09/2/2016

Αριθμητική ανάλυση

Διαδικαστικά

- Λήξη: 28-5-2016
- 4 ώρες θεωρία (Τρίτη, Πέμπτη, 10-12)
- 1 ώρα ασκήσεις (Παρασκευή, 11-12)
- Εργαστηριακές ασκήσεις 2 ή 3 (Matlab Fortran) (+1 στο βαθμό)
- Πρόοδοι:
  1η) Σάββατο 16/4 Απριλίου 10-12 (1°, 2° κεφ)
  2η) Σάββατο 14/5 Μαΐου 10-12 (3° κεφ)
  3η) Σάββατο 28/5 Μαΐου 10-12 (4°, 6° κεφ)

Δύο παραδείγματα

1º παράδειγμα

Θέλουμε να υπολογίσουμε όρους της ακολουθίας $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx \;,\; n = 1, 2, \ldots$

Ιδιότητες: $0 < I_{n+1} < I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. Η ακολουθία $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και μηδενική.

↓ όριο ίσο με το μηδέν.

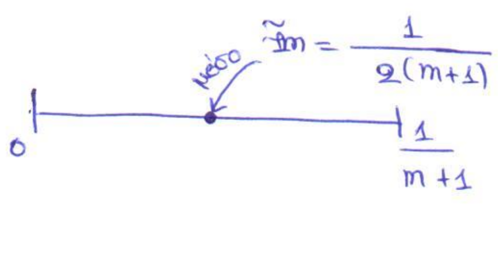
Αναδρομικός τύπος: $I_n = 1 - nI_{n-1} \;,\; I_1 = \dfrac{1}{e}$ (δημιουργεί την αστάθεια.)

1ος αλγόριθμος: Προσεγγίζουμε το I_1 με έναν αριθμό $\tilde{I}_1$ και υπολογίζουμε προσεγγίσεις $\tilde{I}_n$ αναδρομικά με τον τύπο
$$\begin{cases} \tilde{I}_n = 1 - n\cdot\tilde{I}_{n-1} \;,\; n = 2, 3, \ldots \\ \tilde{I}_1 \text{ δεδομένο} \end{cases}$$

Ο αλγόριθμος είναι ασταθής.
↳ (ευαίσθητος σε σφάλματα στρογγύλευσης).

Τα σφάλματα στρογγύλευσης διογκώνονται σε κάθε βήμα και αλλοιώνουν τελείως τα αποτελέσματα. Αιτία για την αστάθεια είναι ο παράγοντας n.

2ος αλγόριθμος: Προσεγγίζουμε το I_m με έναν αριθμό $\tilde{I}_m$ (πχ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε $\tilde{I}_m = 0$ οπότε το σφάλμα θα είναι $|I_m - \tilde{I}_m| \leq \dfrac{1}{m+1}$) και υπολογίζουμε τα I_n αναδρομικά:
$$\begin{cases} \tilde{I}_{n-1} = \dfrac{1-\tilde{I}_n}{n} \;,\; n = m, \ldots, \ell \;(\text{για } \ell < m) \\ \tilde{I}_m \text{ δεδομένο} \end{cases}$$
ευσταθής



$$\Rightarrow |I_m - \tilde{I}_m| \leq \frac{1}{2(m+1)}$$

2º παράδειγμα

$$y_n = 2^n \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n\in\mathbb{N}$$

Ιδιότητες: $y_1=2$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο π.

Στόχος: Να υπολογίσουμε όρους της ακολουθίας $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, χωρίς να χρησιμοποιούμε το π, ώστε να βρούμε καλή προσέγγιση του π.

1ος αλγόριθμος

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= 2^{n+1}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)} \\ y_1 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad n=1,2,\ldots$$

ασταθής

δημιουργεί την αστάθεια

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Πολλ/ζω και διαιρώ με την συζυγή τετραγωνική παράσταση

2ος αλγόριθμος

$$\begin{cases} y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\cdot y_n \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

πρόσθεση σχεδόν ίσων αριθμών. Δεν δημιουργεί πρόβλημα.

ευσταθής

Απλή ακρίβεια = 6 δεκαδικά ψηφία

11/2/2016 2ο μάθημα

Αριθμητική Ανάλυση

1. Αριθμητική κινητής υποδιαστολής - Σφάλματα στρογγύλευσης

Τα αποτελέσματα επιστημονικών υπολογισμών με υπολογιστή πρέπει να αντιμετωπίζονται με κριτική διάθεση. Καλές μέθοδοι δίνουν καλά αποτελέσματα ενώ κακές μέθοδοι δίνουν άσχημα αποτελέσματα.

Ποιότητα αριθμητικών μεθόδων

- απαιτούμενη μνήμη
- απαιτούμενος χρόνος
- ακρίβεια αποτελεσμάτων

(εξαρτώνται από το πρόβλημα)

Οι υπολογισμοί στους υπολογιστές γίνονται με πεπερασμένη ακρίβεια. Αυτό έχει ως συνέπεια σφάλματα στρογγύλευσης τα οποία μερικές φορές αλλοιώνουν τελείως τα αποτελέσματα. Ας δούμε δύο παραδείγματα.

1ο παράδειγμα

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx,\ n\in\mathbb{N}$$

Ιδιότητες των I_n

1η. $I_n > 0,\ n\in\mathbb{N}$

2η. $x^{n+1} < x^n$ για $x\in(0,1)$

$\Rightarrow x^{n+1}\cdot e^{x-1} < x^n\cdot e^{x-1}$ στο $(0,1)$

$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 x^{n+1}\cdot e^{x-1}\,dx}_{I_{n+1}} < \underbrace{\int_0^1 x^n\cdot e^{x-1}\,dx}_{I_n}$

$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} < I_n}$

3η. Η e^{x-1} είναι αύξουσα, οπότε $\forall x\in[0,1]$

$e^{x-1} \le e^{1-1} = e^0 = 1$ μαύρισα τον μέγιστο τιμή.

$\Rightarrow \forall x\in[0,1]\ \boxed{e^{x-1}\le 1}$

Άρα, $x^n e^{x-1} \le x^n \rightarrow \underbrace{\int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx}_{I_n} \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$

Επομένως, $0 < I_{n+1} < I_n \le \frac{1}{n+1},\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} I_n = 0}$ Η ακολουθία είναι μηδενική.

