ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο (βιβλίου): "ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ"

Δεδομένα: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής.

Ζητούμενο: $\int_a^b f(x)\,dx = I(f)$

$F' = f$ παράγουσα της f.

Τότε,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Σπάνια γνωρίζουμε την F. Αλλά και όταν την γνωρίζουμε είναι δυνατόν για "απλή f" η F να είναι πολύπλοκη.

π.χ.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}, \quad F(x)+c, \quad F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \ldots$$

Στην "αριθμητική ολοκλήρωση" προσεγγίζουμε το $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ με έναν τύπο ολοκλήρωσης Q_{n+1},

(*) $Q_{n+1}(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$,

με κόμβους $x_i \in [a,b]$ και βάρη w_i.

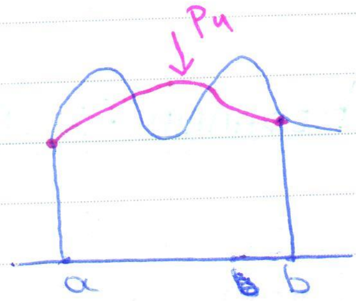
1η Περίπτωση:

• Τύποι ολοκλήρωσης των Newton-Cotes: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $h = \frac{b-a}{n}$ (το βήμα) και θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό

$x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$. του $[a,b]$ με βήμα h.

Για $f \in C[a,b]$ έστω $p_n \in \mathbb{P}_n$ το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, $\boxed{p_n(x_i) = f(x_i)}$, $i=0,\dots,n$.

$$Q_{n+1}(f) := \int_a^b p_n(x)\,dx.$$



Παρατήρηση: Αν $f \in \mathbb{P}_n$, τότε $p_n = f$.
Επομένως, $Q_{n+1}(f) = I(f)$.

Άρα: Ο Q_{n+1} ολοκληρώνει πολυώνυμα βαθμού μέχρι n ακριβώς.

Στόχος: Να γράψουμε το $Q_{n+1}(f)$ στη μορφή ⊛

- Έστω $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_n$, $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $i=0,\dots,n$.

Τότε, το p_n γράφεται στη μορφή:

$$\boxed{p_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i}$$

Επομένως, $Q_{n+1}(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx =$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L(x_i)\,dx. = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{=w_i}$$

$$w_i = \int_a^b L_i(x)\,dx = \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,dx \overset{\boxed{x=a+hs}}{=} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a+hs-x_j}{x_i-x_j}\, h\, ds =$$

$$= h \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\cancel{a}+hs-(\cancel{a}+jh)}{(\cancel{a}+ih)-(\cancel{a}+jh)}\,ds =$$

$$= h \int_0^n \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{s-j}{i-j}}_{=\Phi_i(s)}\,ds$$

$x=b \rightsquigarrow b = a+hs$

$s = \frac{b-a}{h} = \frac{b-a}{\frac{b-a}{n}} = n.$

Οι ϕ_i είναι ανεξάρτητες του διαστήματος $[a,b]$

Με $\boxed{w_i^* = \int_0^n \phi_i(s)\,ds}$ ανεξάρτητα του $[a,b]$, τα βάρη

w_i δίνονται ως $\boxed{w_i = h\, w_i^*}$. Τα $w_0^*, \dots, w_n^*$ υπολογίζονται μία φορά, και ύστερα προκύπτουν τα w_i.

14/05/2015

w_i^* εξαρτώνται μόνο από το n. , Ισχύει: $\forall p \in \mathbb{P}_n$, $\int_a^b p(x)dx = Q_n(p)$

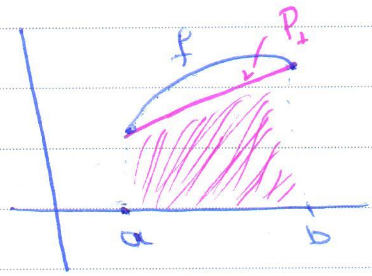
Ερώτημα: Για $f \in C[a,b]$, ισχύει $Q_{n+1}(f) \to \int_a^b f(x)dx$, $n \to \infty$

Απάντηση: Γενικά όχι.

Οι τύποι Newton-Cotes δεν παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον για μεγάλο n.

