Άσκηση 4.4

$p \in \mathbb{P}_3$ τέτοιο ώστε:

$p(x_i) = \ln(x_i)$, $x_i = i+1$, $i = 0, 1, 2, 3$

$\varepsilon(x) = \ln x - p(x)$, $x \in [1, 4]$

ΝΔΟ: Η ε έχει στο $[1,4]$ ακριβώς 4 ρίζες.

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\varepsilon(i+1) = f(i+1) - p(i+1) =$$

$$= f(x_i) - p(x_i) =$$

$$= 0 \; , \; i = 0, 1, 2, 3$$

δηλαδή οι 1, 2, 3, 4 είναι ρίζες της ε.

Μένει να αποδείξουμε ότι δεν έχει καμμία άλλη ρίζα

$\forall x \in [1,4] \; \exists \xi \in (1,4)$:

$$\varepsilon(x) = \frac{\ln^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$$

$$= \underbrace{-\frac{6}{4!}\frac{1}{\xi^4}}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άσκηση 4.5

$p \in \mathbb{P}_3$, $p(i) = e^i$, $i = 1, 2, 3, 4$

ΝΔΟ: $\forall x \in (2,3) : e^x > p(x)$

Απόδειξη

Το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης $f(x) = e^x$ στα σημεία 1, 2, 3, 4.
Άρα:

$\forall x \in [1,4]\ \forall \xi \in (1,4)$:
$$e^x - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Άρα:

$$e^x - p(x) = \frac{e^\xi}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Για $x \in (2,3)$: $\underbrace{+ \quad + \quad + \quad - \quad -}_{+}$

$\Rightarrow e^x - p(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > p(x)$

Άσκηση 4.6

$f \in C[a,b]$, $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$

και $p \in \mathbb{P}_n$, $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Έστω P πολυώνυμο τέτοιο ώστε:

$P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ: $P = p + rq$
με q πολυώνυμο και
$r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

Απόδειξη

$(P-p)(x_i) = P(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$,
για $i = 0, \dots, n$.

Άρα τα $x_0, \dots, x_n$ είναι ρίζες του $P-p$,
επομένως:

$$P(x) - p(x) = q(x)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \Leftrightarrow$$

$$P(x) - p(x) = q(x)\,r(x) \Leftrightarrow$$

$$P = p + rq$$

με πολυώνυμο q

** Άσκηση 4.15

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά

$f \in C^4[a,b]$, $p \in \mathbb{P}_3$

$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$

$p'(x_1) = f'(x_1)$

ΝΔΟ: $\forall x \in [a,b]\ \exists \xi \in (a,b)$:

(*) $$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$$

Απόδειξη

• $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$: Τότε η (*) ισχύει για όλα τα ξ

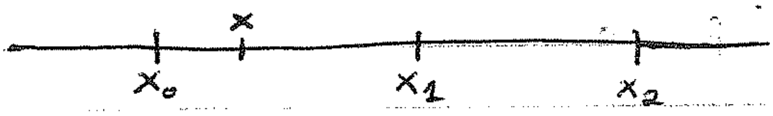
• $x \in [a,b]$, $x \neq x_0, x_1, x_2$

Ορίζουμε:

$$\Phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2) = t^4 + \text{όροι βαθμού} \leq 3$$

και

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t), \quad t \in [a,b]$$



Έχουμε:

$\varphi(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0, 1, 2$

$\varphi(x) = 0$

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle η φ' έχει (τουλάχιστον) 3 ρίζες ξ_1, ξ_2, ξ_3 (διαφορετικές των x_i και x)

Τώρα:

$$\varphi'(t) = f'(t) - p'(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \Phi'(t)$$

Οπότε:

$$\varphi'(x_1) = \underbrace{f'(x_1) - p'(x_1)}_{=0} - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi'(x_1)}_{=0} = 0$$

Άρα η φ' έχει τουλάχιστον 4 ρίζες, ξ_1, ξ_2, ξ_3 και x_1

Άρα η φ'' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες

Άρα η φ''' έχει τουλάχιστον 2 ρίζες

Άρα η $\varphi^{(4)}$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα, έστω ξ.

Τώρα:

$$\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \underbrace{p^{(4)}(t)}_{=0} - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi^{(4)}(t)}_{=4!} =$$

$$= f^{(4)}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} 4!$$

60

Ἄρα:

$$\varphi^{(4)}(\xi) = 0 \iff$$

$$f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{\Phi(x)} \cdot 4! = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,\Phi(x)}$$

Άσκηση 4.11

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\frac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$

$f \in C[-1,1]$, $p \in \mathbb{P}_n$ τέτοιο ώστε
$p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

ΝΔΟ: f άρτια $\Rightarrow$ p άρτιο
f περιττή $\Rightarrow$ p περιττό

Παρατήρηση

Αν x_i κόμβος του διαμερισμού, τότε και το $-x_i$ είναι επίσης κόμβος του διαμερισμού.

