28/4/2015

4º ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ

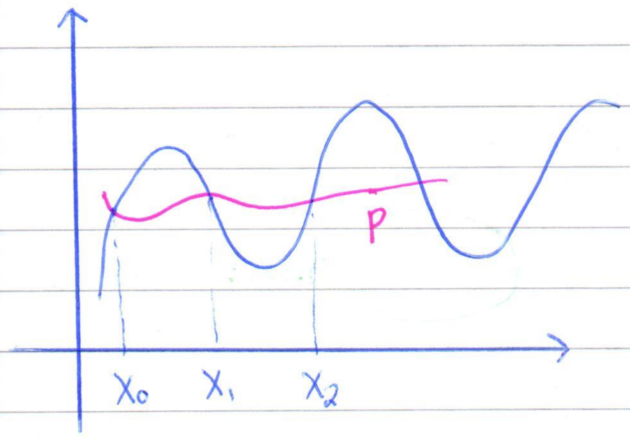
Η παρεμβολή είναι ένας τρόπος προσέγγισης συναρτήσεων. Υπάρχουν δύο είδη παρεμβολής, η παρεμβολή τύπου Lagrange (στην οποία χρησιμοποιούμε μόνο τιμές της συνάρτησης) και η παρεμβολή Hermite (στην οποία χρησιμοποιούμε και τιμές παραγώγων της συνάρτησης).

"Πολυωνυμική παρεμβολή"

Θεώρημα (παρεμβολή τύπου Lagrange)
Έστω $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. το $p(x_i) = y_i \quad , \quad i=0, \dots, n$. (*)

απόδειξη:
Με $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ με άγνωστους τους συντελεστές $a_0, a_1, \dots, a_n$ το (*) γράφεται ως γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους (τα $a_0, \dots, a_n$).
Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα είναι: Ζητείται $q \in \mathbb{P}_n$ τω. $q(x_i) = 0 \quad , \quad i=0, \dots, n$.
Όμως το q ως πολυώνυμο βαθμού το πολύ με $n+1$ ρίζες, μηδενίζεται αναγκαστικά ταυτοτικά.
Επομένως, το (*) έχει ακριβώς μια λύση.

Αν f μια συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i) \quad i=0, \dots, n$ τότε λέμε ότι το p παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$, ή ότι το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_0, \dots, x_n$



Ερωτήματα

1. Πώς κατασκευάζουμε το p;
2. Τι μπορούμε να πάμε για το σφάλμα παρεμβολής $f(x)-p(x)$;

Απαντήσεις:

2. Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής) SOS

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $p \in \mathbb{P}_n$ τω. $p(x_i)=f(x_i)$ $i=0,\dots,n$

Τότε ισχύει: $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi = \xi(x) \in [a,b]$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x-x_i) \quad (+)$$

απόδειξη:

Για $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ η (+) ισχύει για κάθε ξ.

Έστω τώρα $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$

Θέτουμε $\Phi(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-x_i)$ και $\varphi(t) = f(t)-p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}\Phi(t)$

για $t \in [a,b]$.

Τότε η $\varphi \in C^{n+1}[a,b]$ και $\varphi(x_i) = \underbrace{f(x_i)-p(x_i)}_{=0} - \frac{f(x_i)-p(x_i)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi(x_i)}_{=0}$

$\varphi(x_i)=0$ $i=0,\dots,n$

και $\varphi(x) = f(x)-p(x) - \frac{f(x)-p(x)}{\cancel{\Phi(x)}} \cancel{\Phi(x)} = 0$

Άρα η φ έχει (τουλάχιστον) n+2 ρίζες στο $[a,b]$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle: η φ' έχει (τουλάχιστον) $n+1$ ρίζες στο (a,b), η φ'' έχει (τουλάχιστον) n ρίζες στο (a,b), ... η $\varphi^{(n+1)}$ έχει (τουλάχιστον) 1 ρίζα στο (a,b).

Άρα $\exists\, \xi \in (a,b)$ τ.ω. $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Τώρα $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \cancel{p^{(n+1)}(t)}^{\,0} - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \Phi^{(n+1)}(t)$ $= (n+1)!$

Όμως: $p^{(n+1)}(t) = 0$.

$\Phi(t) = t^{n+1} + q(t)$, $q \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \Phi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$

$q^{(n+1)}(t) = 0$

Δηλαδή:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)}(n+1)! \\ \varphi^{(n+1)}(t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} = 0 \Rightarrow$$

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Phi(x)$$ που είναι η (+)

Πόρισμα Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος ισχύει

$$\underbrace{\max_{a \le x \le b} |f(x)-p(x)|}_{\|f-p\|_\infty} \le \frac{1}{(n+1)!} \cdot \underbrace{\max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|}_{\|f^{(n+1)}\|_\infty} \cdot \max_{a \le x \le b} \left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|$$

1. Παράσταση και υπολογισμός του πολυωνύμου παρεμβολής Lagrange, Νεύτων, Aitken-Neiville

$\downarrow$ θεωρία — $\downarrow$ υπολογισμοί — $\downarrow$ υπολογισμός τιμής σε κάποιο σημείο.

α) Παράσταση σε μορφή Lagrange

$x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

Για κάθε $i \in \{0, \ldots, n\}$ υπάρχει ακριβώς ένα $L_i \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$L_i(x_i) = 1$

$L_j(x_j) = 0 \quad j = 0, \ldots, n$ κ' $j \neq i$.

