01 | 04 | 2014

## 3ο Κεφάλαιο: Γραμμικά συστήματα

Δεδομένα: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \times n$ πίνακας
$b \in \mathbb{R}^n$, διάνυσμα με $n$ συνιστώσες

Ζητούμενο: $x \in \mathbb{R}^n$ τω: $Ax = b$

Τέτοια γραμμικά συστήματα προκύπτουν πολύ συχνά στις εφαρμογές, συνήθως ως μέρος συνθετότερων προβλημάτων.

Τα θέματα που θα μας απασχολήσουν:

(a) Αριθμητικές μέθοδοι για την προσέγγιση του $x$
- Κόστος (απαιτούμενες πράξεις και μνήμη)
- ευστάθεια των μεθόδων

(b) Κατάσταση γραμμικών συστημάτων.

Υπάρχουν δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων:

(a) άμεσες μέθοδοι (Παραλλαγές της μεθόδου απαλοιφής του Gauss). Όταν οι πράξεις γίνονται ακριβώς αυτές οι μέθοδοι δίνουν τη λύση ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων

(b) Επαναληπτικές μέθοδοι: δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots$ του $x$.

Γενικά για γραμμικά συστήματα:

Δεδομένα: $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ με $a_{ij}$ συντελεστές

Δεύτερα μέλη: $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$

Ζητούμενα: $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$ τω:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} (*)$$

Με τον πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Το $(*)$ γράφεται στη μορφή $Ax=b$

Θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα που έχουν ακριβώς μία λύση.

Ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει το $Ax=b$ ακριβώς μία λύση:

(α) $A$ αντιστρέψιμος. Δηλαδή να υπάρχει ο $A^{-1}$

(β) $\det A \neq 0$

(γ) $Ax=0 \Rightarrow x=0$

(δ) Οι στήλες (ή οι γραμμές) του $A$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Τρόποι επίλυσης γνωστά από γραμμική άλγεβρα:

(α) Κανόνας του Grammer.

$A = (a^1 \; a^2 \dots a^n)$ ← πρώτη στήλη

$a^i$ = i-οστή στήλη του A

$A_i = (a^1 \; a^2 \dots a^{i-1} \; b \; a^{i+1} \dots a^n)$

Τότε: $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, $i = 1, \dots, n$.

(β) Με τον αντίστροφο. $A^{-1}$: Υπολογίζουμε τον $A^{-1}$ και έχουμε $x = A^{-1} b$

Αυτοί οι δύο τρόποι έχουν μόνο θεωρητική σημασία και όχι πρακτική

(α) Grammer: Αναπτύσσοντας ως προς στήλη j έχουμε:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$, ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο γράφουμε την detA ως άθροισμα n! όρων με n παράγοντες ο καθένας. Για τον υπολογισμό της detA χρειάζονται τότε: $n!(n-1)$ πολλαπλασιασμούς.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Κανόνας Sarrus

Απαιτούνται $n+1$ ορίζουσες. Συνολικά: $\underbrace{(n+1)!\,(n-1)}$ πολ/σμοί.

αυξάνει πολύ γρήγορα με το $n$

(Υπάρχουν άλλοι τρόποι υπολογισμού οριζουσών με πολύ λιγότερες πράξεις)

**03/04/2014**

$Ax=b$
$\det A \neq 0$

Τρόποι επίλυσης γνωστοί από τη Γραμμική Άλγεβρα

(a) Κανόνας του Grammer

(b) $x = A^{-1}b$

Σπάνια χρειάζεται στην πράξη να υπολογίζουμε τον αντίστροφο ~~του~~ $(A^{-1})$. Αν αυτό απαιτείται μπορεί να γίνει ως εξής:

Θεωρούμε την κανονική βάση $e^1, e^2, \ldots, e^n$ του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή: $e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$

(δέλτα του Kronecker σύμβολο " ")

Έστω $u^i, i=1,\ldots,n$, τ.ω.: $Au^i = e^i, i=1,\ldots,n$

Ισχυρισμός: $A^{-1} = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$

(Πράγματι, έχουμε $A(u^1, u^2, \ldots, u^n) = (Au^1, Au^2, \ldots, Au^n)$
$= (e^1, e^2, \ldots, e^n)$
$= I_n$

Ο υπολογισμός του $A^{-1}$ απαιτεί την επίλυση n γραμμικών συστημάτων με πίνακα συντελεστών του A. Άρα αυτός ο τρόπος είναι ασύμφορος.
Επιπλέον κόστος: $A^{-1}b$

Δύο μεγάλες κατηγορίες γραμμικών συστημάτων (πινάκων)

(α) Πυκνοί πίνακες (αποθηκευμένοι πίνακες). Έχουν στοιχεία σε γενικά διάφορα του μηδενός.