"Ο τύπος του τραπεζίου":

$\boxed{n=1}$, $h = b-a$



$x_0 = a$, $x_1 = a+h = b$

$$Q_2(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

Ερώτημα: Τι μπορούμε να πούμε για το σφάλμα

$$R_2(f) = \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I(f)} - Q_2(f) \;;$$

Λήμμα (Παράσταση του σφάλματος του "απλού" τύπου του τραπεζίου)

Έστω $f \in C^2[a,b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω. $R_2(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$

SOS

Απόδειξη

Έστω $p_1 \in \mathbb{P}_1$ τω $p_1(a) = f(a)$, $p_1(b) = f(b)$

- $Q_2(f) = Q_2(p_1)$
- $Q_2(p_1) = \underbrace{\int_a^b p_1(x)\,dx}_{= I(p_1)}$

Επομένως,

$$R_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_2(f)}_{= Q_2(p_1) = \int_a^b p_1(x)\,dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2(f) = \int_a^b [f(x) - p_1(x)]\,dx}$$

Απο τη θεωρία παρεμβολής ξέρουμε ότι:

$\forall x \in [a,b]$ $\exists\ \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)$$

Συνεπώς,

$$R_2(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-a)(x-b)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{(x-a)(b-x)}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx \quad (1)$$

Έστω $m := \min_{a \leq x \leq b} f''(x)$, $M := \max_{a \leq x \leq b} f''(x)$

Τότε,

$$m \underbrace{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx}_{\geq 0} \leq \int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx$$

$$\leq M \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$$

>0

Επομένως, διαιρώντας με το $\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx$ παίρνουμε:

$$m \leq \frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} \leq M.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\frac{\int_a^b (x-a)(b-x) f''(\xi(x))\,dx}{\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx} = f''(\xi) \quad (2)$$

• Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$R_2(f) = -\frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b (x-a)(b-x)\,dx \sim \frac{(b-a)^3}{6}$$

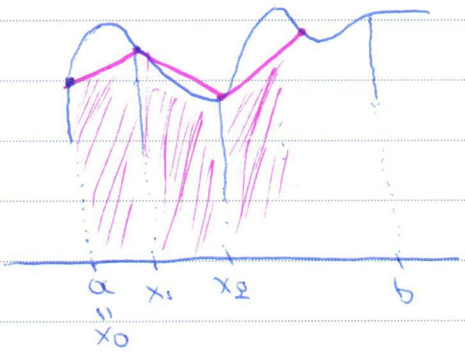
Άρα:

$$(*) \quad \boxed{R_2(f) = \frac{-(b-a)^3}{12} f''(\xi)}$$

"Σύνθετος τύπος του τραπεζίου":

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

• Εφαρμόζουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ τον απλό τύπο του τραπεζίου και προσθέτουμε τα αποτελέσματα. Αυτό μας δίνει τον λεγόμενο "σύνθετο" τύπο του τραπεζίου:



$$Q^T_{n+1}(f) = \frac{\overset{h}{(x_1 - x_0)}}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] + \frac{\overset{h}{x_2 - x_1}}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]+\dots+$$

$$+\frac{\overset{h}{(x_n - x_{n-1})}}{2}\left[f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

$$= h\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

Πρόταση: (Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του τραπεζίου.)

Έστω $f \in C^2[a,b]$ και Q^T_{n+1} ο σύνθετος τύπος του τραπεζίου στο διάστημα $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$ και κόμβους $x_i = a + ih$, $i=0,\dots,n$. Τότε, αν $R^T_{n+1}(f)$ το σφάλμα, $R^T_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^T_{n+1}(f)$, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi).$$

Συμπέρασμα:

$$|R^T_{n+1}(f)| \le \underbrace{\frac{b-a}{12}h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|}_{\to c}$$

$$\le c\,h^2.$$

Το σφάλμα είναι δεύτερης τάξης, καθώς το $h \to 0$.

Απόδειξη:

Το σφάλμα $R^T_{n+1}(f)$ του σύνθετου τύπου του τραπεζίου είναι, προφανώς, το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων των απλών τύπων του τραπεζίου σε καθένα των υποδιαστημάτων του $[x_i, x_{i+1}]$. Επομένως σύμφωνα με την (*), έχουμε

$$R^T_{n+1}(f) = -\frac{\overbrace{\boxed{(x_1-x_0)^3}}^{=h^3}}{12} f''(\xi_1) - \frac{\overbrace{\boxed{(x_2-x_1)^3}}^{=h^3}}{12} f''(\xi_2) - \dots - \frac{\overbrace{\boxed{(x_n-x_{n-1})^3}}^{=h^3}}{12} f''(\xi_n)$$

με $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i=1,\dots,n$.

Επομένως, $R^T_{n+1}(f) = -\frac{h^3}{12}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\dots+f''(\xi_n)]$

$$= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = -\frac{h^3}{12}\cdot n\cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

$$= -\frac{b-a}{12} h^2 \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)} \quad (+)$$

Όμως,

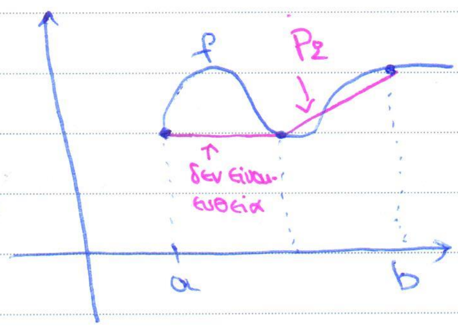
$$\min_{a\le x\le b} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \le \max_{a\le x\le b} f''(x)$$

οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) = f''(\xi)$

Αν κάνω αντικατάσταση στην (+) παίρνω αυτό που θέλω.