Τα $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ είναι οι ρίζες του L_i, συνεπώς το

$$L_i(x) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j)$$

Τώρα το $L_i(x_i) = 1 \Leftrightarrow a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) = 1 \Leftrightarrow a_i = \dfrac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$

Συμπέρασμα: $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Τα $L_0, L_1, \ldots, L_n \in \mathbb{P}_n$ λέγονται πολυώνυμα του Lagrange ως προς τα σημεία $x_0, \ldots, x_n$

$p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$

Ισχυρισμός: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$ (**)

Προφανώς στο δεξιό μέλος έχουμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.
Αν αποδείξουμε ότι η τιμή του στο x_j είναι $f(x_j)$ $j = 0, \ldots, n$ τότε λόγω της μοναδικότητας του πολυωνύμου παρεμβολής, αυτό θα συμπίπτει με το p. Πράγματι, για $j \in \{0, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{L_i(x_j)}_{\delta_{ij}} = f(x_j) \cdot \underbrace{L_j(x_j)}_{=1} = f(x_j)$$

Η (**) λέγεται παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής σε μορφή του Lagrange.

Πλεονέκτημα

Η απλότητα της (**) καθιστά αυτή τη μορφή ιδιαίτερα χρήσιμη στη θεωρία.

Μειονεκτήματα:

1. Ο υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο με την (**) απαιτεί πάρα πολλές πράξεις.

2. Αν προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) σημεία παρεμβολής, όλα τα πολυώνυμα Lagrange αλλάζουν, πρέπει να υπολογίσουμε τα νέα ~~ποα~~

β) Παράσταση

$x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ανά δύο διαφορετικά, $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

Ζητείται: $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$

Ιδέα: Γράφουμε το p στη μορφή

(+) $p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

με άγνωστα τα $a_0, a_1, \dots, a_n$

Τότε $p(x_0) = y_0 \Leftrightarrow a_0 = y_0$

$p(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_0 + a_1(x - x_0) = y_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$\vdots$

Πλεονεκτήματα:

1. Ο υπολογισμός της τιμής του p σε ένα σημείο με την μορφή (++) γίνεται σε $O(n)$ πράξεις με το σχήμα του Horner.

$p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + (x - x_1)(a_2 + \dots + (x - x_{n-1})a_n)\dots)$

2. Για κάθε $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ το πολυώνυμο $p_k \in \mathbb{P}_n$ που δίνεται από τους $k+1$ πρώτους όρους της (++),

$p_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x-x_0)\cdots(x - x_{k-1})$

είναι το πολυώνυμο παρεμβολής στα σημεία (x_i, y_i) $i = 0, \dots, k$

Αυτό καθιστά πολύ εύκολους τους υπολογισμούς όταν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε σημεία παρεμβολής.

γ) Διαιρεμένες διαφορές

$f \in C[a, b]$, $x_0, x_1, \dots \in [a, b]$ $x_i \neq x_j$ $i \neq j$.

Ορίζουμε επαγωγικά ως προς i:

$\Delta^0(x_0)(f) = f(x_0)$

$$\Delta^i(x_0, \dots, x_i)(f) = \frac{\Delta^{i-1}(x_1, \dots x_i)(f) - \Delta^{i-1}(x_0, \dots, x_{i-1})}{x_i - x_0} \quad , i \geq 1$$

Το $\Delta^i(x_0, \dots, x_i)(f)$ λέγεται διαιρεμένη διαφορά τάξης i της f ως προς τα σημεία $x_0, \dots, x_i$

Πρόταση (Παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής της μορφής Νεύτωνα με διαιρ. διαφορές)
Έστω $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ ανά δύο διαφορετικά, $f \in C[a,b]$ και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$. Τότε

$$p(x) = \underbrace{\Delta^0(x_0)(f)}_{a_0} + \underbrace{\Delta^1(x_0, x_1)(f)}_{a_1} \cdot (x - x_0) + \dots + \underbrace{\Delta^n(x_0, \dots, x_n)(f)}_{a_n}(x - x_0)(x - x_{n-1})$$

30/4/2015

	n=0		n=1		n=2
x_0	$\Delta^0(x_0)f$				
x_1	$\Delta^0(x_1)f$	$\longrightarrow$	$\Delta^1(x_0, x_1)f$		
x_2	$\Delta^0(x_2)f$	$\longrightarrow$	$\Delta^1(x_1, x_2)f$	$\longrightarrow$	$\Delta^2(x_0, x_1, x_2)f$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

δ) Παρεμβολή σε ένα σημείο κατά Aitken-Neville
Αυτός ο τρόπος μας επιτρέπει να υπολογίσουμε εύκολα την τιμή του πολυωνύμου παρεμβολής σε ένα σημείο χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε το πολυώνυμο (δηλαδή τους συντελεστές του πολυωνύμου)

Ιδέα: Έστω $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_n$ τα πολυώνυμα παρεμβολής μιας συνάρτησης f στα σημεία $x_m, \dots, x_{m+n}$ και $x_{m+1}, \dots, x_{m+1+n}$, αντίστοιχα.

Τότε το $q\in\mathbb{P}_{n+1}$, $q(x)=\dfrac{1}{x_{m+1}-x_m}\begin{vmatrix} p_1(x) & x_m-x \\ p_2(x) & x_{m+m+1} \end{vmatrix}$

είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα $x_m,\dots,x_{m+m+1}$.