Αναδρομικός τύπος:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\,dx = \int_0^1 x^n\cdot(e^{x-1})'\,dx \overset{\text{ολοκλήρωση κατά μέλη}}{=} \left[x^n\cdot e^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 (x^n)' e^{x-1}\,dx \Rightarrow$$

τον παραγωγίζουμε

$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, n=αριθμός

$$I_n = \left[x^n e^{x-1}\right]_0^1 - n\underbrace{\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1}\,dx}_{I_{n-1}}$$

• $\underline{n=1}$: $I_1 = \underbrace{1 \cdot e^{1-1}}_{=1} - \cancel{0 \cdot e^{0-1}} - 1 \cdot \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - [e^{x-1}]_0^1 = 1 - (e^0 - e^{-1}) = 1 - (1 - \frac{1}{e}) =$

$\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$

• $\underline{n \geq 2}$: $I_n = 1 - n I_{n-1}, \; n \geq 2$

<u>1ος αλγόριθμος</u>|

Προσεγγίζουμε το I_1 με $\tilde{I}_1$ και υπολογίζουμε προσεγγίσεις $\tilde{I}_n$ των I_n αναδρομικά, $\boxed{\tilde{I}_n = 1 - n\tilde{I}_{n-1}, \; n \geq 2.}$

<u>Ισχυρισμός</u>: Ο αλγόριθμος αυτός είναι ασταθής.

Έχουμε (απόδειξη ισχυρισμού) :

$$\left.\begin{aligned} I_n &= 1 - n I_{n-1} \\ \tilde{I}_n &= 1 - n \tilde{I}_{n-1} \end{aligned}\right\} \boxed{I_n - \tilde{I}_n = -n(I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1})}$$

τα σφάλματα πολ/ται κάθε φορά με το n.

Ισχυρίζομαι ότι ισχύει το εξής, $I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{n-1} \cdot n! \cdot (I_1 - \tilde{I}_1)$.

<u>Αποδεικνύω με επαγωγή</u>

• $n=1$: $I_1 - \tilde{I}_1 = I_1 - \tilde{I}_1$ ✓ (ισχύει ο πάνω τύπος)

• $n \rightarrow n+1$: $I_{n+1} - \tilde{I}_{n+1} = -(n+1)(I_n - \tilde{I}_n)$

υπόθεση επαγωγής

$\stackrel{\downarrow}{=} -(n+1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot n! \, (I_1 - \tilde{I}_1) = (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot (I_1 - \tilde{I}_1)$ ■ άρα ισχύει ο ισχυρισμός που κάναμε.

<u>Συμπέρασμα</u>:

$|I_n - \tilde{I}_n| = n! \, |I_1 - \tilde{I}_1|$. Ο αλγόριθμος είναι <u>ασταθής</u>.

αυξάνει ταχύτατα

<u>2ος αλγόριθμος</u>|

Θεωρούμε μια προσέγγιση $\tilde{I}_m$ του I_m. και υπολογίζουμε προσεγγίσεις $\tilde{I}_n$ των I_n, για $n = m-1, m-2, \ldots, l, \ldots$

μπορούμε μέχρι το I_1 αλλά δεν έχει νόημα γιατί το ξέρουμε.

<u>Αναδρομικά</u>:

$\tilde{I}_{n-1} = \frac{1 - \tilde{I}_n}{n}, \quad n = m, m-1, \ldots, l+1,$

Έχουμε, $I_{n-1} - \tilde{I}_{n-1} = -\frac{1}{n} (I_n - \tilde{I}_n), \; n = m, m-1, \ldots$

Επαγωγικά αποδεικνύεται ότι, $I_n - \tilde{I}_n = (-1)^{m-n} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdots (m-1) \cdot m} (I_m - \tilde{I}_m) \;, n = m, m-1, \ldots, l$

<u>Συμπέρασμα</u>: $|I_n - \tilde{I}_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots m} |I_m - \tilde{I}_m|$

Επιλογή του $\tilde{I}_m$. Για $\tilde{I}_m = 0$ έχουμε μέγιστο σφάλμα $|I_m - \tilde{I}_m| \le \frac{1}{m+1}$.

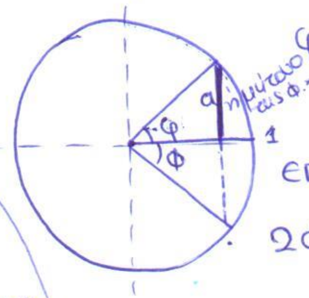
Βέλτιστη επιλογή: $\tilde{I}_m = \frac{1}{2(m+1)}$. Τότε, $|I_m - \tilde{I}_m| \le \frac{1}{2(m+1)}$.

2ο παράδειγμα (προσέγγιση του p=3.14... με την μέθοδο του Αρχιμήδη).

$$y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

• $y_1 = 2^1 \sin\frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2$ (περίμετρος = 2π για τον μοναδιαίο κύκλο)

• y_n έχει γεωμετρική σημασία. = είναι ημιπερίμετρος του κανονικού πολυγώνου με 2^n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.



$\varphi = \frac{\pi}{2^n}$, $\alpha = \sin\frac{\pi}{2^n}$

Για να φτιάξω ένα πολύγωνο, επεκτείνω την πλευρά α.

$2\varphi = \frac{2\pi}{2^n}$ πόσες φορές χωράει η γωνία 2φ στον μοναδιαίο κύκλο? 2^n φορές! με πλευρά πολυγώνου 2α.

$$2\alpha = 2\sin\frac{\pi}{2^n}$$

Συμπέρασμα: το κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές που είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο έχει πλευρά 2α.
Η περίμετρος είναι $2\alpha \cdot 2^n = \underbrace{2^n \cdot 2 \sin\frac{\pi}{2^n}}_{=2y_n} = 2y_n$, όπου $2^n \sin\frac{\pi}{2^n} = y_n$.

Ισχυρισμός: Η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο π.

•(Απόδειξη για αύξουσα) $y_n = 2^n \cdot \sin\frac{\pi}{2^n} = 2^n \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} =$

για να φτιάξω μέσα στο sin το n+1.

$\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$$= \underbrace{2^{n+1} \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}_{=y_{n+1}} \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = y_{n+1} \overbrace{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}^{0< \quad <1} < y_{n+1}$$

άρα $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ■

• (απόδειξη ότι συγκλίνει στο π)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x}=\alpha}$$

το π είναι το α

$$y_n=\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}\to\pi,\ n\to\infty$$. Αποδείξαμε ότι, $\lim_{n\to\infty}y_n=\pi$ ∎

Έχουμε,

θέλω να το κάνω διπλάσιο

$$y_1=2,\ y_{n+1}=2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}=2^{n+1}\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}\right)^{1/2}=2^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^n}}}{2}\right)^{1/2}$$

$$=2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)}$$

αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών. Διαδικασία είναι η $\boxed{\text{ασταθής!}}$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$y_n=2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{2^n}=\frac{y_n}{2^n}$$

<u>12/2/2016</u> <u>3ο μάθημα</u>

$$y_n=2^n\sin\frac{\pi}{2^n},\ n\in\mathbb{N}$$

<u>1ος αλγόριθμος</u>

$$\begin{cases} y_{n+1}=2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}\right)} \\ y_1=2\end{cases}$$

αφαίρεση

Ασταθής λόγω της αφαίρεσης σχεδόν ίσων αριθμών.