• "Ο τύπος του Simpson":

$\boxed{n=2}$, $h = \frac{b-a}{2}$



$x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$Q_3(f) = \int_a^b p_2(x)dx = \dots =$

$$= \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3}f(a) + \overset{*}{\frac{4}{3}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3}f(b)\right]$$

$$= \left(\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \right)$$

* το βάρος στο μέσον είναι 4 φορές μεγαλύτερο από τα άλλα 2.

Ξέραμε ότι: $\forall\, p \in \mathbb{P}_2$, $\int_a^b p(x)dx = Q_3(p)$

Ισχυρισμός:
$\forall\, p \in \mathbb{P}_3$ $\quad \int_a^b p(x)dx = Q_3(p)$

Δηλαδή, ο τύπος του Simpson ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και τρία

SOS
Απόδειξη: Αρκεί ν.α.ο. το $q_3(x) = x^3$ ολοκληρώνεται ακριβώς.

▷ Με πράξεις:

$$\int_a^b x^3dx - Q_3(q_3) = \int_a^b x^3 dx - \frac{b-a}{6}\left[a^3 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^3\right]$$

$$= \quad = 0.$$

▷ Γράφουμε, $q_3(x) = x^3 = \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{= p(x)} + q(x)$

με $q \in \mathbb{P}_2$

• Το σφάλμα $R_3(q_3) = R_3(p) + \underbrace{R_3(q)}_{= 0,\ \text{γιατί } q \in \mathbb{P}_2}$

$$= \overset{=0}{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 dx} - Q_3(p) = -Q_3(p) =$$

$$= -\frac{b-a}{6}\left[p(a) + 4p\left(\overset{0}{\frac{a+b}{2}}\right) + \underset{= -p(a)}{p(b)}\right] = 0.$$

Πρόταση: (Παράσταση του σφάλματος του απλού τύπου του Simpson)

Έστω $f \in C^4[a,b]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f) = \frac{-(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

Απόδειξη: Έστω $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$p(a) = f(a), \quad p\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad p(b) = f(b)$$

$$p'(x_1) = f'(x_1)$$

Τότε, ισχύουν:

- $Q_3(p) = Q_3(f)$
- $Q_3(p) = \int_a^b p(x)\,dx$

Επομένως, $R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{Q_3(f)}_{= Q_3(p)} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p(x)\,dx$

$$\Rightarrow \boxed{R_3(f) = \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx}$$

Τώρα, σύμφωνα με την άσκηση 4.15, έχουμε $\forall x \in [a,b]$ $\exists\, \xi(x) \in (a,b)$,

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x-x_0)\boxed{(x-x_1)^2}(x-x_2)$$

Άρα,

$$R_3(f) = \frac{1}{24}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(x-b)\, f^{(4)}(\xi(x))\,dx$$

$$= -\frac{1}{24}\int_a^b \underbrace{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2(b-x)}_{\geq 0} f^{(4)}(\xi(x))\,dx = \dots =$$

πρέπει το ολοκλήρωμα να βγει απ' έξω μέσω του min και max που κάναμε πριν.

$$= \dots = \frac{-1}{24} f^{(4)}(\xi) \boxed{\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 (b-x)\,dx.}$$

$$\frac{(b-a)^5}{2^3 \cdot 15} = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

19/05/2015

• Ο τύπος του Simpson.

$$Q_3(f) = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b)\right]$$

$h = \frac{b-a}{2}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,1,2$

$$Q_3(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

$$R_3(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q_3(f)$$

$\forall f \in C^4[a,b]$ $\exists\, \xi \in (a,b)$

$$R_3(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi)$$

• Σύνθετος τύπος του Simpson:

Έστω $n \in \mathbb{N}$ ένας άρτιος αριθμός , $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$.
Εφαρμόζοντας τον απλό τύπο του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, …, $[x_{n-2}, x_n]$ και αθροίζοντας τα αποτελέσματα οδηγούμαστε στον σύνθετο τύπο του Simpson Q^S_{n+1},

$$Q^S_{n+1} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$
$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$
$$\vdots$$
$$+ \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

δηλαδή,

$$Q^S_{n+1}(f) = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$R^S_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^S_{n+1}(f)$$

παράσταση του $R^S_{n+1}(f)$;

Πρόταση (Παράσταση του σφάλματος του σύνθετου τύπου του Simpson).

Έστω $f \in C^4[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ άρτιος και Q^S_{n+1} ο σύνθετος τύπος του Simpson στο $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$. Τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω. για το σφάλμα $R^S_{n+1}(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q^S_{n+1}(f)$ να έχουμε:

$$\boxed{R^S_{n+1}(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)}$$

Απόδειξη:

Το συνολικό σφάλμα $R^S_{n+1}(f)$ είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων του απλού τύπου του Simpson στα υποδιαστήματα $[x_{2i-2}, x_{2i}]$, $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$.