απόδειξη:

$q\in\mathbb{P}_{n+1}$: προφανές

Τώρα: $q(x_m)=\dfrac{1}{x_{m+m+1}-x_m}\begin{vmatrix} \overbrace{p_1(x_m)}^{=f(x_m)} & 0 \\ p_2(x_m) & x_{m+n+1}-x_m \end{vmatrix}=f(x_m)$

$q(x_{m+m+1})=\dfrac{1}{x_{m+n+1}-x_m}\begin{vmatrix} p_1(x_{m+n+1}) & x_m-x_{m+n+1} \\ \underbrace{p_2(x_{m+n+1})}_{=f(x_{m+n+1})} & 0 \end{vmatrix}$

Επίσης, για $i\in\{m+1,\dots,m+n\}$ έχουμε:

$q(x_i)=\dfrac{1}{x_{m+n+1}-x_m}\begin{vmatrix} \overbrace{p_1(x_i)}^{=f(x_i)} & x_m-x_i \\ \underbrace{p_2(x_i)}_{=f(x_i)} & x_{m+n+1}-x_i \end{vmatrix}=$

$=\dfrac{f(x_i)}{x_{m+n+1}-x_m}\begin{vmatrix} 1 & x_m-x_i \\ 1 & x_{m+n+1}-x_i \end{vmatrix}$

άνω τελεία.

Συμβολίζουμε: $p(x_i,\dots,x_{i+j};\xi)$ την τιμή στο σημείο ξ του πολυωνύμου παρεμβολής της f στα σημεία $x_1,\dots,x_{i+j}$.

x_i	y_i	$p\in\mathbb{P}_1$	$p\in\mathbb{P}_2$	$p\in\mathbb{P}_3$
x_0	y_0			
x_1	y_1	$p(x_0,x_1;\xi)$		
x_2	y_2	$p(x_1,x_2;\xi)$	$\to p(x_0,x_1,x_2;\xi)$	
x_3	y_3	$p(x_2,x_3;\xi)$	$\to p(x_1,x_2,x_3;\xi)$	$\to p(x_0,x_1,x_2,x_3;\xi)$
⋮	⋮	⋮		

Θεώρημα (του Faber)

Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_{ni}\in[-1,1]$, $i=0,\dots,n$

x_{00}

$x_{10}\quad x_{11}$

$x_{20}\quad x_{21}\quad x_{22}$

⋮

υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1,1]$ τ.ω., αν $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $x_{n0}, \dots, x_{nn}$ τότε ισχύει

$$\limsup_{n\to\infty} \underbrace{\|f-p_n\|}_{\displaystyle \max_{-1\le x\le 1}|f(x)-p_n(x)|} = \infty$$

Συμπέρασμα: Η παρεμβολή με πολυώνυμα πολύ μεγάλου βαθμού δεν είναι χρήσιμη.

5/5/2015

"Παρεμβολή τύπου Hermite"

Θεώρημα (παρεμβολή τύπου Hermite)

Έστω $m_0, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}_0$, $N := m_0+m_1+\dots+m_n+n$, και $M := \max(m_0, m_1, \dots, m_n)$. Αν $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και $f \in C^M[a,b]$ τότε το πρόβλημα παρεμβολής Hermite

$$(*)\begin{cases} \text{Ζητείται } p \in \mathbb{P}_N \text{ τ.ω.} & p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad i=0,\dots,m_0 \\ & p^{(i)}(x_1) = f^{(i)}(x_1) \quad i=0,\dots,m_1 \\ & \vdots \\ & p^{(i)}(x_n) = f^{(i)}(x_n) \quad i=0,\dots,m_n \end{cases}$$

λύνεται μονοσήμαντα.

απόδειξη:

Το $(*)$ είναι ένα γραμμικό σύστημα με $N+1$ αγνώστους (τους συντελεστές $a_0, \dots, a_N$ του p) και $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1) = m_0+m_1+\dots+m_n+(n+1) = N+1$ εξισώσεις

Αρκεί να αποδείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα έχει μόνο την τετριμμένη λύση

Έστω $q \in \mathbb{P}_N$ η λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος. Τότε το x_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας (τουλάχιστον) m_0+1 του q.

-״-	x_1	-״-	-״-	m_1+1 -״-
-״-	x_n	-״-	-״-	m_n+1 -״-

Άρα το q έχει (τουλάχιστον): $(m_0+1)+(m_1+1)+\dots+(m_n+1)$ $N+1$ ρίζες (μετρώντας και την πολλαπλότητα)
Επομένως $q=0$.

Η πιο συνηθισμένη περίπτωση: $m_0=\dots=m_1=1$

Ζητείται $p\in\mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω. $p(x_i)=f(x_i)$
$p'(x_i)=f'(x_i)$ $i=0,\dots,n$

Θεώρημα (παράσταση του σφάλματος παρεμβολής τύπου Hermite)
Έστω $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $x_0,x_1,\dots,x_n\in[a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους και $f\in C^{2n+2}[a,b]$. Έστω $p\in\mathbb{P}_{2n+1}$ τ.ω.
$p(x_i)=f(x_i)$, $p'(x_i)=f'(x_i)$ $i=0,\dots,n$.
Τότε: $\forall x\in[a,b]\ \exists\xi=\xi(x)\in(a,b)$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

(*) Μνημονικός κανόνας: $f\in C^{N+1}[a,b]$
$\forall x\in[a,b]\ \exists\xi=\xi(x)\in(a,b)$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x-x_0)^{m_0+1}(x-x_1)^{m_1+1}\cdots(x-x_n)^{m_n+1}$$