2ος αλγόριθμος

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Έχουμε, $$1-\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2} = \frac{1-(1-\cancel{\sqrt{}}(2^{-n}y_n)^2)}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}} = \frac{(2^{-n}y_n)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}$$

Άρα, $$y_{n+1} = 2^{n+1}\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{(2^{-n}y_n)^2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}} = \cancel{2}^{\cancel{n}+1}\cdot(\cancel{2}^{-\cancel{n}}y_n)\sqrt{\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}} =$$

$$= y_n\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2}{1+\sqrt{1-(2^{-n}y_n)^2}}}\cdot y_n, & n\in\mathbb{N} \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

Ευσταθής αλγόριθμος

Παράσταση αριθμού ως προς οποιαδήποτε βάση

Καθημερινή ζωή | Δεκαδικό σύστημα
Βάση: 10
Ψηφία: 0, 1, 2, …, 9

Παράδειγμα

$$3.14159 = 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 1\cdot 10^{-3} + 5\cdot 10^{-4} + 9\cdot 10^{-5}$$

Γενικά: Έστω $a_N, a_{N-1}, \dots, a_0, a_{-1}, a_{-2} \dots$ δεκαδικά ψηφία τότε ο αριθμός,

$$(a_N a_{N-1} \dots a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_{10} = a_N\cdot 10^N + a_{N-1}\cdot 10^{N-1} + \dots + a_1\cdot 10^1 + a_0\cdot 10^0 + a_{-1}\cdot 10^{-1} + \dots$$

Ακέραιο μέρος: $a_N a_{N-1} \dots a_0$

$P(x) = a_N\cdot x^N + a_{N-1}\cdot x^{N-1} + \dots + a_0$. Ο $a_N \dots a_0$ είναι η τιμή του P στο $x=10$.

<u>κλασματικό μέρος</u> : $.a_{-1}a_{-2}\cdots$ είναι η τιμή της δυναμοσειράς

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\cdot x^{k}$ για $x=\frac{1}{10}$. Η σειρά μπορεί να είναι <u>πεπερασμένου</u> ή άπειρου

πλήθος όρων. ~~Μοναδική παράσταση~~

Μοναδικότητα της παράστασης, όχι!

<u>Παράδειγμα</u>

$4.130 = 4.12999\ldots$
$= 4.12\overline{9}$

Πράγματι, $9\cdot\sum_{i=1}^{\infty}10^{-i} = 9\cdot\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = 9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9\cdot\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} =$

$= 9\cdot\frac{1\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot 9} = \cancel{9}\cdot\frac{1}{\cancel{9}} = 1$ άρα, αυξάνουν το προηγούμενο ψηφίο +1.

$\left(\frac{1}{3}=0.333\ldots\ ,\ 1=0.9999\ldots\right)$

$\sum_{n=k}^{\infty}\omega^{n} = \frac{\omega^{k}}{1-\omega}$

$|\omega|<1$ για να συγκλίνει ??
?? να το θυμόμαστε.

Για μοναδικότητα απαιτούμε: για κάθε $k_0 \in \mathbb{N}$ (φυσικός αριθμός $\mathbb{N}$), υπάρχει $k \geq k_0$ τ.ω. $\alpha_{-k} \neq 9$.

$$\boxed{(b-1)\sum_{i=1}^{\infty} b^{-i} = 1}$$

<u>Σύστημα με βάση $b\geq 2$, $b\in\mathbb{N}$</u>

<u>Βάση</u>: b

<u>Ψηφία</u>: $0,1,2,\ldots,b-1$

αν ψηφία τότε οι αριθμοί της μορφής $=(a_N a_{N-1}\cdots \alpha_0\alpha_{-1}\cdots)_B =$

$$= \pm\big(\underbrace{a_N B^{N} + \alpha_{N-1}\cdot B^{N-1} + \cdots \alpha_0\cdot B^{0}}_{\text{ακέραιο μέρος}} + \underbrace{\alpha_{-1}\cdot B^{-1}+\cdots}_{\text{κλασματικό μέρος}}\big)$$

<u>Παράδειγμα</u>

$(100110.11)_2 = 1\cdot 2^{5} + 0\cdot 2^{4} + 0\cdot 2^{3} + 1\cdot 2^{2} + 1\cdot 2^{1} + 0\cdot 2^{0} + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2}$

$= (38.75)_{10}$

i) Μετατροπή από σύστημα με βάση β στο δεκαδικό.

α) Ακέραιων αριθμών

Παράδειγμα

$$(53473)_8 = 5\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 = (22331)_{10}$$

Εύκολος τρόπος: $5\cdot 8^4 + 3\cdot 8^3 + 4\cdot 8^2 + 7\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 =$

$$= 3 + 8\underbrace{\left(7 + 8\left(4 + 8\cdot\underbrace{(3 + 8\cdot 5)}\right)\right)}_{\text{Σχήμα του Horner}}$$

κάνουμε τις πράξεις από "μέσα" προς τα "έξω".

$$P(x) = a_N\cdot x^N + a_{N-1}\cdot x^{N-1} + \dots + a_1\cdot x^1 + a_0 = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots))$$

$y \leftarrow a_N$ για $i = N-1, N-2, \dots, 0$

$y \leftarrow a_i + x\cdot y$

$\boxed{y = p(x)}$

αφορά/γεται flop (floating point operation)

β) κλασματικών αριθμών

Παράδειγμα

$$(.11)_2 = 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = (0.75)_{10}$$

ii) Μετατροπή από το δεκαδικό σε σύστημα με βάση β

α) Ακέραιων αριθμών

Βασίζεται στον αλγόριθμο της διαίρεσης.

Παράδειγμα

Μετατροπή του $(369)_{10}$ στο οκταδικό σύστημα.

$$(369)_{10} = (\dots a_2 a_1 a_0)_8$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{υπόλοιπο}}}{a_0} + 8\underbrace{(a_1 + 8(a_2 + \dots))}_{\text{πηλίκο}}$$

της διαίρεσης 369 : 8

$$\begin{array}{r|l} 369 & 8 \\ \cline{2-2} 49 & 46 \\ 1 & \end{array}$$ άρα, $\boxed{\alpha_0 = 1}$ και $\alpha_1 + 8(\alpha_2 + \dots) = 46$

$$\begin{array}{r|l} 46 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 5 \end{array}$$ άρα, $\boxed{\alpha_1 = 6}$ και $\underset{5}{\overset{\|}{\alpha_2}} + 8 \cdot \underbrace{(\alpha_3 + \dots)}_{=0} = 5$

Οπότε, $\boxed{\alpha_2 = 5}$ $(\alpha_3 \dots = 0)$

Αποτέλεσμα

$(369)_{10} = (561)_8$

Επαλήθευση: $(561)_8 = 1 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^2 = 369$.

β) κλασματικών αριθμών

$0 < x < 1$ x στο δεκαδικό σύστημα.