Επομένως, σύμφωνα με την (*) έχουμε

$$R^S_{n+1}(f) = -\frac{(\overbrace{x_2 - x_0}^{=2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_1) - \frac{(\overbrace{x_4 - x_2}^{=2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_2) - \dots - \frac{(\overbrace{x_n - x_{n-2}}^{=2h})^5}{2^4 \cdot 180} f^{(4)}(\xi_{\frac{n}{2}})$$

(με $\xi_1 \in (x_0, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_4)$, ..., $\xi_i \in (x_{2i-2}, x_{2i})$ ...)

$$= -\frac{(2h)^5}{2^4 \cdot 180}\left[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) + \dots + f^{(4)}(\xi_{\frac{n}{2}})\right]$$

$$= -\frac{\cancel{2^5} h^5}{\cancel{2^4} 180} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)$$

$$= -\frac{2 h^5}{180} \frac{n}{2} \underbrace{\left(\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n/2} f^{(4)}(\xi_i)\right)}_{=f^{(4)}(\xi)}$$

από min και max $\leftarrow f^{(4)}(\xi)$

$$= -\frac{n h^5}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$= -\frac{\overbrace{n \cdot h}^{b-a} h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$$

$$= -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

• Τύποι ολοκλήρωσης του Gauss:

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $w:[a,b]$ συνάρτηση βάρους, δηλ. $w(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. $0 < \int_a^b w(x)\,dx < \infty$.

Προσεγγίζουμε το $I(f) = \int_a^b w(x) f(x)\,dx$ με τύπους της μορφής

$$(+) \quad Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Στόχος: Να προσδιορίσουμε τους κόμβους x_i και τα βάρη w_i έτσι ώστε ο Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μεγαλύτερου δυνατού βαθμού.

Ισχυρισμός: Κανένας τύπος της μορφής $(+)$ δεν ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n$.

Για οποιονδήποτε τύπο της μορφής $(+)$ επιλέγουμε:
$p(x) = (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2$.
Τότε $p \in \mathbb{P}_{2n}$ $Q_n(p) = 0$. Επίσης, $I(p) = \int_a^b w(x)\,p(x)\,dx =$

$$= \int_a^b w(x) \underbrace{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}_{\geq 0}\,dx > 0$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει ακριβώς ένας τύπος της μορφής $(+)$ που ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$. Αυτός ο τύπος λέγεται «τύπος του Gauss».

Υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p_n βαθμού ακριβώς n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα (γράφουμε $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$) τ.ω.

$$\int_a^b w(x)\,p_n(x)\,r_{n-1}(x)\,dx = 0 \quad \forall\, r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

(έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1 και ακριβώς n βαθμού)

• Οι ρίζες $x_1, \ldots, x_n$ του p_n είναι απλές και βρίσκονται στο διάστημα (a,b).

• Τα πολυώνυμα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ με αυτήν την ιδιότητα λέγονται "ορθογώνια πολυώνυμα" ως προς τη συνάρτηση βάρους ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ ("Ύπαρξη και μοναδικότητα ~~[illegible]~~ ολοκλήρωσης του Gauss")
Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\omega: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους, και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ως προς ω ορθογώνια πολυώνυμα με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα. Τότε:

(α) Με κόμβους $a < x_1 < \dots < x_n < b$ τις ρίζες του p_n, υπάρχουν μοναδικά ορισμένα βάρη, $\omega_1, \dots, \omega_n$ τω ο Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού έως $2n-1$, δηλαδή

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}, \quad \int_a^b \omega(x) p(x)\, dx = Q_n(p).$$

Μάλιστα, τα $\omega_1, \dots, \omega_n$ (βάρη) είναι <u>θετικά</u>.

(β) Αν ο Q_n με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $\omega_1, \dots, \omega_n$ ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού έως και $2n-1$, τότε τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

Απόδειξη:
(α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ τω $q(x_i) = p(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.
Τότε προφανώς $(p-q)(x) = \underbrace{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}_{= p_n} r_{n-1}(x)$ με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.

δηλαδή, $p = q + p_n r_{n-1}$. Άρα,

$$\int_a^b \omega(x) p(x)\, dx = \int_a^b \omega(x) q(x)\, dx + \underbrace{\int_a^b \omega(x) p_n(x) r_{n-1}(x)\, dx}_{= 0}$$

οπότε,

$$(++) \quad \int_a^b \omega(x) p(x)\, dx = \int_a^b \omega(x) q(x)\, dx.$$

Με $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{P}_{n-1}$ τα πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα $x_1, \dots, x_n$, δηλ. $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $i = 1, \dots, n$, έχουμε

$$q = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i$$

Επομένως, η (+) δίνει

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \int_a^b w(x) \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\int_a^b w(x) L_i(x) dx \right]}_{\overset{\shortparallel}{w_i} \text{ (ανεξ. του } p)} p(x_i)$$

Μοναδικότητα των βαρών:

Έστω $Q_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i' f(x_i)$ ένας τύπος που ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$. Τότε:

$L_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, οπότε $\int_a^b w(x) [L_i(x)]^2 = Q_n(L_i^2) = Q_n'(L_i^2)$.