ειδικές περιπτώσεις
- $m_0=\dots=m_n=0\to$ Lagrange
- $m_0=\dots=m_n=1\to$ το προηγούμενο θεώρημα

7/5/2015

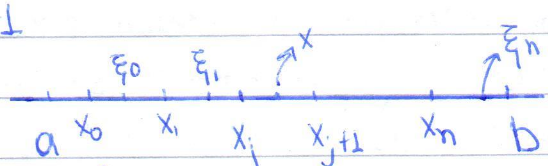
απόδειξη

- $x\in\{x_0,\dots,x_n\}$ τότε η (*) ισχύει $\forall \xi$.
- $x\in[a,b]$, $x\notin\{x_0,\dots,x_n\}$

Υπόθεση: χ.π.τ.γ. $x_0<x_1<x_2<\dots<x_n$

Έστω $x\in(x_j,x_{j+1})$ για κάποιο $j=0,\dots,n-1$

(Οι περιπτώσεις $a\le x<x_0$ και $x_n<x\le b$ αποδεικνύονται εντελώς ανάλογα)



Ορίζουμε $\Psi(t)=\prod_{i=0}^{n}(t-x_i)^2$ και $\psi(t)=f(t)-p(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}\Psi(t)$

Προφανώς $\psi\in C^{2n+2}[a,b]$. Έχουμε $\psi(x_\ell)=\underbrace{f(x_\ell)-p(x_\ell)}_{0}-\frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}\underbrace{\Psi(x_\ell)}_{0}$ για $\ell=0,1,\dots,n$

Επίσης $\psi(x)=0$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχουν σημεία $\xi_0,\dots,\xi_n$

$x_0<\xi_0<x_1<\dots<\xi_{j-1}<x_j<\xi_j<x<\xi_{j+1}<x_{j+1}<\dots<\xi_n<x_n$

τ.ω. $\psi(\xi_i)=0$, $i=0,\dots,n$

Επομένως, η ψ έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες

Επιπρόσθετα $\psi'(x_\ell)=\underbrace{f'(x_\ell)-p'(x_\ell)}_{0}-\frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}\underbrace{\Psi'(x_\ell)}_{0}$, $\ell=0,\dots,n$

Επειδή $\xi_\ell\neq x_k$ για οποιαδήποτε $k,\ell=0,\dots,n$ συμπεραίνουμε ότι η ψ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον $2n+2$ ρίζες (διαφορετικές μεταξύ τους).

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η ψ'' έχει στο $[a,b]$ τουλάχιστον $2n+1$ ρίζες

Η $\psi^{(3)}$ έχει $2n$ ρίζες

" $\psi^{(2n+2)}$ " 1 ρίζα

Συμπέρασμα: $\psi^{(2n+2)}(\xi)=0$

Όμως: $\psi^{(2n+2)}(t)=f^{(2n+2)}(t)-\underbrace{\cancel{p^{(2n+2)}}}_{0}(t)-\frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}\underbrace{\Psi^{(2n+2)}(t)}_{(2n+2)!}$

$\Psi(t)=t^{2n+2}+q(t)$ με $q\in\mathbb{P}_{2n+1}$.

οπότε: $\psi^{(2n+2)}(\xi)=0 \iff$

$f^{(2n+2)}(\xi)-\frac{f(x)-p(x)}{\Psi(x)}(2n+2)!=0\iff$

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\Psi(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2$$

"Παρεμβολή με splines"

Έστω $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός ενός διαστήματος $[a,b]$.
Splines: γενικά ως προς αυτόν τον διαμερισμό αυτόν λέγονται συναρτήσεις που σε κάθε ένα από τα υποδιαστήματα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\ldots,n-1$ έχουν μια συγκεκριμένη μορφή, π.χ. είναι πολυώνυμα ενός συγκεκριμένου βαθμού κλπ. Επίσης, γενικά απαιτείται και κάποια ομαλότητα αυτών των συναρτήσεων στο $[a,b]$.

Ειδική περίπτωση

Ορισμός: (ομαλή splines). Έστω $[a,b] \in \mathbb{R}$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ και $m \in \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του γραμμικού χώρου
$S_m(\Delta) := \{ s \in C^{m-1}[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_m, \ i=0,\ldots,m-1 \}$ λέγονται

συνάρτηση

συμβολισμός = περιορισμός στο υποδιάστημα της συνάρτησης

(πολυωνυμικές) splines βαθμού m (ως προς Δ)

Στις ασκήσεις θα δούμε ότι αυτή είναι η μεγαλύτερη δυνατή ομαλότητα που επιτρέπει να υπάρχουν στοιχεία του $S_m(\Delta)$ που δεν ανήκουν στον $\mathbb{P}_m$ (δηλαδή δεν είναι πολυώνυμα του βαθμού m)
Πολύ συχνά στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται οι $S_1(\Delta)$ (γραμμικές splines) και οι $S_3(\Delta)$ (κυβικές splines)

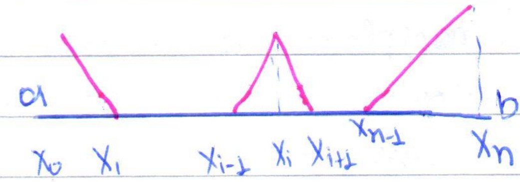
"Παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις"

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ διαμερισμός του $[a,b]$.
$S_1(\Delta) = \{ s \in C[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \ i=0,\ldots,n-1 \}$

Πρώτος στόχος: $\dim S_1(\Delta) = ;$ "χρήσιμη" βάση του $S_1(\Delta)$
Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}, & x_0 \le x \le x_1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$ και

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} , & x_{n-1} \le x \le x_n \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} , & x_i \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} , & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 , & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

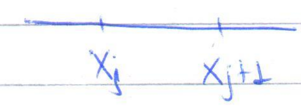
Αυτές οι συναρτήσεις είναι μη μηδενικές και έχουν τον μικρότερο δυνατό φορέα (διάστημα στο οποίο δεν είναι μηδέν).