$x = (.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\dots)_b = \alpha_{-1} \cdot b^{-1} + \alpha_{-2} \cdot b^{-2} + \dots \Rightarrow b \cdot x = \alpha_{-1} + \alpha_{-2} \cdot b^{-1} + \dots$

Άρα, το α_{-1} είναι το ακέραιο μέρος του $b \cdot x$

Παράδειγμα

Μετατροπή του $x = (.372)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα

$(.372)_{10} = (.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\dots)_2$

Έχουμε,

$b \cdot x = 2 \cdot x = 0.744$, άρα $\alpha_{-1} = 0$, $\gamma_1 = 0.744$,

$2 \cdot \gamma_1 = 1.488$, άρα $\alpha_{-2} = 1$, $\gamma_2 = 0.488$,

$2 \cdot \gamma_2 = 0.976$, άρα $\alpha_{-3} = 0$, $\gamma_3 = 0.976$,

$2 \cdot \gamma_3 = 1.952$, άρα $\alpha_{-4} = 1$, $\gamma_4 = 0.952$

⋮ ⋮

Επομένως: $(.372)_{10} = (.0101\dots)_2$

Παράδειγμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\frac{1}{10}$$

Επομένως, $\frac{1}{10}=(0.1)_{10}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)$

$$=\overbrace{\left(2^{-4}+2^{-5}\right)}^{\text{για } n=1}+\overbrace{\left(2^{-8}+2^{-9}\right)}^{\text{για } n=2}+\overbrace{\left(2^{-12}+2^{-13}\right)}^{\text{για } n=3}+\ldots$$

συντ/της του 2^{-2}

$$=\left(0.\underset{\uparrow}{0}\,0\,011001100\ldots\right)_2=\left(0.000\overline{1100}\right)_2$$

συντελεστής το 2^{-1}

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2^{4n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{4n}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2^{4n}}=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n}}=$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^4}\right)^n=\frac{3}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2^4}\right)^1}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{16}}=$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{16}}{\frac{15}{16}}=\frac{3}{2}\,\frac{\cancel{16}}{\cancel{16}\cdot 15}=\frac{\cancel{3}}{2\cdot\cancel{15}_5}=\frac{1}{10}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\omega^n=\frac{\omega^k}{1-\omega}$$

$|\omega|<1$

Αριθμοί μηχανής

Έστω $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{x\neq 0}$. Σε ένα σύστημα με βάση β, ο x μπορεί να γραφεί στη μορφή

(*) $x=\underbrace{\pm}_{}\ .d_1d_2\ldots\cdot\beta^e$ με $d_1\neq 0$ για αυτό ισχύει και ότι το $x\neq 0$.

θεωρητικά το ακέραιο μέρος είναι 0 και για αυτό δεν το γράφω.

με d_i ψηφία ως προς τη βάση β και e κατάλληλος ακέραιος.

Η μορφή (*) λέγεται ($\overset{\boxed{d_1\neq 0}}{\text{κανονική}}$) μορφή κινητής υποδιαστολής.

Το σύνολο των αριθμών μηχανής $M = M(\beta, t, L, U)$ χαρακτηρίζεται από τις παραμέτρους:

βάση, # ψηφίων που κρατάω, κάτω φράγμα του e, άνω φράγμα

- β = βάση του αριθμητικού συστήματος
- t = ακρίβεια = # των ψηφίων του κλάσματος των αριθμών.
- L = κάτω φράγμα
- U = άνω -//-

} του εκθέτη e του β, $L \le e \le U$

L και U ακέραιοι με $L \approx U$

κάθε $x \in M, x \neq 0$ είναι της μορφής

(+) $x = \pm . d_1 d_2 \dots d_t \cdot \beta^e$ με $d_1 \neq 0$ και $L \le e \le U$

Το M αποτελείται από όλους τους αριθμούς της μορφής (+) και το μηδέν.

- Το M έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.
- Μέγιστο στοιχείο του M: $\begin{cases} d_1 = d_2 = \dots = d_t = \overbrace{(\beta-1)}^{\text{μέγιστο ψηφίο}} \\ e = U \end{cases}$

- Ελάχιστο θετικό μη μηδενικό στοιχείο του M: $\begin{cases} d_1 = 1, d_2 = \dots = d_t = 0 \\ e = L \end{cases}$

- Η απόσταση δύο διαδοχικών στοιχείων του M δεν είναι σταθερή.

Όσο πιο μικρό είναι το e τόσο πιο μικρή είναι η απόσταση, μεγάλο αντίστοιχα.

Το M δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό (πχ. να πάρω 2 στοιχεία του M και το αποτέλεσμα δεν θα είναι στοιχείο του M, όπως είναι πχ ο ελάχιστος του αριθμός)

$.1000 \dots 0 . e^L \quad .10000 e^L \notin M.$

Το M δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση; δηλαδή $x, x^* \in M \not\Rightarrow x + x^* \in M$

Παράδειγμα: $B = 10, t = 5$

$1 . 10^{-5} \in M \Rightarrow 1 + 10^{-5} = 1{,}00001 \notin M$ θα μετακινήσω την υποδιαστολή

$0.\underbrace{100001}_{} \cdot 10^1$

6 ψηφία $\neq t$ άρα δεν μπορώ να τον αναπαραστήσω.

Μας ενδιαφέρει το Μ να είναι <u>όσο πιο πυκνό</u> και <u>όσο πιο ευρύ</u> γίνεται, δηλαδή να έχει: μεγάλο t και μεγάλο διάστημα [L,U]

Προσέγγιση πραγματικών αριθμών με αριθμούς μηχανής.

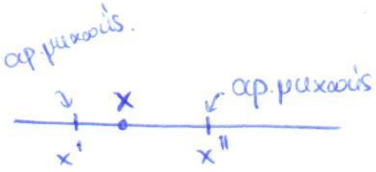
i) $|x| > .d_1 d_2 \dots d_t \cdot B^U$ με $d_1 = d_2 = \dots = d_t = (B-1)$

υπερχείλιση (overflow): και οι υπολογισμοί σταματούν.

ii) $|x| > 0$, $|x| < 0.1 \cdot B^L$ υποχείλιση: συνήθως ο x προσεγγίζεται με το μηδέν και συνεχίζονται οι υπολογισμοί.

iii) $0.1 \cdot B^L \le |x| \le$ μέγιστο στοιχείο του Μ

Ο x προσεγγίζεται με έναν αριθμό $fl(x) \in M$



προς τα πού θα προσεγγίσουμε το x.

Συνήθως ισχύει:

(+) $\forall y \in M \quad |x - fl(x)| \le |x - y|$ παίρνω τον πιο κοντινό αριθμό

<u>Ισχυρισμός</u>:

Το σχετικό σφάλμα (*) $\left|\frac{x - fl(x)}{x}\right| \le \frac{1}{2} \cdot B^{1-t}$ Εξαρτάται μόνο από τη βάση B και το t.