Όμως, $Q_n(L_i^2) = \sum_{j=1}^{n} w_j \underbrace{[L_i(x_j)]^2}_{\delta_{ij}} = w_i [\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{L_i(x_i)}]^2 = w_i$

και αντίστοιχα,

$Q_n'(L_i^2) = w_i'$, οπότε $w_i' = w_i$, $i = 1, \dots, n$.

Επίσης, $w_i = \int_a^b w(x) [L_i(x)]^2 dx > 0$.

(β) Έστω $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Θέτουμε $p(x) := (x - x_1) \cdots (x - x_n) r_{n-1}(x)$.
Προφανώς, $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ και $Q_n(p) = 0$.

~~Συμπεραίνουμε~~: $\int_a^b w(x) \underbrace{(x - x_1) \cdots (x - x_n)}_{\tilde{p}_n} r_{n-1}(x) dx \quad \forall r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.

Λόγω της μοναδικότητας των ορθογώνιων πολυωνύμων (με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα) ~~[illegible]~~ έχουμε $\tilde{p}_n = p_n$, δηλαδή τα $x_1, \dots, x_n$ είναι ρίζες του p_n.

ΘΕΩΡΗΜΑ ("Παράσταση του σφάλματος τύπου ολοκλήρωσης του Gauss").

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ως προς w ορθογώνια πολυώνυμα (με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα). Αν Q_n ο τύπος του Gauss και $f \in C^{2n}[a,b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 dx$$

Απόδειξη: Έστω $x_1, \dots, x_n$ οι κόμβοι του Q_n και $w_1, \dots, w_n$ τα αντίστοιχα βάρη.

Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ τ.ω.

$p(x_i) = f(x_i)$, $p'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. (Παρεμβολή Hermite).

Τότε, $Q_n(p) = Q_n(f)$. (έχουν ίδιες τιμές στα x_i)

και $\int_a^b w(x) p(x)\,dx = Q_n(p)$

Επομένως,

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \int_a^b w(x)[f(x) - p(x)]\,dx.$$

Όμως, $\forall x \in [a,b]$ $\exists$ $\xi(x) \in (a,b)$ έτσι ώστε $f(x) - p(x) =$

$$\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \underbrace{(x-x_1)^2 \cdots (x-x_n)^2}_{[p_n(x)]^2}. \text{ (Παρεμβολή Hermite).}$$

→ με min και max.

Άρα, $\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \int_a^b \underbrace{w(x) \frac{1}{(2n)!}}_{\geq 0} f^{(2n)}(\xi(x)) [p_n(x)]^2 dx.$

$$= f^{(2n)}(\xi) \frac{1}{(2n)!} \int_a^b w(x)[p_n(x)]^2 dx.$$

21/05/2015

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου:

Άσκηση 6.3:

$n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$.

$\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$x_1, \dots, x_n \in [a,b]$.

Ν.Δ.Ο. $\exists\ \xi \in [a,b]$ $\overbrace{\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n)}^{\text{κυρτοί συνδυασμοί}} = \phi(\xi)$

Απόδειξη:

- $\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) \leq \lambda_1 \max\limits_x \phi(x) + \dots + \lambda_n \max\limits_x \phi(x)$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)}_{=1} \max_x \phi(x)$$

$$= \max_x \phi(x)$$

- Αντίστοιχα παίρνουμε:

$\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) \geq \min\limits_x \phi(x)$

Συμπέρασμα: $\min\limits_{a \leq x \leq b} \phi(x) \leq \lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) \leq \max\limits_{a \leq x \leq b} \phi(x)$

↳ πρέπει να το αποδείξουμε

Σύμφωνα με το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, αφού η ϕ είναι συνεχής, υπάρχει $\xi \in [a,b]$, τ.ω. $\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) = \phi(\xi)$.

Άσκηση 6.4:

ϕ, $x_1, \dots, x_n$ όπως προηγουμένως, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ομόσημοι

Ν.Δ.Ο.