(β) Αραιοί (ή σποραδικοί) πίνακες. Έχουν πολλά μηδενικά στοιχεία που αν τα εκμεταλλευτούμε έχουμε υπολογιστικά οφέλη.

Μέγεθος πινάκων: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

- $n < 100$ : μικροί
- $100 \le n < 1000$ : μεσαίοι (μέτριου μεγέθους)
  $n \geq 1000$ : μεγάλοι

Στην πράξη λύνουμε συστήματα με πυκνούς πίνακες μέχρι και μεσαίου μεγέθους, ενώ με αραιούς πίνακες μέχρι και μεγάλου μεγέθους.

• Δύο μεγάλες κατηγορίες αριθμητικών μεθόδων

(α) άμεσες : χρησιμοποιούνται κυρίως για πυκνούς πίνακες
(β) επαναληπτικές : χρησιμοποιούνται κυρίως για αραιούς πίνακες.

- Οι άμεσες μέθοδοι είναι παραλλαγές της μεθόδου απαλοιφής του Gauss. Δίνουν τη λύση ακριβώς με πεπερασμένο πλήθος πράξεων, στην περίπτωση που οι πράξεις γίνονται ακριβώς.

- Οι επαναληπτικές μέθοδοι δίνουν μια ακολουθία προσεγγίσεων της λύσης

## Η μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Έστω $U = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ένας αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας, τω: $u_{ij} = 0$ για $i > j$

Ισχύει: $\det U = u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn}$

Άρα ο $U$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ $u_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$

Έστω $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα:

$Ux = y$ δηλαδή

$$\left.\begin{array}{r} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \dots + u_{1n}x_n = y_1 \\ u_{22}x_2 + \dots + u_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ u_{nn}x_n = y_n \end{array}\right\}$$

Τέτοια συστήματα λύνονται με οπισθοδρόμηση: Λύνουμε την τελευταία εξίσωση ως προς $x_n$, αντικαθιστούμε το $x_n$ στην προηγούμενη ~~και βρίσκουμε το~~

## Αλγόριθμος της οπισθοδρόμησης

$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$ για $k = n-1, n-2, \dots, 1$

$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left[ y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right]$

έχουν ήδη υπολογιστεί

$\sum_{j=k}^{n} a_{kj} x_j = y_k \Rightarrow u_{kk} x_k = y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j$ ← γνωστά

## Ιδέα στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Με μετασχηματισμούς γραμμών.

(δηλ. είτε εναλλαγή δύο γραμμών είτε πολλαπλασιασμός μιας γραμμής με έναν αριθμό, πρόσθεση σε μια άλλη γραμμή και αντικατάσταση της τελευταίας με αυτό που προκύπτει.) Γράφουμε ένα σύστημα $Ax=b$ στη μορφή $Ux=y$ με $U$ άνω τριγωνικό. Αυτή η διαδικασία λέγεται τριγωνοποίηση.

Δύο στάδια:

Τριγωνοποίηση: $Ax = b \rightsquigarrow Ux=y$

οπισθοδρόμηση: $Ux = y \rightsquigarrow x$

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left[ y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right] \\ k = n-1, \dots, 1 \end{cases}$$

- → Απαιτούμενες πράξεις:

Διαιρέσεις: $n$

Πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις: $1+2+\dots+(n-1) = n^2 - n$

→ Απαιτούμενη μνήμη:

$\frac{n^2}{2} + O(n)$ θέσεις για τα $u_{ij}$ και $y_i$

Τα $x_i$ αποθηκεύονται στις θέσεις $y_i$

Γενική περιγραφή:

$Ax=b$

Θέτουμε $A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}) = A$

$b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix} = b$ και γράφουμε το $Ax=b$ στη μορφή $A^{(1)}x = b^{(1)}$

Τριγωνοποίηση:

1ο Βήμα: Υπόθεση: $a_{11}^{(1)} \neq 0$.
(μπορεί πάντα να επιτευχθεί με εναλλαγές γραμμών.