<u>Απόδειξη</u>

α) Αν $fl(x) = x$, τότε το σχετικό σφάλμα είναι μηδέν, οπότε ισχύει η (*)

β) Αν $x \notin M$, τότε υπάρχουν $x', x'' \in M$ διαδοχικά τ.ω. $x' < x < x''$. Προφανώς ισχύει $|fl(x) - x| \le \frac{1}{2} \cdot |x' - x''|$, τότε $\left|\frac{fl(x) - x}{x}\right| \le \frac{|x' - x''|}{2|x|}$

Έστω χ.π.τ.γ (χωρίς περιορισμό της γενικότητας) $x > 0$, οπότε $x = .d_1 d_2 \dots d_t d_{t+1} \dots \cdot B^k$

Τότε $x' = 0.d_1 d_2 \dots d_t \, B^k$

+1 αλλά αν $d_t' > B$ τότε έχω πρόβλημα.

$x'' = (.d_1 d_2 \dots d_t + B^{-t}) \cdot B^k$

(1) $x'' - x' = B^{-t} \cdot B^k = B^{k-t}$

Επιπλέον, (2) $x \ge .1 \cdot B^k$

Από τις (1),(2) παίρνουμε $\left|\frac{fl(x) - x}{x}\right| \le \frac{x'' - x'}{2x} \le \frac{B^{k-t}}{2(0.1) \cdot B^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B^{-t}}{\underbrace{(0.1)_B}_{= B^{-1}}} = \frac{1}{2} \cdot B^{1-t}$ ■

18/2/2016

Το $fl(x)$ προκύπτει από τον x είτε με στρογγύλευση (οπότε ισχύει η ⊕) είτε με αποκοπή.

Στρογγύλευση:

πχ $b=10$, $t=5$, $x=.a_1a_2\ldots a_5a_6\ldots \cdot 10^k$

Αν $a_6 \geq 5$ τότε επιλέγουμε ως $fl(x)=x''=(.a_1a_2\ldots a_5+10^{-5})\cdot 10^k$

Αν $a_6 < 5$ τότε $fl(x)=x'=.a_1a_2\ldots a_5\cdot 10^k$

(Στην περίπτωση που το $a_6=5$ και $a_7\ldots=0$ ($a_i=0$ για $i\geq 7$) μπορούμε να επιλέξουμε ως $fl(x)$ είτε τον x' είτε τον x''.

Αποκοπή:

$x=.a_1a_2\ldots a_5|a_6\ldots \cdot 10^k$ δηλαδή το $fl(x)=.a_1a_2\ldots a_5\cdot 10^k$ ανεξάρτητα από το ότι είναι το a_6.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε: $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \leq B^{1-t}$

Για το σχετικό σφάλμα ισχύει ~~το εξής~~ η εκτίμηση:

$$\left|\frac{fl(x)-x}{x}\right| \leq \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot B^{1-t} & \text{για στρογγύλευση} \\ B^{1-t} & \text{για αποκοπή} \end{cases}$$

Το $(\frac{1}{2}B^{1-t})$ ή το (b^{1-t}) συμβολίζεται με u και λέγεται μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης.

$$\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \leq u$$

σχετικά μικρός αριθμός.

Πράξεις: $* \in \{+,-,\cdot,/\}$

$x \quad y \longrightarrow x*y$

Υπόθεση $fl(\underbrace{fl(x)*fl(y)}_{\text{υποθέσαμε ότι αυτή η πράξη γίνεται ακριβώς.}})$

Παράδοξα (αυτού του ~~αριθμού~~ ορισμού):

$B=10$, $t=5$, $U=-L=10$ στρογγύλευση

$a_1=1$, $a_2=3\cdot 10^{-5}$, $a_3=3\cdot 10^{-5}$

το $a_1, a_2, a_3 \in M$

Έχουμε $fl(fl(a_1)+fl(a_2))$

$= fl(a_1+a_2) = fl(\underbrace{1.00003}_{6\text{ ψηφία}}) = 1.0000 = 1$

οπότε

$fl(fl(a_1+a_2)+a_3) = 1.$

(συνέχεια)

(Συνέχεια)

Αλλά, $fl(a_2+a_3) = fl(6\cdot 10^{-5}) = 6\cdot 10^{-5}$

Οπότε, $fl(a_1+fl(a_2+a_3)) = fl(1+6\cdot 10^{-5}) = fl(1.0000|6) = 1.0001$

Συμπέρασμα έχει σημασία η σειρά με την οποία κάνουμε προσθέσεις.

Για κάθε $0<|x|<5\cdot 10^{-6}$ έχουμε $fl(1+fl(x))=1$

Γενικά $0<|x|<\boxed{\frac{1}{2}B^{1-t}}$ έχουμε $fl(1+fl(x))=1$

Ο αριθμός $\frac{1}{2}B^{1-t}$ λέγεται μηδέν ή έψιλον της μηχανής.

Επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης στους υπολογισμούς

→ μη μηδενικά

(x, y) στο εύρος των αριθμών μηχανής

$(x*y)$ —"— —"— —"—

Στόχος: Εκτίμηση του σχετικού σφάλματος.

$$\frac{fl(fl(x)*fl(y)) - (x*y)}{x*y}$$

→ απόλυτο σφάλμα (ο αριθμητής) σχετικό σφάλμα = όλο το κλάσμα.

Παρατηρήσεις

1) $\left|\frac{x-fl(x)}{x}\right| \le u \iff fl(x) = x(1+\varepsilon)$ με $\varepsilon=\varepsilon(x)$ και $|\varepsilon|\le u$.

Απόδειξη

Θέτουμε $\varepsilon = \frac{fl(x)-x}{x}$. Έχουμε $|\varepsilon|\le u$ και $\varepsilon\cdot x = fl(x)-x \Rightarrow$

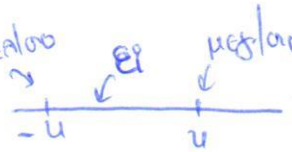
$$\varepsilon x + x = fl(x) \Rightarrow fl(x) = x\cdot(1+\varepsilon) \blacksquare$$

2) Αν ε_i, $i=1,\dots,m$ τ.ω $|\varepsilon| \le u<1$ τότε υπάρχει ε με $|\varepsilon|\le u$ τ.ω

$$\underbrace{(1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_m)}_{=\prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i)} = (1+\varepsilon)^m$$

Απόδειξη

Θέτουμε $\lambda = \prod_{i=1}^{m}(1+\varepsilon_i)$. Έχουμε,



τα ε_i παίρνουν τις μέγιστη τιμή τους αν ο κάθε παράγοντας παίρνει την μέγιστη τιμή του (αντίστοιχα για ελάχιστο)

$(1-u)^m \leq \lambda \leq (1+u)^m$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\phi(x) = (1+x)^m$, $x \in [-u,u]$. Η συνάρτηση είναι συνεχής και $\phi(-u) \leq \lambda \leq \phi(u)$. Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής ισχύει $\lambda = \phi(x^*)$ με $-u \leq x^* \leq u$ (το x^* έχει την ιδιότητα που θέλω).