Ισχυρισμός: Τα $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ παράγουν τον $S_1(\Delta)$, οπότε, αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητες αποτελούν βάση του $S_1(\Delta)$

Ιδιαίτερα: $\dim S_1(\Delta) = n+1$

Έστω $s \in S_1(\Delta)$. Τότε ισχύει: $s = \sum_{i=0}^{n} s(x_i)\varphi_i$

Πράγματι, $\forall j \in \{0, \dots, n-1\}$ έχουν τα δύο μέλη τις ίδιες τιμές τόσο στο x_j όσο και στο x_{j+1} και είναι πολυώνυμα το πολύ βαθμού 1 στο $[x_j, x_{j+1}]$.



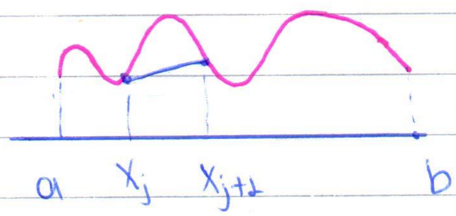
Από τις γνώσεις μας για την πολυωνυμική παρεμβολή προκύπτει ότι τα δύο μέλη συμπίπτουν στο διάστημα $[x_j, x_{j+1}]$. Αφού για όλα τα j ισχύει αυτό, έχουμε ισότητα σε όλο το $[a,b]$

Πρόβλημα παρεμβολής

Ζητείται, για $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $s \in S_1(\Delta)$ τ.ω. $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Ισχυρισμός: Το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση την $s(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)$ $x \in [a,b]$

Πράγματι για κάθε $j \in \{0, \dots, n-1\}$ έχουμε $s(x_j) = f(x_j)$ και $s(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ και $s|[x_j, x_{j+1}] \in \mathbb{P}_1$. Σύμφωνα με τις γνώσεις μας για την πολυωνυμική παρεμβολή το s είναι μοναδικά ορισμένο στο $[x_j, x_{j+1}]$ και αφού αυτό ισχύει $\forall j \in \{0, \dots, n-1\}$ το s είναι μοναδικά ορισμένο στο $[a,b]$.



Η παρεμβολή με στοιχεία του $S_1(\Delta)$ είναι εντελώς τοπική υπόθεση, με την έννοια ότι οι τιμές της παρεμβάλλουσας στο $[x_j, x_{j+1}]$ εξαρτώνται μόνο απ' τις τιμές της f στο $[x_j, x_{j+1}]$, συγκεκριμένα μόνο απ' τις τιμές στα άκρα x_j και x_{j+1}

Θεώρημα (εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις)
Έστω $f \in C^2[a,b]$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ διαμερισμός του $[a,b]$ και $s \in S_1(\Delta)$ η παρεμβάλλουσα της f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$. Αν $h_i = x_i - x_{i-1}$ και $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$, τότε

$$\underbrace{\|f-s\|_\infty}_{\max\limits_{a \le x \le b}|f(x)-s(x)|} \le \frac{h^2}{8}\|f\|_\infty$$

απόδειξη.
Στο $[x_i, x_{i+1}]$ η s συμπίπτει με το πολυώνυμο $p_i \in \mathbb{P}_1$ τ.ω.

$$p_i(x_i) = f(x_i), \quad p_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}).$$

Άρα $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ $\exists \xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ $f(x) - s(x) = f(x) - p_i(x) =$

$$= \frac{f''(\xi_i)}{2!}(x - x_i)(x - x_{i+1})$$

Επομένως,

$$\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - s(x)| = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |f(x) - p_i(x)| \le \frac{\|f''\|_\infty}{2} \underbrace{\max_{x_i \le x \le x_{i+1}} |\overbrace{(x - x_i)}^{\ge 0}\overbrace{(x - x_{i+1})}^{\ge 0}|}_{= \frac{h_i^2}{4}}$$

γίνεται μέγιστο όταν είναι ίσα δηλ. $\frac{h_i}{2}$

$$\le \frac{h_i^2}{8}\|f''\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|f-s\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$

12/5/2015

"Παρεμβολή με κυβικές splines"

$[a,b]$

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ διαμερισμός του $[a,b]$

$S_3(\Delta) = \{ s \in C^2[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3, \ i=0,\dots,n-1 \}$

Τα στοιχεία του $S_3(\Delta)$ λέγονται κυβικές splines

Ερώτημα: Αν $f \in C[a,b]$, υπάρχει μοναδική κυβική spline $s \in S_3(\Delta)$

$s(x_i) = f(x_i)$, $i=0,\dots,n$.

