

### 3. Γραμμικά Συστήματα

#### Ασκήσεις

**3.1** Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Επίσης, στην περίπτωση που ένας άνω τριγωνικός πίνακας  $U \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι αντιστρέψιμος, τότε για τη λύση  $x \in \mathbb{R}^n$  του συστήματος  $Ux = e^k$ , με  $e^k \in \mathbb{R}^n$  το διάνυσμα με συνιστώσα ένα στη θέση  $k$  και όλες τις άλλες συνιστώσες μηδέν, ισχύει  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ , συνεπώς και ο αντίστροφος του  $U$  είναι άνω τριγωνικός. Ανάλογα για κάτω τριγωνικούς πίνακες.

**3.3** Έστω  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $A$  αντιστρέψιμος και  $b \in \mathbb{R}^n$ . Πώς υπολογίζουμε, κατά το δυνατόν οικονομικότερα από άποψης πλήθους πράξεων και μνήμης, τα διανύσματα  $A^{-4}b$  και  $A^{-1}BA^{-1}b$ ;

**3.6** Θεωρούμε κάτω τριγωνικούς πίνακες  $A_i, i = 1, \dots, n-1$ , με μονάδες στη διαγώνιο και μηδενικά στις άλλες θέσεις που δεν δίνονται στοιχεία, της μορφής

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & a_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Βεβαιωθείτε ότι

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & -a_{ni} & & & 1 \end{pmatrix}$$



[Υπόδειξη: Βεβαιωθείτε ότι  $\delta_i = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{ii}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , βλ. Παρατήρηση 3.2, οπότε  $a_{ii}^{(i)} = \delta_i / \delta_{i-1}$ .]

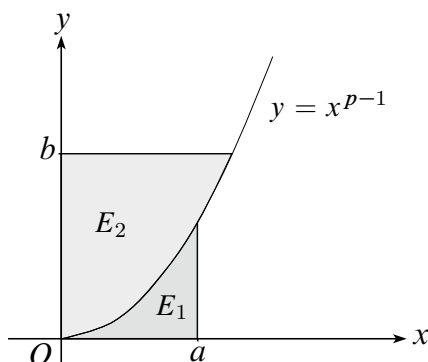
**3.11** Έστω ότι ο πίνακας  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλαδή ότι ισχύουν οι ανισότητες (3.68). Αποδείξτε απ' ευθείας (δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα του Gerschgorin), ότι αν ο  $A$  έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, τότε το ομογενές σύστημα  $Ax = 0$  έχει μόνο την τετριμμένη λύση  $x = 0$ , δηλαδή ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος.

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 3.10, αποδείξτε ότι η ανάλυση  $LU$  ενός πίνακα με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο μπορεί να επιτευχθεί χωρίς εναλλαγές γραμμών.

**3.23** α) Έστω  $1 < p, q < \infty$  τέτοια ώστε  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , και  $a, b$  μη αρνητικοί αριθμοί. Αποδείξτε την ανισότητα του Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Βεβαιωθείτε ότι αυτή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα μόνο στην περίπτωση  $b = a^{p-1}$ .



**Σχήμα 3.3:** Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας του Young: Το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών  $a$  και  $b$  δεν υπερβαίνει το άθροισμα των εμβαδών  $E_1$  και  $E_2$  των γκρι χωρίων του σχήματος.

[Γεωμετρική ερμηνεία, βλ. Σχήμα 3.3: Προφανώς

$$E_1 = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \text{ και } E_2 = \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}} dy = \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q}.$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου με μήκη πλευρών  $a$  και  $b$  δεν υπερβαίνει το άθροισμα των  $E_1$  και  $E_2$ .]

[Υπόδειξη: Έστω  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια κυρτή συνάρτηση. Τότε, για  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $\lambda \in [0, 1]$  ισχύει

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Για θετικούς  $a$  και  $b$ , επιλέξτε  $\varphi(t) := e^t$ ,  $x := \ln a^p$ ,  $y := \ln b^q$  και  $\lambda := \frac{1}{p}$ .]

