μα περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Στου αρτίου βαθμού δεν ισχύει κάτι τέτοιο.

Ν.Δ.Ο έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. ρ.

Μάλιστα, $\rho = u - v$ με $u = (\sqrt{p^3+q^2} - q)^{1/3}$, $v = (\sqrt{p^3+q^2} + q)^{1/3}$

Ύπαρξη ρίζας πραγματικής:

$f(x) := x^3 + 3px + 2q$

f συνεχής στο $\mathbb{R}$

Αρκεί να αποδείξω ότι σε ένα σημείο είναι θετικό (y1) και σε ένα άλλο είναι αρνητικό. Άρα, θα $\exists$ 1 σημείο και στο 0 αναγκαστικά (y2) θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Τώρα, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

επομένως, η f λαμβάνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τ.

Σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ η f παίρνει και την τιμή μηδέν, οπότε έχει ρίζα.

■ αποδείξαμε ύπαρξη

Μοναδικότητα ρίζας

$f'(x) = 3x^2 + 3p = 3(x^2 + p)$

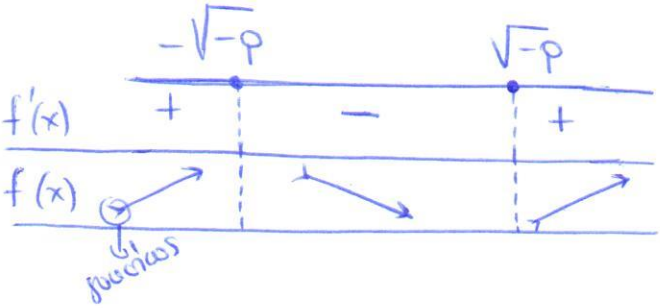
i) υποθέτω ότι $p \geq 0$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε έχει το πολύ μία ρίζα.

ii) υποθέτω τώρα $p < 0$ τότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + p = 0 \Leftrightarrow x^2 = -p > 0$

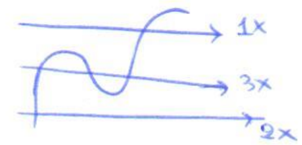
$\Leftrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{-p}}$ πραγματικός αριθμός.

$x \in (-\sqrt{-p}, \sqrt{-p})$
$\Rightarrow |x| < \sqrt{-p}$
$\Rightarrow x^2 < -p$
$\Rightarrow x^2 + p < 0$



Γραφική παράσταση

πχ



ο άξονας 3x έχει 3 ρίζες
θα πρέπει να δείξω ότι ο άξονας x είναι είτε ο 1x είτε ο 2x.

τώρα, $f(-\sqrt{-p}) = 2(q - p\sqrt{-p})$

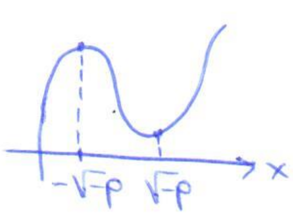
$f(\sqrt{-p}) = 2(q + p\sqrt{-p})$

Άρα, $f(-\sqrt{-p}) \cdot f(\sqrt{-p}) = \ldots = 4(q^2 + p^3) > 0$

(εξήγηση σχήματος)

1η περίπτωση

$f(-\sqrt{-p}) > 0$ τότε η f έχει στο $(-\infty, -\sqrt{-p})$ ακριβώς μία ρίζα, ενώ στα διαστήματα $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$ και $[\sqrt{-p}, +\infty)$ δεν έχει ρίζες. (γνήσια μονότονη)



2η περίπτωση

Το f του $f(-\sqrt{-p}) < 0$ τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\sqrt{-p}, +\infty)$ και καμμία ρίζα στα $(-\infty, -\sqrt{-p})$ και $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$

Τώρα, $f(p) = f(u-v) = (u-v)^3 + 3p(u-v) + 2q$

$$= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3p(u-v) + 2q$$

$$= \underbrace{(u^3 - v^3)}_{=-\cancel{2q}} + 3uv(v-u) + 3p(u-v) + \cancel{2q}$$

(από τους τύπους στην εκφώνηση)

$$= 3p(u-v) - 3uv(u-v)$$

$$= 3(u-v)(p-uv)$$ θέλω να αποδείξω ότι το $p \overset{u-v}{=}$ είναι ρίζα
Δηλαδή το $\underbrace{3(u-v)}(p-uv) = 0$

$u = v$ (όμως δεν ισχύει αυτό)

Άρα, το $(p-uv) = 0$.

Θα αποδείξουμε ότι το $u \cdot v = p$. Θα το φτιάξουμε.

Όμως $u \cdot v = (\sqrt{p^3+q^2} - q)^{1/3}(\sqrt{p^3+q^2}+q)^{1/3}$

$$= \left[(\sqrt{p^3+q^2}-q)(\sqrt{p^3+q^2}+q)\right]^{1/3}$$

$$= \left((\sqrt{p^3+q^2})^2 - q^2\right)^{1/3}$$

$$= (p^3 + \cancel{q^2} - \cancel{q^2})^{1/3}$$

$$= (p^3)^{1/3}$$

$$= p$$

<u>Συμπέρασμα</u>, $f(p) = 0$. το p είναι ρίζα. ■ τέλος 1ου ερωτήματος.