Πολλαπλασιαστές:

$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ $i=2,\dots,n$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση επί $m_{i1}$, αφαιρούμε το αποτέλεσμα από την $i$-οστή γραμμή, και αντικαθιστούμε την $i$-οστή γραμμή με το αποτέλεσμα, για $i=2,\dots,n$. Έτσι μετά από το πρώτο βήμα το σύστημα:

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

με, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$

$b^{(2)} = \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{pmatrix}$

με: $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)}$, $i,j=2,\dots,n$

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)}$, $i=2,\dots,n$

<u>Βήμα r:</u> $1 \le r \le n-1$

Ξεκινάμε από το σύστημα $A^{(r)}x = b^{(r)}$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & a_{r-1,r-1}^{(r-1)} & & a_{r-1,n}^{(r-1)} \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

$$b^{(r)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_{r-1}^{(r-1)} \\ b_r^{(r)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $A^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})$, $i,j = r, \dots, n$.

Ισχυρισμός: $\tilde{A}^{(r)}$ αντιστρέψιμος

• $\underbrace{\det A^{(r)}}_{\neq 0} = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \cdots a_{r-1,r-1}^{(r-1)} \cdot \det \tilde{A}^{(r)}$

$(\det A^{(r)} = \det A$

ή

$= -\det A$

$\Longrightarrow \det \tilde{A}^{(r)} \neq 0$

Υπόθεση: $a_{rr}^{(r)} \neq 0$ (μπορεί να επιτευχθεί με εναλλαγές γραμμών αφού $\det \tilde{A}^{(r)} \neq 0$)

Πολλαπλασιαστές:

$$m_{ir} = \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Πολλαπλασιάζουμε την $r$-οστή γραμμή επί $m_{ir}$, αφαιρούμε από την $i$-οστή, και αντικαθιστούμε την $i$-οστή με το αποτέλεσμα για $i=r+1,\dots,n$. Παίρνουμε το σύστημα $A^{(r+1)}x=b^{(r+1)}$ με τις πρώτες $r$ γραμμές του $A^{(r+1)}$ και τις πρώτες $r$ συνιστώσες του $b^{(r+1)}$ ίδιες με τις αντίστοιχες του $A^{(r)}$ και $b^{(r)}$, αντίστοιχα, και $a_{ij}^{(r+1)}=a_{ij}^{(r)}-m_{ir}a_{rj}^{(r)}$ με $i,j=r+1,\dots,n$ και $b_i^{(r+1)}=b_i^{(r)}-m_{ir}b_r^{(r)}$, $i=r+1,\dots,n$

και:

$$a_{ij}^{(r+1)}=0 \quad \text{για} \quad \begin{aligned} i&=r+1,\dots,n \\ j&=1,\dots,r \end{aligned}$$

Ύστερα από $n-1$ βήματα παίρνουμε το σύστημα

$$A^{(n)}x=b^{(n)} \quad (*)$$

με $A^{(n)}$ άνω τριγωνικό με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία (αφού όπως και ο $A$ είναι αντιστρέψιμος). Εδώ τελειώνει η τριγωνοποίηση.

Οπισθοδρόμηση: λύνουμε το $(*)$.

04/04/2013

Απαιτούμενες πράξεις και μνήμη

Οι προσθαφαιρέσεις είναι περίπου όσοι οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις. Έχει επικρατήσει να μετράμε μόνο τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.

Τριγωνοποίηση:

Βήμα $r$:

Πολλαπλασιαστές: $n-r$ διαιρέσεις
Για τα στοιχεία του A: $(n-r)^2$ πολλαπλασιασμοί
Για το b: $n-r$ πράξεις.

Συνολικά για το $n-1$ βήματα:

Για του A: $\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i)^2+(n-i)] = \frac{n^3-n}{3}$ πράξεις.

Για το b: $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = (n-1)+\dots+2+1 = \frac{n^2-n}{2}$ πράξεις

Για την οπισθοδρόμηση απαιτούνται: $\frac{n^2+n}{2}$ πράξεις

Συνολικό κόστος: $\frac{n^3+3n^2-n}{3} = \frac{n^3}{3}+O(n^2)$

**Παράδειγμα**

$n=20$
Υπόθεση: Ο υπολογιστής κάνει $10^6$ πράξεις ανα δευτερόλεπτο.