Με $\varepsilon = x^*$ παίρνουμε το αποτέλεσμα ■

∝ο

$z = fl(fl(x) * fl(y))$

$\dfrac{z-(x*y)}{(x*y)}$

Πολλαπλασιασμός

$z = fl(fl(x) \cdot fl(y)) = fl(x(1+\epsilon_1) \cdot y(1+\varepsilon_2)) = xy(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$

με $|\varepsilon_i| \leq u$, $i = 1,2,3$

Άρα, $z = xy(1+\epsilon)^3$ με $|\varepsilon| \leq u$

επομένως,

$$\frac{z-x*y}{x*y} = \frac{xy(1+\epsilon)^3 - xy}{xy} = (1+\epsilon)^3 - 1 \Rightarrow \left|\frac{z-xy}{xy}\right| = |(1+\epsilon)^3 - 1| = |3\epsilon + 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3|$$

$$\leq 3u \underbrace{+ 3u^2 + u^3}_{\substack{\text{είναι πολύ} \\ \text{μικρότερες από} \\ \text{το } 3u.}} = 3u + O(u^2)$$

Λέμε λοιπόν ότι το σχετικό σφάλμα στον πολ/σμό είναι το πολύ 3 φορές το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης.

$\downarrow$

$\frac{1}{2}B^{1-t}$ ή B^{1-t}.

∝ο

Διαίρεση

$$z = fl\left(\frac{fl(x)}{fl(y)}\right) = fl\left(\frac{x(1+\epsilon_1)}{y(1+\epsilon_2)}\right) = \frac{x(1+\epsilon_1)}{y(1+\epsilon_2)}(1+\epsilon_3) \text{ με } |\varepsilon_i| \leq u, \ i = 1,2,3.$$

Τώρα, $\dfrac{1}{1+\epsilon_2} = 1+\delta$, τότε $\delta = -\dfrac{\epsilon_2 \rightarrow \text{μέγιστο να είναι}}{1+\epsilon_2 \rightarrow \text{ελάχιστο να είναι}}$ οπότε $|\delta| \overset{\substack{\text{θέλω να το μεγιστοποιήσω} \\ \downarrow}}{\leq} \dfrac{u}{1-u} = u + O(u^2)$

$$\left(\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots\right)$$

Επομένως, $\left|\dfrac{z-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}\right| = |\underbrace{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}_{(1+\epsilon)^2}(1+\delta) - 1| = |2\varepsilon+\delta+\varepsilon^2+2\varepsilon\delta+\delta\varepsilon^2|$

$\leq 3u + a(u)$ με $a(u) = O(u^2)$

$\propto$.

Πρόσθεση-αφαίρεση

$z = fl(fl(x)+fl(y)) = fl(x(1+\epsilon_1)+y(1+\epsilon_2)) =$

$= (x(1+\epsilon_1)+y(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3)$

$= x\underbrace{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_3)}_{(1+\epsilon)^2} + y\underbrace{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)}_{(1+\delta)^2}$ /* Παρατήρηση 2 */

με $|\varepsilon|\leq u$, $|\delta|\leq u$

Άρα, $z = x\cdot(1+\epsilon)^2 + y(1+\delta)^2 = x + 2\varepsilon x + \underbrace{\varepsilon^2 x}_{O(u^2)} + y + 2\delta y + \underbrace{\delta^2\cdot y}_{O(u^2)}$

$\approx x+y+2(\varepsilon x+\delta y) \Rightarrow \left|\dfrac{z-(x+y)}{(x+y)}\right| \approx 2\left|\dfrac{\varepsilon x+\delta y}{x+y}\right| \leq 2\dfrac{|x|+|y|}{|x+y|}\cdot u$; περιπτώσεις

$\leq u*$ και $|\epsilon x|\leq u|x|$, $|\delta y|\leq u|y|$

1η περίπτωση: x,y ομόσημοι

τότε $|x+y| = |x|+|y|$ οπότε το φράγμα είναι $2u$

2η περίπτωση: x,y ετερόσημοι

Στη χειρότερη περίπτωση θα έχουμε ότι $\varepsilon\approx-\delta$ και $|\varepsilon|\approx u$ οπότε

$$2\frac{|\varepsilon x+\delta y|}{|x+y|} \approx 2\frac{|x-y|}{|x+y|}\cdot u$$

• όσο τα x,y αντίθετα $(x\approx -y)$ τότε το $(x-y)$ πολύ μεγάλος αριθμός και ο λόγος $\left|\dfrac{x-y}{x+y}\right|$ μπορεί να είναι πολύ μεγάλος.

Συμπέρασμα, τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορούν να έχουν καταστροφική επιρροή στην αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών.

• Η αφαίρεση σχεδόν ίσων αριθμών πρέπει να αποφεύγεται (ή να γίνεται με μεγαλύτερη ακρίβεια, πχ διπλή)

Σημείωση : Αν οι x,y είναι αριθμοί μηχανής, η αφαίρεση τους γίνεται χωρίς πρόβλημα έστω και αν είναι σχεδόν αντίθετοι.

Παράδειγμα

$B=10$, $t=5$, $U \approx -L = 10$ στρογγύλευση.

$x = 0.45142|708$ Δεν είναι α.μ γιατί έχει $>t$ ψηφία

$y = -0.45115|944$

$x+y = 0.26764 \cdot 10^{-3}$

$Z = fl(fl(x)+fl(y)) = fl(0.45143 - 0.45116) = fl(0.00027) = 0.27\underline{000} \cdot 10^{-3}$

δεν είναι ακριβή, οφείλεται στο ότι αναιρούνται τα ψηφία που είναι ίσα. χάνουμε ακρίβεια.

23/2/2016

Παραδείγματα αποφυγής αφαίρεσης σχεδόν ίσων αριθμών

1ο παράδειγμα

$$\sqrt{7298} - \sqrt{7297} = \frac{1}{\sqrt{7298}+\sqrt{7297}}$$

χάνεται ακρίβεια

το δεξιό μέλος υπολογίζεται χωρίς πρόβλημα.

2ο παράδειγμα

$f(x) = x - \sin x$ υπολογισμός τιμών της f για μικρό $|x|$.

Λύση

$x, \sin x$ ομόσημα για μικρό $|x|$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Ανάπτυξη κατά Taylor (να το ξέρουμε)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \varepsilon(x) \quad \text{όπου} \quad |\varepsilon(x)| \le \frac{x^5}{5!} = \frac{x^5}{120}$$

Επομένως, $f(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \varepsilon(x) = \frac{x^3}{6} - \varepsilon(x) \approx \frac{x^3}{6}$

μπορώ να το υπολογίσω εύκολα. Δεν έχω κάποια αφαίρεση.

Σφάλματα στον υπολογισμό αθροισμάτων

Θα μελετήσουμε την επιρροή σφαλμάτων στρογγύλευσης, λόγω αριθμητικής κινητής υποδιαστολής με πεπερασμένη ακρίβεια στον υπολογισμό αθροίσματος.