Άγνωστοι του προβλήματος

$4n$ (4 συντελεστές σε καθένα των n υποδιαστημάτων)

Συνθήκες

Παρεμβολή: $2n$ (δύο συνθήκες στα άκρα κάθε υποδιαστήματος)

(Αυτό συνεπάγεται και συνέχεια της s στους ενδιάμεσους κόμβους, συνεπώς και στο $[a,b]$)

Συνέχεια της s' στους ενδιάμεσους κόμβους $x_1, \dots x_{n-1}$: $n-1$

-"- -"- s'' -"- -"- -"- -"- : $n-2$

Συνολικό πλήθος συνθηκών:

$2n + (n-1) + (n-1) = 4n-2$

Χρειάζονται δύο επιπλέον συνθήκες.

Συνήθως επιλέγουμε συνοριακές συνθήκες στα a, b

Θεώρημα (παρεμβολή με κυβικές splines)
Έστω f μια συνάρτηση $f \in C^1[a,b]$ και Δ
$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$.
Τότε υπάρχει ακριβώς μια $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.:
1) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$
2) $s'(x_0) = f'(x_0)$
3) $s'(x_n) = f'(x_n)$

Θεώρημα
Έστω $f \in C^2[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε $\exists$ ακριβώς μια $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.:
1) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$
2) $s''(x_0) = f''(x_0)$
3) $s''(x_n) = f''(x_n)$

Σημείωση: Στοιχεία του $S_3(\Delta)$ τ.ω. $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ λέγονται φυσικές κυβικές splimes

Θεώρημα
Έστω $f \in C[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Τότε
Υπάρχει ακριβώς μια φυσική splime $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω.
$s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Θεώρημα (εκτίμηση του σφάλματος παρεμβολής με κυβικές splines)
Έστω $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$,
$h := \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$, $M := \dfrac{h}{\min_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})}$

Έστω $f \in C^4[a,b]$ και $s \in S_3(\Delta)$ τ.ω. $s(x_i) = f(x_i)$

Τότε: $\|f^{(m)} - s^{(m)}\|_\infty \le C_m h^{4-m} \|f^{(4)}\|_\infty$, $m=0,1,2,3$.

με $C_0 = \frac{5}{384}$, $C_1 = \frac{1}{24}$, $C_2 = \frac{3}{8}$, ~~$C_3 = \max\{2, 1$~~

και $C_3 = \max\left\{2, \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{M}\right)\right\}$

Παρατήρηση: Οι σταθερές C_0 και C_1 είναι βέλτιστες.

"Κυβικές splines του Hermite"

Ορισμός: Έστω $[a,b]$ .. $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$. Συναρτήσεις $s \in C^1[a,b]$ τ.ω.

$$s\big|_{[x_i, x_{i-1}]} \in \mathbb{P}_3 \quad i = 0, \dots, n-1$$

λέγονται κυβικές splines του Hermite ως προς τον διαμερισμό Δ.

Θεώρημα (παρεμβολή με κυβικές splines του Hermite)

Έστω $f \in C^1[a,b]$ και $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας διαμερισμός του $[a,b]$ τότε υπάρχει ακριβώς μια κυβική spline του Hermite ως προς Δ τ.ω.

$$\left.\begin{array}{l} s(x_i) = f(x_i) \\ s'(x_i) = f'(x_i) \end{array}\right\} \quad i = 0, \dots, n$$

Αν επιπλέον $f \in C^4[a,b]$ τότε ισχύει:

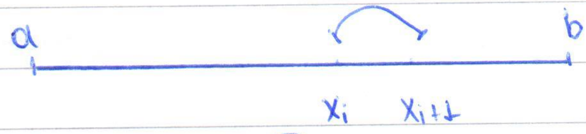
$$\|f - s\|_\infty \le \frac{1}{384} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \quad \text{με } h = \max_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

απόδειξη:

Για $i \in \{0, \dots, n-1\}$

σύμφωνα με το

Θεώρημα 4.4 (



υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p_i \in \mathbb{P}_3$ τ.ω.

$$\left.\begin{array}{l} p_i(x_j) = f(x_j) \\ p_i'(x_j) = f'(x_j) \end{array}\right\} \quad j = i, i+1$$

Τότε η συνάρτηση $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ $s(x)=p_i(x)$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$ είναι προφανώς μοναδική ζητούμενη παρεμβάλλουσα spline Hermite.

Για το σφάλμα $f(x)-s(x)$ έχουμε:

Σύμφωνα με τη σχέση 4.16 (βιβλίου) έχουμε $\forall x\in[x_i,x_{i+1}]\ \exists\ \xi\in(x_i,x_{i+1})$

$$f(x)-p_i(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{24}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2$$

Επομένως, για $x\in[x_i,x_{i+1}]$:

$$|f(x)-s(x)|=|f(x)-p_i(x)|=\frac{1}{\underbrace{24}_{=4!}}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\cdot|f^{(4)}(\xi(x))|$$

Τώρα:

$$\max_{x_i\le x\le x_{i+1}}\left((x-x_i)(x_{i+1}-x)\right)^2=\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{4}\right]^2=\frac{(x_{i+1}-x_i)^4}{16}$$

Συμπέρασμα: Για $x\in[x_i,x_{i+1}]$

$$|f(x)-s(x)|\le\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16}\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{\le h}{}^4\|f^{(4)}\|_\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(x)-s(x)|\le\frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$

Το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του i οπότε:

$$\forall x\in[a,b]:\ |f(x)-s(x)|\le\frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$

ή

$$\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)-s(x)|}_{\|f-s\|_\infty}\le\frac{h^4}{384}\|f^{(4)}\|_\infty$$

Πλεονέκτημα: Η συμπεριφορά της s στο διάστημα $[x_i,x_{i+1}]$ είναι εντελώς τοπική, εξαρτάται μόνο από τις $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$, $f'(x_i)$, $f'(x_{i+1})$

Ασκήσεις 4^{ου} κεφαλαίου

8/5/2015

Άσκηση 4.4 (βιβλίου)

$p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $p(x_i) = \ln(x_i)$ $\quad x_i = i+1,\ i = 0, 1, 2, 3$

Νδο Η $\varepsilon(x) = \ln(x) - p(x)$ έχει στο $[1,4]$ έχει ακριβώς 4 ρίζες.