β) Για  $1 \leq p < \infty$  ορίζουμε την απεικόνιση  $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Έστω  $x, y \in \mathbb{C}^n$ . Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder για αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \text{όπου} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

[Υπόδειξη: Για  $p = 1$  (οπότε  $q = \infty$  και  $\|\cdot\|_\infty$  η νόρμα μεγίστου) η ανισότητα είναι προφανής. Έστω λοιπόν  $p > 1$ . Έστω ότι  $x \neq 0$  και  $y \neq 0$ . Στην περίπτωση  $\|x\|_p = 1$  και  $\|y\|_q = 1$ , αθροίστε από  $i = 1$  έως  $i = n$  τις ανισότητες

$$|x_i y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q},$$

οι οποίες ισχύουν σύμφωνα με την ανισότητα του Young. Η γενική περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, θέτοντας

$$\tilde{x} := \frac{1}{\|x\|_p} x \quad \text{και} \quad \tilde{y} := \frac{1}{\|y\|_q} y.]$$

γ) Αποδείξτε ότι η απεικόνιση  $\|\cdot\|_p$  ορίζει μια νόρμα στον  $\mathbb{C}^n$ .

[Υπόδειξη: Προφανώς,  $|x_i + y_i|^p \leq |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$ . Για  $p > 1$  χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Hölder για αθροίσματα για να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα. Η τριγωνική ανισότητα στην προκειμένη περίπτωση λέγεται *ανισότητα του Minkowski*.]

δ) Έστω  $1 \leq p < q \leq \infty$  και  $x \in \mathbb{C}^n$ . Αποδείξτε την ανισότητα του Jensen

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p.$$

Παρατηρήστε ότι για  $x = e^1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^n$  η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα, συνεπώς η σταθερά δεν μπορεί να βελτιωθεί.

[Υπόδειξη: Προφανώς,  $|x_i| \leq \|x\|_p$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ιδιαίτερα, το αποτέλεσμα ισχύει για  $q = \infty$ . Επομένως, για  $q < \infty$  έχουμε

$$|x_i|^q = |x_i|^p |x_i|^{q-p} \leq |x_i|^p \|x\|_p^{q-p}$$

και αθροίζοντας οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα.]

**3.24** Προσδιορίστε τις βέλτιστες σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη των νορμών  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  του  $\mathbb{R}^n$ .

**3.25** Έστω  $1 \leq p < q < \infty$ . Χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Hölder για αθροίσματα, βλ. Άσκηση 3.23, για να αποδείξετε ότι

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Παρατηρήστε ότι για  $x = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{C}^n$  η ανισότητα αυτή ισχύει ως ισότητα. Συνδυάζοντας με την ανισότητα του Jensen οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|x\|_q$$

και οι σταθερές σε αυτές τις εκτιμήσεις είναι βέλτιστες.

**3.26** Έστω  $x \in \mathbb{R}^n$ . Αποδείξτε ότι για  $p \in [1, \infty)$  ισχύει  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$ , και οδηγηθείτε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

γεγονός που εξηγεί και τον συμβολισμό  $\|\cdot\|_\infty$ .

**3.30** Αποδείξτε ότι στον Ορισμό 3.5 το supremum για  $x \neq 0$  μπορεί να αντικατασταθεί από το supremum πάνω σε ορισμένα υποσύνολα του  $\mathbb{R}^n$ . Συγκεκριμένα αποδείξτε ότι

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

**3.31** Εξετάστε κατά πόσον υπάρχει φυσική νόρμα  $\|\cdot\|$ , για  $2 \times 2$  πίνακες, τέτοια ώστε για τον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  να ισχύει  $\|A\| = 2.5$ .

[Υπόδειξη: Υπολογίστε τη φασματική ακτίνα του  $A$ .]

**3.32** α) Ορίζουν οι ποσότητες

$$\|A\|_{\max} = \max_{i,j} |a_{ij}|, \quad \|A\|_E = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

φυσικές νόρμες πινάκων  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ;

β) Αποδείξτε ότι για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  και  $x \in \mathbb{R}^n$  ισχύει  $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \|x\|_2$ .

**3.33** Αν ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι συμμετρικός, αποδείξτε ότι

$$\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i(A)|,$$

όπου  $\lambda_i(A)$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ .

**3.36** Έστω  $\|\cdot\|$  μια νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$ , και  $\|\cdot\|$  η νόρμα στον  $\mathbb{R}^{n,n}$  που παράγεται από αυτή. Αν  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  με  $\|A\| < 1$ , αποδείξτε ότι ο πίνακας  $I_n - A$  είναι αντιστρέψιμος, και επί πλέον ότι ισχύει

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

**3.37** α) Ορίστε την ποσότητα  $\|A\|_E$ , όπως στην Άσκηση 3.31. Αποδείξτε ότι για κάθε  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  ισχύει

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_2.$$

(Σημειώστε ότι για  $A = I_n$  η δεύτερη ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Επίσης για  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  με μη μηδενικό στοιχείο μόνο στη θέση  $(1, 1)$ , η πρώτη ανισότητα ισχύει ως ισότητα.)