• f περιττη: $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-1,1]$

Θέτουμε $q(x) = -p(-x)$, $x \in [-1,1]$

Ιδιότητες του q: $q \in \mathbb{P}_n$

$q(x_i) = -p(-x_i) = -f(-x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Συμπέρασμα: Το $q \in \mathbb{P}_n$ και είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$, οπότε $q = p$

Άρα:

$q(x) = -p(-x)$

$\Rightarrow p(x) = -p(-x)$

$\Rightarrow p(-x) = -p(x) \quad , \quad x \in [-1, 1]$

Δηλαδή, το p είναι περιττό πολυώνυμο.

- f άρτια: $f(-x) = f(x) \quad , \quad x \in [-1, 1]$

Θέτουμε $q(x) = p(-x) \quad , \quad x \in [-1, 1]$

Ιδιότητες του q: $q \in \mathbb{P}_n$

$q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) = f(x_i) \,,\; i = 0, \dots, n$

Συμπέρασμα: $q = p$, δηλαδή
$p(x) = p(-x) \;;\; x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ το p είναι άρτιο πολυώνυμο.

** Άσκηση 4.16

$f \in C^5[0,1]$, $p \in \mathbb{P}_4$

$$\begin{cases} p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0) & , \ i=0,1 \\ p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1) & , \ i=0,1 \\ p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Ζητείται παράσταση του $f(x)-p(x)$ συναρτήσει της τιμής μια κατάλληλης (πέμπτης) παραγώγου της f σε ένα σημείο.

Ισχυρισμός: $\forall x \in [0,1] \quad \exists \xi = \xi(x) \in (0,1)$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x-\tfrac{1}{2})(x-1)^2$$

1η περίπτωση: $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Ισχύει για όλα τα ξ.

2η περίπτωση: $x \in [0,1]$, $x \neq 0, \frac{1}{2}, 1$

Θέτουμε:

$$\Phi(t) = t^2 (t-\tfrac{1}{2})(t-1)^2$$

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \Phi(t)$$

Τότε: $\varphi \in C^5[a,b]$

$\varphi(0)=0$
$\varphi(\frac{1}{2})=0$
$\varphi(1)=0$
$\varphi(x)=0$

Η φ' μηδενίζεται σε τρία σημεία ξ_0, ξ_1, ξ_2 (διαφορετικά μεταξύ τους) διαφορετικά του 0 και του 1

Όμως $\varphi'(0)=0=\varphi'(1)$

Άρα:

η φ' έχει 5 ρίζες
η φ'' έχει 4 ρίζες
η φ''' έχει 3 ρίζες
η $\varphi^{(4)}$ έχει 2 ρίζες
η $\varphi^{(5)}$ έχει 1 ρίζα, έστω ξ δηλαδή $\varphi^{(5)}(\xi)=0$

Έχουμε:

$$\varphi^{(5)}(t)=f^{(5)}(t)-\underbrace{p^{(5)}(t)}_{=0}-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\underbrace{\Phi^{(5)}(t)}_{=5!}$$

Άρα: $\varphi^{(5)}(\xi)=0 \Leftrightarrow f^{(5)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}5!=0$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x)-p(x)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\Phi(x)}$$

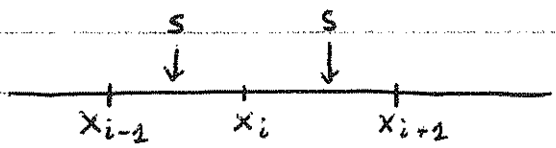
Άσκηση 4.18

$[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$

$m \in \mathbb{N}$

$\Sigma_m(\Delta) = \{ s \in C^{m}[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i = 0, \dots, n \}$

<u>ΝΔΟ</u>: $s \in \Sigma_m(\Delta) \Rightarrow s$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ m.



Αρκεί να αποδείξουμε ότι το s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε δύο διαδοχικά διαστήματα $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$.

$x \in [x_{i-1}, x_i]$: Taylor ως προς το x_i-

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i-)}{j!}(x - x_i)^j$$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$: Taylor ως προς το x_i+

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i+)}{j!}(x - x_i)^j$$

Επειδή $s \in C^{m}[a,b]$ ισχύει $s^{(j)}(x_i-) = s^{(j)}(x_i+)$, $j = 0, \dots, m$

Άρα το s είναι το ίδιο πολυώνυμο στο $[x_{i-1}, x_i]$ και $[x_i, x_{i+1}]$.