απόδειξη:

Προφανώς, $\varepsilon(x_i) = 0$, $i = 0,1,2,3$, δηλαδή $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = \varepsilon(4) = 0$

Επομένως, η ε έχει στο $[1,4]$ τουλάχιστον 4 ρίζες.

Μένει να αποδείξουμε ότι η ε δεν έχει άλλη ρίζα στο $[1,4]$

Με $f(x) = \ln(x)$, $x \in [1,4]$ το $p \in \mathbb{P}_3$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_i, $i = 0,1,2,3$. Επομένως

$$\forall x \in [1,4]\ \exists\, \xi \in (1,4) : \varepsilon(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Όμως, $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2}$, $\quad f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$, $\quad f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

Άρα $\forall x \in [1,4]\ \exists\, \xi \in (1,4) : \varepsilon(x) = \underbrace{\dfrac{-6}{4!\,\xi^4}}_{\neq 0}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Το δεξιό μέρος αυτής της σχέσης μηδενίζεται σε ακριβώς 4 σημεία

Άσκηση 4.5 (βιβλίου)

$p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $p(i) = e^i$, $i = 1,2,3,4$

<u>Νδο</u> $\forall x \in (2,3)$ $e^x > p(x)$

<u>απόδειξη:</u>

Θέτουμε $f(x) = e^x$, $x \in [1,4]$

Τότε το p είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία $1,2,3,4$. Άρα

$\forall x \in [1,4]$ $\exists \xi \in (1,4)$ $f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

Άρα $\forall x \in (2,3)$ $\exists \xi \in [1,4]$ $e^x - p(x) = \underbrace{\frac{e^\xi}{4!}}_{>0} \underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+}\underbrace{(x-3)}_{-}\underbrace{(x-4)}_{-} > 0$

$\Rightarrow \forall x \in (2,3)$ $e^x - p(x) > 0$

Άσκηση 4.6 (βιβλίου)

$f \in C[a,b]$ $\quad a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$

$p \in \mathbb{P}_n$ $\quad p(x_i) = f(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$

Αν P πολυώνυμο τ.ω. $P(x_i) = f(x_i)$ $\quad i = 0, \dots, n$

<u>Νδο</u> $P = p + r \cdot q$ με $r(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n)$ και q πολυώνυμο.

$(P-p)(x_i) = \underbrace{P(x_i)}_{=f(x_i)} - \underbrace{p(x_i)}_{f(x_i)''} = 0 \qquad i = 0, \dots, n$

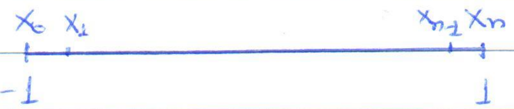
Επομένως αφού τα $x_0, \dots, x_n$ είναι ρίζες του $P-p$, γράφεται στη μορφή

$P(x) - p(x) = q(x)\underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_n)}_{r(x)}$, με πολυώνυμο q

Άρα $P = p + rq$

Άσκηση 4.1 (βιβλίου)

$n \in \mathbb{N}$, $x_i = -1 + i\dfrac{2}{n}$, $i = 0, \dots, n$.



$f \in C[a,b]$ και $p \in \mathbb{P}_n$

τω $p(x_i) = f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$

Νδο f περιττή $\Rightarrow$ p περιττό

f άρτια $\Rightarrow$ p άρτιο

Τα $x_0 - x_n$, $x_1 - x_{n-1}$, ... είναι συμμετρικά ως προς το μηδέν.

Παρατήρηση: Αν το x_i είναι σημείο παρεμβολής τότε και το $-x_i$ είναι σημείο παρεμβολής.

1η περίπτωση f περιττή $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [-1,1]$ $f(-x) = -f(x)$

Θέτουμε $q(x) = -p(-x)$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$.

Επιπλέον $q(x_i) = -\underbrace{\boxed{p(-x_i)}}_{= f(-x_i)} = -f(-x_i) \overset{f \text{ περιττή}}{=} f(x_i)$ $i = 0, \dots, n$.

Συμπέρασμα $q = p$ οπότε $-p(-x) = p(x)$ δηλαδή $p(-x) = -p(x)$ οπότε το p είναι περιττό.

2η περίπτωση f άρτια $\Leftrightarrow$ $\forall x \in [-1,1]$ $f(x) = f(-x)$

Θέτουμε $q(x) = p(-x)$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$

Επιπλέον $q(x_i) = p(-x_i) = f(-x_i) \overset{f \text{ άρτια}}{=} f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Συμπέρασμα: $q = p$ ή $q(x) = p(x)$ ή $p(-x) = p(x)$ δηλαδή το $p(x)$ είναι άρτιο.