β) προβλήματα ευστάθειας. Αν $p^3 \gg q^2$ στον υπολογισμό του p.
(δηλ. θα είναι περίπου ίσα τα u, v)

<u>Λύση</u>

Αν $p^3 \gg q^2$, τότε u περίπου ίσο, $u \approx (\sqrt{p^3})^{1/3} = \sqrt{p}$
και το $v \approx \sqrt{p}$, οπότε έχουμε $u \approx v$.
Άρα, έχουμε αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών. ■

γ) πώς μπορώ να το αποφύγω αυτό?

$u^3 - v^3 = (u-v)(u^2+u\cdot v+v^2)$ να χρησ/σω για να φτάσω κάποιο ευσταθεί.

$$\Leftrightarrow \underbrace{u-v}_{=p} = \frac{u^3-v^3}{u^2+u\cdot v+v^2} = \frac{-2q}{u^2+\underbrace{u\cdot v}_{=p}+v^2} = \frac{-2q}{u^2+p+v^2}$$

θετικό γιατί $p^3 > q^2$

Ευσταθής τρόπος (διότι δεν κάνω πουθενά αφαίρεση) ■

$\boxed{1.7}$ (Μέρος)

~~είναι η ημιπερίμετρος του~~

$n \geq 3$ $\underset{(\text{μικρό})}{y_n} := n\sin\frac{\pi}{n}$ = εγγεγραμένο πολύγωνο με n πλευρές στον μοναδιαίο κύκλο.

$Y_n := n\cdot\tan\frac{\pi}{n}$ = περιγγεγραμμό πολύγωνο με n πλευρές στον μοναδιαίο κύκλο.

(γεωμετρικές ερμηνείες)

υπολογίζονται χωρίς το π, (taylor)

$$y_n = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$Y_n = \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

μπορείς να ξαναγράψεις τις ακολουθίες ώστε το π να το προσεγγίσεις αλλά όχι με $1/n^2$ σφάλμα αλλά μεγαλύτερο?

Έστω με, $(2\cdot y_n)$

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot y_n &= 2\pi - \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ Y_n &= \pi + \frac{\pi^3}{3n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}\right\} (+) \quad 2y_n + Y_n = 3\pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

προσεγγίζει το 3π εγώ θέλω με το π

$$\Rightarrow \frac{2y_n+Y_n}{3} = \pi + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Τεχνική "προέκταση κατά Richardson" (να φέρουμε την ιδέα αυτή)?

$\boxed{1.12}$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}dx \ , \ n\in \mathbb{N}_0$$

α) νδο $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ γνησίως φθίνουσα και συγκλίνει το μηδέν (μηδενική). $a>0$

Λύση

$\forall x\in(0,1)$ $x^{n+1} < x^n$ στα άκρα παίρνω τις ίδιες τιμές.

$x+a>0$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}}{x+a} < \frac{x^n}{x+a} \Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+a}dx}_{=y_{n+1}} < \underbrace{\int_0^1 \frac{x^n}{x+a}dx}_{=y_n} \Rightarrow y_{n+1}<y_n$$

Άρα, η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα. φθίνουσα

Έχουμε ότι,

$$0\le y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{a}dx = \frac{1}{a}\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dots = \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}$$

να το μικρύνω θέλω $\geq a$

Έχω εγκλωβίσει τα y_n: $\boxed{0 \le y_n \le \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}}$

Άρα, έχουμε ότι: $0\le y_n \le \frac{1}{a}\frac{1}{n+1}$. $n\to\infty$: $\frac{1}{n+1}\to 0$

$\Rightarrow$ $y_n\to 0, n\to\infty$

β) $\boxed{a>>1}$ Νδο για $n\geq 1$, ισχύει $y_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}a^k\frac{(1+a)^{n-k}-\alpha^{n-k}}{n-k} + (-a)^n\log\frac{1+a}{a}$

Είναι αυτός ο τρόπος υπολογισμού y_n ευσταθής?

Λύση

αντικατάσταση μεταβλητής $y=x+a$, $x=0$, $y\Rightarrow a$; $x=1$, $y\Rightarrow \alpha+1$

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a}dx = \int_a^{a+1}\frac{(y-a)^n}{y}dy$$

→ αναπτύσσουμε το διώνυμο

= ... Δεν το κάναμε λεπτομερώς. 1ο μέρος

• $|y_n|$ μικρό ($a>>1$ άρα $\frac{1}{\alpha}$ πολύ μικρό) από την ανισότητα (αλφάτησμα)

• κάποιοι από τους όρους $\binom{n}{k}a^k\frac{(1+a)^{n-k}-a^{n-k}}{n-k}$ είναι μεγάλοι. Άρα, τουλάχιστον ένα από τα ενδιάμεσα αθροίσματα

$S_N = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N$

$$P_N = \frac{|S_2|+|S_3|+\dots+|S_N|}{|S_N|}$$

Για μεγάλο P_N, ασταθής αλγόριθμος

έχει μεγάλη απόλυτη τιμή.