Παράδειγμα

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Λύση

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ οπότε } S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= 1 + \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} \quad \left(\begin{matrix}\text{τηλεσκοπικά} \\ \text{αθροίσματα}\end{matrix}\right)$$

$$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα και συγκλίνει στο 2. $\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} 2 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 0 = 2$

πχ

$$S_{9999} = 2 - \frac{1}{10000} = 1.9999$$

$B=10,\ t=10$. Αναδρομικός τύπος

$$S_0 = 1$$
$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Αθροίζουμε από τον μεγαλύτερο προς τον μικρότερο όρο. Όλοι οι όροι είναι θετικοί.

Αποτέλεσμα

$$\tilde{S}_{9999} = 1.9998\underbrace{899972}_{\text{Δεν είναι ακριβώς σωστά τα ψηφία.}}$$

Άλλος τρόπος

$$\text{Με} \begin{cases} T_0 = \dfrac{1}{n(n+1)} & \left\{ T_k = T_{k-1} + \dfrac{1}{(n-k)(n-k+1)}, \quad k = 1, \ldots, n-1 \right. \\ T_n = T_{n-1} + 1 \end{cases}$$

Αθροίζω από το τέλος προς την αρχή. (από τον πιο μικρό προς τον πιο μεγάλο)

προφανώς ισχύει $S_n = T_n$

Αν υλοποιήσουμε αυτόν τον αλγόριθμο στον υπολογιστή μας παίρνουμε $\boxed{\tilde{T}_{9999} = 1.999900000}$

Σε αυτήν την περίπτωση αθροίσαμε από τον πιο μικρό προς τον πιο μεγάλο.

<u>Ερώτημα</u>: Γιατί στη 2η περίπτωση προκύπτει καλύτερο αποτέλεσμα;

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [-u, u]$. Τότε υπάρχει $\epsilon_3 \in [-u, u]$ τ.ω

$$(*) \quad \lambda \epsilon_1 + \mu \epsilon_2 = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \epsilon_3$$

<u>Απόδειξη</u>

- Για $\lambda = \mu = 0$, η $(*)$ ισχύει για οποιοδήποτε $\epsilon_3 \in [-u, u]$
- Διαφορετικά, $\dfrac{\lambda \epsilon_1 + \mu \epsilon_2}{|\lambda| + |\mu|} = \epsilon_3$ οπότε $|\epsilon_3| \leq \dfrac{|\lambda| \cdot |\epsilon_1| + |\mu| \cdot |\epsilon_2|}{|\lambda| + |\mu|}$

$|\epsilon_i| \leq u$, $i = 1, 2$

πότε παίρνουμε τη μέγιστη τιμή τους;

$$\leq \frac{|\lambda| \cdot u + |\mu| \cdot u}{|\lambda| + |\mu|} = u$$

<u>Στόχος</u>: με ποια σειρά πρέπει να τα προσθέτω?

<u>Πρόβλημα</u>:

Έστω $a_1, \ldots, a_N \in M$ (αριθμοί μηχανής). Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $S_N = \sum_{i=1}^{N} a_i$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τον αλγόριθμο $S_1 = a_1$, $S_k = S_{k-1} + \cdots + a_k$, $k = 2, \ldots, N$

Λαμβάνουμε τις προσεγγίσεις: $\begin{cases} \tilde{S}_1 = a_1 \\ \tilde{S}_k = fl(\tilde{S}_{k-1} + a_k) \end{cases}$ $k = 2, \ldots, N$

$fl(\tilde{S}_{k-1}) + fl(a_k)$ αλλά είναι ήδη αριθμοί μηχανής.

αυτό που βρίσκω; a_1

Έχουμε, $\tilde{S}_2 = fl(\tilde{S}_1 + a_2)$

$$= fl\, S_2 = S_2 (1 + \delta) \quad \text{σφάλμα}$$

$$= S_2 + S_2 \cdot \delta = S_2 + |S_2| \epsilon_2 \text{ με } |\delta| \leq u \text{ και } \epsilon_2 \leq u$$

θα ήθελα να βρω

<u>Παρόμοια</u>: $\tilde{S}_3 = (\tilde{S}_2 + a_3)(1 + \delta')$

$$= (S_2 + |S_2| \epsilon_2 + a_3)(1 + \delta')$$

$$= (S_3 + |S_2| \epsilon_2)(1 + \delta')$$

$$= S_3 + \underbrace{|S_2| \epsilon_2 + S_3 \delta'}_{\text{παρατήρηση}} + \underbrace{|S_2| \epsilon_2 \delta'}_{O(u^2)}$$

$$= S_3 + (|S_2| + |S_3|) \epsilon_3 + |S_2| \cdot \epsilon_2 \cdot \delta'$$

παραλείπω όρους του $O(u^2)$ $\rightarrow$ $\approx S_3 + (|S_2| + |S_3|) \epsilon_3$ με σφάλμα της τάξης u^2 και $|\delta'| \leq u$, $|\epsilon_3| \leq u$

$\tilde{S}_3 \approx S_3 + (|S_2| + |S_3|)\varepsilon_3$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο καταλήγοντας στη σχέση

$\tilde{S}_N \approx S_N + (|S_2| + |S_3| + \dots + |S_N|)\,\varepsilon_N$ (με σφάλμα της τάξης u^2) και $|\varepsilon_N| \le u$

Άρα, $\tilde{S}_N - S_N \approx (|S_2| + \dots + |S_N|)\varepsilon_N$ είναι το σχετικό σφάλμα.

$$\Rightarrow \quad \frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N} \approx \frac{|S_2| + \dots + |S_N|}{S_N}\cdot \varepsilon_N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N}\right| \approx \frac{|S_2| + \dots + |S_N|}{|S_N|}\cdot|\varepsilon_N|$$

Θέτω $\gamma_N = |S_2| + \dots + |S_N|$ και $p_N = \frac{\gamma_N}{|S_N|}$ και γράφω την προηγούμενη σχέση στη μορφή $\left|\frac{\tilde{S}_N - S_N}{S_N}\right| \approx p_N \cdot \underbrace{|\varepsilon_N|}_{\le u}$

p_N: συντελεστής μετάδοσης του σχετικού σφάλματος για τον αλγόριθμο μας.

Όταν ο p_N είναι μεγάλος, τότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

$p_N = \frac{|S_2| + |S_3| + \dots |S_N|}{|S_N|} \geq 1$. Αν κάποιο από τα ενδιάμεσα αθροίσματα έχει απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερη από το τελικό άθροισμα, τότε ο αλγόριθμος είναι ασταθής.