$\exists\ \xi \in [a,b]$, $\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\ \phi(\xi)$

Απόδειξη:

1η περίπτωση: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

Τότε,

$\lambda_1 \phi(x_1) + \dots + \lambda_n \phi(x_n) \leq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \max\limits_{a \leq x \leq b} \phi(x)$

$$\geq (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \min_{a \leq x \leq b} \phi(x)$$

$$\Rightarrow \min_{a\le x\le b} \phi(x) \overset{\lambda_1+\dots+\lambda_n>0}{\le} \frac{\lambda_1\phi(x_1)+\dots+\lambda_n\phi(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} \le \max_{a\le x\le b}\phi(x)$$

$$\frac{\lambda_1\phi(x_1)+\dots+\lambda_n\phi(x_n)}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = \phi(\xi)$$

$\Rightarrow \dots$

2η Περίπτωση: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \le 0$

Τότε, σύμφωνα με την 1η Περίπτωση

$$-\lambda_1\phi(x_1) - \dots - \lambda_n\phi(x_n) = (-\lambda_1-\lambda_2 \dots -\lambda_n)\phi(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1\phi(x_1)+\dots+\lambda_n\phi(x_n) = (\lambda_1+\dots+\lambda_n)\phi(\xi).$$

Άσκηση 6.8:

$[-1,1]$, Q_n^T, Q_m^S

$$f(x) = \frac{x^6}{30} - x^2.$$

N.Δ.Ο: $Q_n^T(f) \le \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \le Q_m^S(f)$

Απόδειξη:

$$R_{n+1}^T(f) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) \quad (6.4.)$$

$$R_{n+1}^S(f) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\theta) \quad (6.9.)$$

Επομένως,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n^T(f) = -\frac{2}{12}\left(\underbrace{\frac{2}{n-1}}_{h}\right)^2 f''(\xi)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n-1}\right)^2}_{<0} \underbrace{f''(\xi)}_{<0} > 0.$$

- $f'(x) = \frac{x^5}{5} - 2x$
- $f''(x) = x^4 - 2 \le -1 < 0, \ \forall x \in [-1,1]$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geq Q_n^T(f)}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_m^S(f) = -\frac{2}{180}\left(\overset{h}{\frac{2}{m-1}}\right)^4 f^{(4)}(\theta)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{90}\left(\frac{2}{m-1}\right)^4}_{<0} \underbrace{f^{(4)}(\theta)}_{\geq 0} \leq 0$$

- $f''' = 4x^3$
- $f^{(4)}(x) = 12x^2 \geq 0, \forall x \in [-1,1]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq Q_m^S(f)$$

Άσκηση 6.9:

$[a,b]$ $\quad Q$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$$

Ν.Δ.Ο: Υπάρχει το πολύ ένας $k \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$\exists C_k \in \mathbb{R}\ \forall f \in C^k[a,b]\ \exists \xi \in [a,b]$.

$R(f) = C_k f^{(k)}(\xi)$.

Απόδειξη: Αν μια τέτοια σχέση ίσχυε με $C_k = 0$, τότε θα είχαμε $R(f) = 0$, $\forall f \in C^k[a,b]$. Ιδιαίτερα, ο Q θα ολοκλήρωνε ακριβώς όλα τα πολυώνυμα, άτοπο.

Έστω ότι η ⊛ ισχύει για ένα συγκεκριμένο k (με $C_k \neq 0$)

Συμπέρασμα:

$\forall p \in P_{k-1}$, $R(p) = C_k \underbrace{p^{(k)}(\xi)}_{=0}$, δηλαδή ο Q ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού έως και $k-1$.

$p(x) = x^k$.

Τότε, $R(p) = C_k \overset{=k!}{p^{(k)}(\xi)} \neq 0$

Συμπέρασμα: Αν ισχύει η ⊛ (με $C_{1,k} \neq 0$), τότε ο Q ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $k-1$, αλλά όχι πολυώνυμα βαθμού k. Αυτό μπορεί να συμβεί για ένα το πολύ k.

Άσκηση 6.10:

$[-a,a]$

Q_n τύπος των Newton-Cotes με n κόμβους

$Q_n(f) = w_0 f(x_0) + \dots + w_{n-1} f(x_{n-1})$

Αν $x_i \neq -x_j$, ν.δ.ο. $w_i = w_j$

(Ο τύπος είναι συμμετρικός)

Απόδειξη:

Έχουμε ⊛ $\forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$ $\int_{-a}^{a} p(x)\,dx = Q_n(p)$

Για τα πολυώνυμα του Lagrange L_i, L_j

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}, \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$$

η ⊛ δίνει $\int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \underset{Q_n(L_i)}{w_i}$ και $\int_{-a}^{a} L_j(x)\,dx = w_j$

Τώρα,

$$w_i = \int_{-a}^{a} L_i(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n-1} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}\,dx = \int_{-a}^{a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{x+x_k}{x_i+x_k}\,dx$$

$$\underset{\boxed{t=-x}}{=} \int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{-t+x_k}{-x_j+x_k}\,(-dt) = -\int_{a}^{-a} \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{-(t-x_k)}{-(x_j-x_k)}\,dt$$

αντιστρέφει τα ολοκλήρωμα με το (-)

$$= \int_{-a}^{a} \underbrace{\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n-1} \frac{t-x_k}{x_j-x_k}}_{= L_j(t)}\,dt = w_j$$

Άσκηση 6.11:

$[-a,a]$, Q_n τύπος των Newton-Cotes

<u>Ν.Δ.Ο.:</u> $\phi:[-a,a]\to\mathbb{R}$ περιττή (ολοκληρώσιμη)

$$\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx = Q_n(\phi)$$

"Όταν ολοκληρώνει άρτιο αριθμό, θα ολοκληρώνει και τον επόμενο, που θα είναι περιττός".