Συμπέρασμα: Ο αλγόριθμος είναι ασταθής!

$S_k = a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k$ μεγάλο

Τότε είτε το a_{k-1} είναι μεγάλο είτε το S_k μεγάλο και οπότε το άθροισμα είναι μεγάλο

■ β ερώτημα

$$\gamma)\quad y_0 = \int_0^1 \frac{\overset{x^0=1}{1}}{x+a}\,dx = \log(x+a)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \log(1+a) - \log(a)$$

$$= \log\frac{1+a}{a}$$

Να βρούμε σχέση μεταξύ y_n, y_{n-1} αναδρομικά, $a \gg 1$.

Λύση

$$y_n = \int_0^1 \frac{\overset{x^{n+1-1} = x^{n-1}\cdot x}{x^n}}{x+a}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+a) - a\cdot x^{n-1}}{x+a}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx - \int_0^1 \frac{a\cdot x^{n-1}}{x+a}\,dx$$

το πρόσθεσα άρα πρέπει και να το αφαιρέσω! σταθερά

$$\Rightarrow\quad y_n = \frac{1}{n} - a\,y_{n-1}$$

$$\begin{cases} y_0 = \log\dfrac{1+a}{a} \\ y_n = \dfrac{1}{n} - a\,y_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Είναι ευσταθής αυτή η σχέση?

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_n = \dfrac{1}{n} - a\,\tilde{y}_{n-1} \end{cases}$$ μία προσέγγιση

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε,

$$y_n - \tilde{y}_n = -a\,y_{n-1} + a\,\tilde{y}_{n-1} = -a\,(y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1})$$

επαγωγικά

$$\Rightarrow\quad y_n - \tilde{y}_n = (-a)^n (y_0 - \tilde{y}_0) \Rightarrow |y_n - \tilde{y}_n| = a^n\,|y_0 - \tilde{y}_0|$$

αυξάνει πολύ γρήγορα

Συμπέρασμα, ασταθής αλγόριθμος ■ θέμα

δ) Δώστε ευσταθή αλγόριθμο για τον υπολογισμό πχ του y_{10}. (θα κάνουμε βήματα προς τα πίσω πχ $y_{20} \to y_{10}$)

Λύση

$$y_n = \frac{1}{n} - \alpha y_{n-1} \Rightarrow y_n - \frac{1}{n} = -\alpha y_{n-1} \Rightarrow y_{n-1} = -\frac{1}{\alpha}\left(y_n - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$y_{n-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n} - y_n\right)$$

Προσεγγίζουμε πχ το y_{20} με $\tilde{y}_{20} = 0$ έχουμε αρχικό σφάλμα το πολύ $\frac{1}{21 \cdot \alpha}$ (από την ανισότητα στο (α) ερώτημα)

Υπολογίζουμε μετά αναδρομικά τα $\tilde{y}_{19}, \dots, \tilde{y}_{10}$ ως εξής $\tilde{y}_{n-1} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n} - \tilde{y}_n\right)$
$n = 20, 19, \dots, 11$

Ευστάθεια : $y_{n-1} - \tilde{y}_{n-1} = -\frac{1}{\alpha}(y_n - \tilde{y}_n)$, $n = 20, 19, \dots, 11$

το κλάσμα θα γίνει πολύ μικρό.

$$|y_{10} - \tilde{y}_{10}| = \frac{1}{\alpha^{10}} |y_{20} - \tilde{y}_{20}|$$. Άρα, ο αλγόριθμος ευσταθής ! δ ερώτημα

πόσα βήματα έκανα

1.13

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + (1-\alpha)y &= 0 \end{aligned}\right\}$$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Ποια είναι η κατάσταση του προβλήματος?

Λύση

Για $\alpha = 0$, το πρόβλημα δεν έχει λύση (Οπότε η κατάσταση του είναι η χειρότερη δυνατή)

• Για $\alpha \neq 0$ θεωρούμε το πρόβλημα : (μεταβάλλαμε το $\begin{matrix} 1 \to 1+\epsilon_1 \\ 0 \to \epsilon_2 \end{matrix}$)

$$\begin{cases} \tilde{x} + \tilde{y} = 1+\epsilon_1 \\ \tilde{x} + (1-\alpha)\tilde{y} = \epsilon_2 \end{cases}$$

Θέτω $u = \tilde{x} - x$ και $v = \tilde{y} - y$ και αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{cases} u + v = \epsilon_1 \\ u + (1-\alpha)v = \epsilon_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \epsilon_1 - \dfrac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\alpha} \\ v = \dfrac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\alpha} \end{cases}$$

όσο πιο κοντά είναι το α στο μηδέν <u>δεν έχω καλή κατάσταση</u>.

<u>Συμπέρασμα</u>, για πολύ μικρή απόλυτη τιμή του α, η κατάσταση είναι κακή ενώ για μεγάλη απόλυτη τιμή η κατάσταση είναι καλή. ■