β) Προσδιορίστε σταθερές σύγκρισης για όλα τα ζεύγη νορμών πινάκων από τις  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_2$ .

γ) Αν  $\kappa_2(A)$ ,  $\kappa_1(A)$  είναι οι δείκτες κατάστασης ενός αντιστρέψιμου πίνακα  $A$  ως προς τις νόρμες  $\|\cdot\|_2$  και  $\|\cdot\|_1$ , αντίστοιχα, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{n} \kappa_1(A) \leq \kappa_2(A) \leq n \kappa_1(A).$$

Βρείτε ανάλογες “ανισότητες σύγκρισης” μεταξύ των δεικτών κατάστασης  $\kappa_2(A)$  και  $\kappa_\infty(A)$ .

**3.41** α) Έστω  $A$  αντιστρέψιμος άνω ή κάτω τριγωνικός πίνακας. Αποδείξτε ότι για τον δείκτη κατάστασης του  $A$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  ισχύει

$$\kappa_\infty(A) \geq \frac{\|A\|_\infty}{\min_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|}.$$

β) Χωρίς να υπολογίσετε τον  $A^{-1}$  αποδείξτε ότι για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1.01 & 0.99 \\ 0.99 & 1.01 \end{pmatrix}$$

ισχύει ότι  $\kappa_\infty(A) \geq 100$ .

[Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το τελευταίο αποτέλεσμα της Άσκησης 3.39 για κατάλληλο μη αντιστρέψιμο πίνακα  $B$ .]

**3.42** Έστω ότι ένας πίνακας  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  είναι αντιστρέψιμος και συμμετρικός. Αποδείξτε ότι

$$\kappa_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|},$$

όπου  $\lambda_i(A)$  οι ιδιοτιμές του  $A$ .

**3.43** Συμβολίζουμε με  $\|\cdot\|$  μια νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$ . Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  ένας πίνακας τέτοιος ώστε

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 10\|x\| \leq \|Ax\| \leq 20\|x\|.$$

Αν  $\kappa(A)$  είναι ο δείκτης κατάστασης του  $A$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|$ , αποδείξτε ότι  $1 \leq \kappa(A) \leq 2$ .

**3.51** Αν για κάποια διανυσματική νόρμα  $\|\cdot\|$  (και την αντίστοιχη φυσική νόρμα πίνακα) ισχύει  $\|G\| = \sigma < 1$  για τον πίνακα επανάληψης  $G = M^{-1}N$  της επαναληπτικής μεθόδου (3.61), τότε ισχύει

$$\|x^{(N)} - x^{(N-1)}\| \leq \varepsilon \implies \|x^{(N)} - x\| \leq \frac{\varepsilon\sigma}{1-\sigma}.$$

**3.59** Αν  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  και  $\|AB\| < 1$  για κάποια φυσική νόρμα του  $\mathbb{R}^{n,n}$ , αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός  $\nu$  τέτοιος ώστε

$$\|(BA)^\nu\| < 1.$$

**3.61** Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel δεν συγκλίνει για  $3 \times 3$  συστήματα με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 50 & 25 & 2 \end{pmatrix}.$$

**3.62** Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για  $3 \times 3$  συστήματα με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

**3.63** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Εξετάστε κατά πόσον η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για κάθε  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$  στη λύση  $x$  του συστήματος  $Ax = b$ ,  $b \in \mathbb{R}^3$ .

**3.64** Θεωρούμε γραμμικά συστήματα της μορφής  $Ax = b$  με πίνακα συντελεστών

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{7}{2} \\ 1 & 1 & \frac{7}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Jacobi συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , ενώ η μέθοδος των Gauss–Seidel γενικά αποκλίνει.

**3.65** Θεωρούμε γραμμικά συστήματα της μορφής  $Ax = b$  με πίνακα συντελεστών

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η μέθοδος των Gauss–Seidel συγκλίνει για οποιαδήποτε αρχική προσέγγιση  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ , ενώ η μέθοδος του Jacobi γενικά αποκλίνει.