• $$\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx \underset{t=-x}{=} \int_{a}^{-a}\phi(-t)(-dt) =$$

$$= -\int_{a}^{-a}\phi(-t)\,dt = \int_{-a}^{a}\underbrace{\phi(-t)}_{-\phi(t)}\,dt = -\int_{-a}^{a}\phi(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx = 0$$

πρέπει ν.δ.ο. και το $Q_n(\phi)=0$.

• Όμως, οι κόμβοι $x_1,\dots,x_n$ του Q_n, $-a=x_1<x_2<\dots<x_n=a$, είναι ανά δύο αντίθετοι και αντίθετοι κόμβοι έχουν τα ίδια βάρη (σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση.

οπότε $\phi(0)=0$,

$$Q_n(\phi) = \sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} w_i\,[\underbrace{\phi(x_i)+\phi(-x_i)}_{=0}] = 0.$$

λόγω περιττής συνάρτησης.

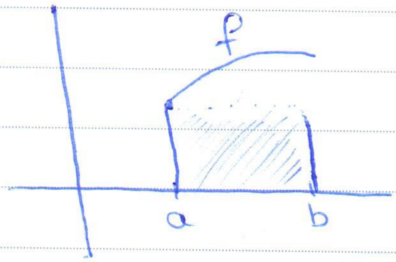
Άρα, $\int_{-a}^{a}\phi(x)\,dx = Q_n(\phi)$.

Άσκηση 6.13:

$Q(f) = (b-a) f(a)$

αριστερός τύπος του ορθογωνίου

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$



(α.) $\forall p \in \mathbb{P}_0 \quad , R(p) = 0$

$p(x) = c$

$R(p) = \int_a^b c\,dx - \underbrace{Q(p)}_{c(b-a)} = c(b-a) - c(b-a) = 0$ ✓

(β.) $\forall f \in C^1[a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b)$

(*) $R(f) = \dfrac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \overbrace{\underbrace{(b-a)}_{\int_a^b f(a)dx} f(a)}^{Q(f)}$

$= \int_a^b [f(x) - f(a)]\,dx$

(*) απόδειξη με min και max και θ. ενδιαμ. τιμής.

$\underset{\text{Taylor}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{\geq 0} f'(\xi(x))\,dx$

Κατά Taylor:
$f(x) = f(a) + (x-a) f'(\xi(x))$

$= f'(\xi) \int_a^b (x-a)\,dx$

$= f'(\xi) \left[\dfrac{(x-a)^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b}$

$= \dfrac{(b-a)^2}{2} f'(\xi)$

(γ) $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

$\forall f \in C^1[a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{2} h f'(\xi)$$

Απόδειξη

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h f(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - (x_{i+1}-x_i) f(x_i)\right]$$

$$\underset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\overbrace{x_{i+1}-x_i}^{h})^2}{2} f'(\xi_i) \quad \text{με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i) = \frac{h^2}{2} n \cdot \overbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f'(\xi_i)}^{=f'(\xi)} = n\frac{h^2}{2} f'(\xi)$$

$$= \frac{n \cdot h}{2} h f'(\xi)$$

$$= \frac{b-a}{2} f'(\xi)$$

Άσκηση 6.14:

$Q(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

τύπος του μέσου

$R(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

(α) $\forall p \in \mathbb{P}_1$, $R(p) = 0$

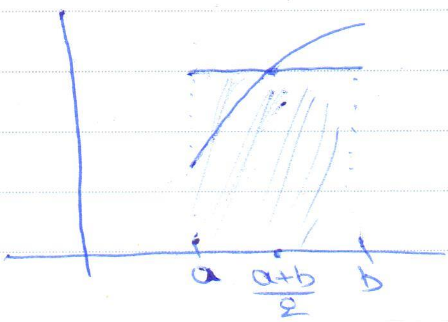
$p(x) = \gamma x + \delta$ με $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Τότε

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b (\gamma x + \delta)dx = \gamma\frac{b^2-a^2}{2} + \delta(b-a)$$

$$Q(p) = (b-a)\left[\gamma\frac{a+b}{2} + \delta\right]$$

$$= \gamma\frac{b^2-a^2}{2} + \delta(b-a)$$



Άρα $\int_a^b p(x)dx = Q(p)$

(6) $\forall f \in C^2[a,b] \ \exists \ \xi \in (a,b)$, $R(f) = \dfrac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$

$$\bullet\ R(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx}$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] dx.$$

Taylor: $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \dfrac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi(x))$

με $\xi(x)$ μεταξύ $\frac{a+b}{2}$ και x.