Άσκηση 4.15 (βιβλίου)

$x_0, x_1, x_2 \in [a,b]$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.
$f \in C^4[a,b]$, $p \in \mathbb{P}_3$ τ.ω. $p(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,2$, $p'(x_1) = f'(x_1)$
Ν.δ.ο. $\forall x \in [a,b]$ $\exists \xi \in (a,b)$ τ.ω. $f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$ (*)

15/5/2015

Λύση

- $x \in \{x_0, x_1, x_2\}$ η (*) ισχύει για κάθε ξ.
- $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, x_2\}$

Θέτουμε $\Phi(t) = (t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)$
και $\varphi(t) = f(t) - p(t) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(t)$, $t \in [a,b]$

Έχουμε: $\varphi \in C^4[a,b]$, $\varphi(x_i) = 0$, $i=0,1,2$, $\varphi(x) = 0$
Συμπέρασμα: Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a,b)$, διαφορετικά του x_1, τ.ω.
$\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2) = \varphi'(\xi_3) = 0$ (από θεώρημα Rolle)

Επιπλέον έχουμε, $\varphi'(x_1) = \underbrace{f'(x_1) - p'(x_1)}_{0} - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi'(x_1)}_{0} = 0$

Άρα η φ' έχει στο (a,b) τουλάχιστον 4 ρίζες.
-"- φ'' -"- -"- 3 -"-
-"- $\varphi^{(3)}$ -"- -"- 2 -"-
-"- $\varphi^{(4)}$ -"- -"- 1 ρίζα ξ.

Συμπέρασμα: $\varphi^{(4)}(\xi) = 0$
Όμως, $\varphi^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \underbrace{p^{(4)}(t)}_{0} - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi^{(4)}(t)}_{4!}$

Δηλαδή, $f^{(4)}(\xi) - \dfrac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot 4! = 0$

$$\Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \Phi(x)$$

'Ασκηση 4.16 (βιβλίου)

Έστω $p \in \mathbb{P}_n$ και $f \in C^5[0,1]$ τ.ω. $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(0)$ $i=0,1$

και $p(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})$ $p^{(i)}(1) = f^{(i)}(1)$

<u>Νδο</u> $\forall x \in [0,1]\ \exists \xi \in (0,1): f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x-\frac{1}{2})(x-1)^2$ (*)

<u>απόδειξη</u>

- $x \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ τότε η (*) ισχύει για κάθε ξ.
- $x \in [0,1]$ $x \notin \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Θέτουμε: $\Phi(t) = t^2 (t-\frac{1}{2})(t-1)^2$ και $\varphi(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \Phi(t)$

για $t \in [0,1]$

Έχουμε $\varphi \in C^5[0,1]$, $\varphi(0)=0$, $\varphi(\frac{1}{2})=0$, $\varphi(1)=0$, $\varphi(x)=0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle η φ' έχει τουλάχιστον 3 ρίζες $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0,1)$

Επιπρόσθετα, $\varphi'(0) = \underbrace{f'(0) - p'(0)}_{0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \underbrace{\Phi'(0)}_{0} = 0$

και αντίστοιχα $\varphi'(1) = 0$

<u>Συμπέρασμα:</u> Η φ' έχει στο $[0,1]$ τουλάχιστον 5 ρίζες.

-"-	φ''	-"-	-"-	4	-"-
-"-	φ'''	-"-	-"-	3	-"-
-"-	$\varphi^{(4)}$	-"-	-"-	2	-"-
-"-	$\varphi^{(5)}$	-"-	-"-	1	ρίζα ξ.

Επομένως $\varphi^{(5)}(\xi) = 0$

Όμως $\varphi^{(5)}(t) = f^{(5)}(t) - \underbrace{p^{(5)}(t)}_{0} - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} \cdot \underbrace{\Phi^{(5)}(t)}_{5!}$

οπότε $f^{(5)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{\Phi(x)} 5! = 0 \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \Phi(x)$

Άσκηση 4.18 (βιβλίο)

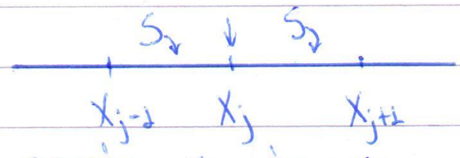
Έστω $[a,b]\subset\mathbb{R}$ $\Delta: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ διαμερισμός του $[a,b]$

$m\in\mathbb{N}$ $\Sigma_m(\Delta)=\{s\in C^m[a,b]: s|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_m,\ i=0,\dots,n-1\}$

Νδο $s\in\Sigma_m(\Delta)\Rightarrow s\in\mathbb{P}_m$ στο $[a,b]$

απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξω ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$ και $[x_i,x_{i+1}]$ (γιατί μετά επαγωγικά διαπιστώνουμε ότι η s είναι το ίδιο πολυώνυμο σε όλα τα υποδιαστήματα $[x_j,x_{j+1}]$ για κάθε j δηλαδή είναι πολυώνυμο στο $[a,b]$)



Αναπτύσσοντας κατά Taylor ως προς το σημείο x_i έχουμε:

$$s(x)=\sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^-)}{j!}(x-x_i)^j,\quad x\in[x_{i-1},x_i]$$

$$s(x)=\sum_{j=0}^{m} \frac{s^{(j)}(x_i^+)}{j!}(x-x_i)^j,\quad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

Όμως η s είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο x_i, δηλαδή

$s^{(j)}(x_i^-)=s^{(j)}(x_i^+)$, $i=0,\dots,m$

Συμπέρασμα: Η s είναι το ίδιο πολυώνυμο στα υποδιαστήματα $[x_{i-1},x_i]$, $[x_i,x_{i+1}]$