<u>Ειδική περίπτωση</u>:

$x_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ επειδή $N-1$ ↑ μεγάλο τότε το α_1 μικρό θα πρέπει.

$$\text{Τότε, } \gamma_N = \underbrace{S_2}_{a_1+a_2} + \underbrace{S_3}_{a_1+a_2+a_3} + \dots + \underbrace{S_N}_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_N} = (N-1)\alpha_1 + (N-1)a_2 + (N-2)\cdot a_3 + (N-3)a_4 + \dots + 1\cdot a_N$$

Το γ_N <u>ελαχιστοποιείται</u> αν ισχύει

$a_1, a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5 \dots \le \alpha_N$ μικρότεροι στους μεγαλύτερους. (αυτό θέλω) !!!

Το γ_N <u>μεγιστοποιείται</u> αν ισχύει $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 \geq \dots \geq \alpha_N$

■ τέλος ερωτήματος.

<u>Παράδειγμα</u>

Προσέγγιση e^{-x} για $x \gg 1$. Αναπτύσσω κατά Taylor

$$S_N(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{N-1}\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$$

Ισχύει ότι το $S_N(x) \to e^{-x}$ για $N \to \infty$

Άρα, για αρκετά μεγάλο N έχουμε $S_N(x) \approx e^{-x}$

Για $x = 100$ έχουμε $e^{-100} \approx 0$, ενώ $S_1 = 1$, $S_2 = -99$, $S_3 = 4901$, $S_4 \approx -161766$ κ...

Παταγώδης αποτυχία!

Τι θα μπορούσα να κάνω? $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \approx \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots}$ ο παρονομαστής μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια.

α.

Ευστάθεια αλγορίθμων.

Ένας αλγόριθμος λέγεται ασταθής αν είναι ευαίσθητος σε σφάλματα στρογγύλευσης, δηλαδή αν μικρά σφάλματα που γίνονται κατά την παράσταση των αριθμών και τις πράξεις, είναι δυνατόν να επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στο τελικό αποτέλεσμα.

Ένας αλγόριθμος λέγεται ευσταθής, αν τα τελικά αποτελέσματα επηρεάζονται λίγο (δεν επηρεάζονται πολύ) από σφάλματα στρογγύλευσης.

Παράδειγμα

υπολογισμούς του e^{-x} για $x \gg 1$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots \quad \text{Ασταθής τρόπος}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots} \quad \text{Ευσταθής τρόπος}$$

$\propto$.

25/2/2016

Κατάσταση προβλημάτων

Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει <u>καλή κατάσταση</u>, αν μικρές μεταβολές στα δεδομένα του έχουν μικρή μεταβολή στη λύση τους.

Λέμε ότι ένα πρόβλημα έχει <u>κακή κατάσταση</u>, αν είναι δυνατόν μικρές μεταβολές στα δεδομένα και να έχουν ως συνέπεια μεγάλη μεταβολή της λύσης του.

Παράδειγμα

$(x-2)^6=0$ (λύση $x=2$). Όσο ο εκθέτης είναι μεγάλος μεταβάλω κακά τη λύση (μεταβολή). Όταν εκθέτης μικρός, μικρή μεταβολή στη λύση.

Λύση μικρή μεταβολή

μετέβαλα τα δεδομένα (εγώ διαλέγω) 6 λύσεις φανταστική μονάδα

$(x-2)^6 = 10^{-6} \Rightarrow 10(x-2)^6 = 1^{(1)} \Rightarrow 10(x_k-2) = e^{\frac{2i\cdot k\cdot\pi}{6}}$ $k=0,1,\dots,5$

$\Rightarrow x_k = 2 + \underbrace{\frac{1}{10}e^{\frac{2ik\pi}{6}}}_{\text{μεταβολή}}$ $k=0,\dots,5$. Για $k=0$: μεταβολή = πραγματικός αριθμός
Για $k=1,\dots,5$ μιγαδικές οι λύσεις.

$\Rightarrow |x_k-2| = \frac{1}{10}\underbrace{\left|e^{\frac{2ik\pi}{6}}\right|}_{=1} = \frac{1}{10}$ πολύ μεγαλύτερη μεταβολή από την αρχική. 10^5 φορές μεγαλύτερη από το 10^{-6}

<u>Απόδειξη για το $e^{\frac{2ik\pi}{6}}$</u>: <u>Έχει κακή κατάσταση!</u>

Αν το x πραγματικός τότε ισχύει η ταυτότητα

$x\in\mathbb{R}$, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (Euler). Αν τον υψώσω σε μία δύναμη ℓ το e^{ix}

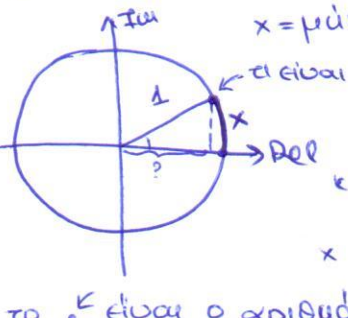
$(e^{ix})^\ell = e^{i\ell x} = \underbrace{\cos(\ell x)}_{\substack{\text{θα πρέπει}\\=1}} + \underbrace{i\sin(\ell x)}_{\substack{\text{θα πρέπει}\\=0}}$ } για να το κάνουμε ίσο με 1 (βλέπε (1))

Πότε συμβαίνει αυτό? Όταν το ℓ είναι πολλαπλάσιο του x.

<u>Ισχυρισμός</u>: Για $n\in\mathbb{N}$, τα σημεία $\boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k=0,\dots,n-1}$ ($=\ell x$) έχουν την ιδιότητα
$(z_k)^n = e^{i2k\pi} = 1$

γεωμετρική ερμηνεία (2)

(2) $e^{ix} = \cos x + i\sin x$



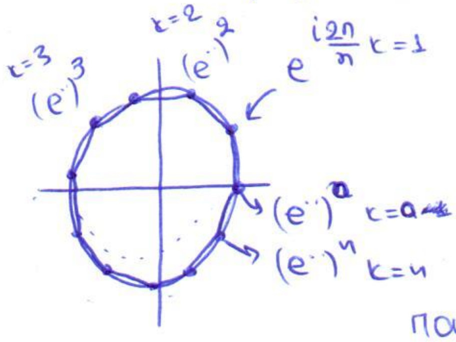
x = μήκος του τόξου

τι είναι αυτό; έχει ακτίνα 1. Το ? είναι το συνημίτονο της γωνίας. $=\cos x$ και το ¦ είναι το ημίτονο του

$x = \sin(x)$

Άρα το • είναι ο αριθμός e^{ix}

τι είναι οι αριθμοί $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k=1$ $= e^{i\frac{2\pi}{n}}$



Προκύπτει η πολύγωνο με 2^n πλευρές εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

Τα $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $k=0,\dots,n-1$ είναι οι n κορυφές του κανονικού n-γώνου που είναι εγγεγραμμένο στο μοναδιαίο κύκλο. και είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

<u>Συμπέρασμα</u> τα σημεία $z_i = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ $k=0,\dots,n-1$ είναι οι <u>μοναδικές</u> ρίζες της εξίσωσης $z^n=1$.

<u>ΤΕΛΟΣ ΘΕΩΡΙΑΣ 1ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ</u>