Επομένως:

$$R(f) = \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) dx}_{= 0} + \int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi(x))dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))dx$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2} f''(\xi) \left[\frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3}{3}\right]_{x=a}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{6} f''(\xi) \left\{ \underbrace{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{= \left(\frac{b-a}{2}\right)^3} - \underbrace{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3}_{= \left(\frac{a-b}{2}\right)^3} \right\}$$

$$= \frac{1}{6} f''(\xi) \cdot 2 \left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{1}{6} f''(\xi) \cdot \cancel{2} \frac{(b-a)^3}{2^{\cancel{3}}}$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$$

2ος τρόπος

$p \in \mathbb{P}_1$

$$p'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx - \underbrace{Q(f)}_{\substack{\| \\ Q(p) \\ \| \\ \int_a^b p(x)\,dx}} = \int_a^b [f(x)-p(x)]dx$$

i) $f(x)-p(x) \overset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) - p\left(\frac{a+b}{2}\right)\right.}_{=0} + \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\left[f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - p'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}_{0}$

$+ \dfrac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\left[f''(\xi(x)) - \underbrace{p''(\xi(x))}_{=0}\right] =$

$= \dfrac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{2} f''(\xi(x))$

↳ συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

3ος τρόπος

Παράσταση του σφάλματος παρεμβολής Hermite:

$\forall x \in [a,b] \;\; \exists\, \xi(x) \in (a,b)$

$$f(x)-p(x) = \frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Επομένως,

$$R(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \ldots$$

(8) $n \in \mathbb{N}$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$.

ΝΔΟ: Για $f \in C^2[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\underbrace{x_i + \frac{h}{2}}_{\substack{\| \\ \frac{x_i + x_{i+1}}{2}}}\Big) = \frac{b-a}{24}h^2 f''(\xi)$$

$$\int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - hf\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx - (x_{i+1}-x_i)\, f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]}_{\overset{(6)}{=}}$$

$$\frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{24} f''(\xi_i) \quad \text{με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$$

$$= \frac{h^3}{24}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = \frac{h^3}{24}\, n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i) = f''(\xi)$$

$$= \frac{n \cdot h^3}{24} f''(\xi) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

Άσκηση 6.15:

$$Q(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$$

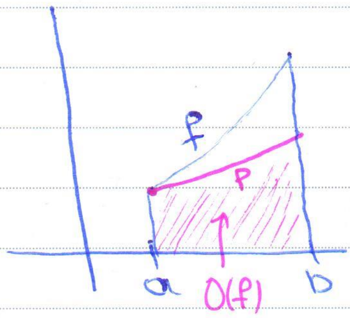
- $p(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$

  $p \in \mathbb{P}_1$ πολυώνυμο του Taylor της f ως προς το a.

$$\int_a^b p(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(a)$$

$$= Q(f).$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - Q(f)$$



(α) $\forall\, p \in \mathbb{P}_1 \quad , R(p) = 0$

$p(x) = \gamma x + \delta$

$$\int_a^b p(x)\,dx = \gamma \frac{b^2 - a^2}{2} + \delta(b-a)$$

$$Q(p) = (b-a)\underbrace{p(a)}_{\gamma a + \delta} + \frac{(b-a)^2}{2} p'(a)^{=\gamma} = \cdots = \int_a^b p(x)\,dx.$$

(β) $\forall\, f \in C^2[a,b] \;\; \exists\, \xi \in (a,b)$

$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

$$R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) = \int_a^b [f(x) - p(x)]\,dx \overset{*}{=}$$

Τώρα,

$$f(x) \underset{\text{Taylor}}{=} \overbrace{f(a) + (x-a) f'(a)}^{=p(x)} + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi(x))$$

→ με min και max.

$$\overset{*}{=} \int_a^b \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi(x))\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{(x-a)^2}_{\geq 0} f''(\xi(x))\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} f''(\xi) \underbrace{\int_a^b (x-a)^2\,dx}_{\frac{(b-a)^3}{3}} = \frac{(b-a)^3}{6} f''(\xi)$$

(γ) $n \in \mathbb{N} \quad , h = \frac{b-a}{n} \quad , x_i = a + ih \quad , i = 0, \dots, n.$

Για $f \in C^2[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.

← σύνθετος τύπος

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$

Απόδειξη:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1}\left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \quad - \quad ''$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \left[h f(x_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i)\right]\right\}}_{\overset{(\beta)}{=}\ \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6} f''(\xi_i) \text{ με } \xi_i \in (x_i, x_{i+1})} =$$

$$= \frac{h^3}{6}\, n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f''(\xi_i)}_{= f''(\xi)} = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi)$$