Gauss: $\frac{16}{3}\cdot 10^{-3}$ sec

Crammer: $21$(ορίζουσες) $\cdot$ $20!\cdot 19$ πολλαπλασιασμοί

Χρόνος $\approx 3\cdot 10^5$ αιώνες

Απαιτούμενη μνήμη

Για του A: $n^2$ θέσεις μνήμης
Για του b: $n$ « «

Δεν απαιτείται πλέον μνήμη.

Οι πολλαπλασιαστές $m_{ir}$ για $i=r+1,\dots,n$ αποθηκεύονται στις θέσεις των στοιχείων $a_{ir}$, $i=r+1,\dots,n$.
Οι πολλαπλασιαστές δηλαδή, αποθηκεύονται στις θέσεις $(i,j)$ με $i>j$ του πίνακα. Τα νέα στοιχεία του A υπολογίζονται από τον εξής τύπο:

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ir} a_{rj} \quad , i,j = r+1,\dots,n$$

(Τα $m_{ir}$ παίρνουν τα ονόματα των αντιστοίχων $a_{ir}$)
Οι νέες συνιστώσες του b αποθηκεύονται στις θέσεις των παλιών.
Στην οπισθοδρόμηση η λύση x αποθηκεύονται στις θέσεις του b.

Παρατήρηση: (Υπολογισμός ορίζουσας με λιγότερες πράξεις)

$$\det A = (-1)^m \det A^{(n)} = (-1)^m a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{nn}^{(n)}$$

με $m$ πλήθος εναλλαγών γραμμών κατά την τριγωνοποίηση

Απαιτούμενες πράξεις: $\frac{n^3}{3} + O(n)$

Κανόνας του Crammer:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{ορίζουσες}}}{(n+1)} \left(\frac{n^3}{3} + O(n)\right) = \frac{n^4}{3} + O(n^3)$$ Ασύμφορος τρόπος

Οδήγηση: Τα διαγώνια στοιχεία $a_{ii}^{(i)}$ λέγονται οδηγοί. Οι οδηγοί εμφανίζονται ως παρονομαστές. Τόσο στον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών όσο και κατά την οπισθοδρόμηση. Αναμένονται προβλήματα στην περίπτωση που κάποιος οδηγός έχει μικρή απόλυτη τιμή.

Παράδειγμα:

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1{,}0001\ldots \\ x_2 &= 0{,}9998\ldots \end{aligned}$$

$b=10$, $t=3$, $L=-20$, $U=20$, στρογγύλευση.

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4$$

$$a_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(1)} - m_{21}a_{12}^{(1)}) = fl(1-10^4) = fl(-9999) = -10^4$$

$$b_2^{(2)} = fl(b_2^{(1)} - m_{21}b_1^{(1)}) = fl(2-10^4) = -10^4$$

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ -10^4 x_2 &= -10^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_2 = 1, \ x_1 = 0$$

πολύ κακή προσέγγιση!

08/04/2014

## Οδήγηση

**Παράδειγμα:**

$$\left.\begin{array}{l} 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right\} \text{Λύση:} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1.0001\ldots \\ x_2 = 0.9998 \end{array}$$

Υπολογιστής: $b=10$, $t=3$, στρογγύλευση

Προσεγγιστική λύση: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\}$

Εναλλακτικός τρόπος: Για να την έχουμε πολύ μικρό σε απόλυτη τιμή οδηγό εναλλάσσουμε τις γραμμές του συστήματος και το γράφουμε ως:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 2 \\ 10^{-4}x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Ο "υπολογιστής μας" δίνει τότε την προσεγγιστική λύση: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}\right\}$

Πολύ καλή προσέγγιση για την χρησιμοποιούμενη ακρίβεια.

**Μερική οδήγηση (ή οδήγηση κατά γραμμές):**

Στο βήμα $r$ της τριγωνοποίησης εξετάζουμε όλα τα στοιχεία $a_{kr}^{(r)}$, $k = r, r+1, \ldots, n$, και με εναλλαγή γραμμών φέρνουμε στη θέση του οδηγού ένα από αυτά που έχει μέγιστη απόλυτη τιμή

**Επιπλέον κόστος:**

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

αφαιρέσεις $\frac{n^2}{2}$

Παρατήρηση: Ο όρος "μικρός οδηγός" είναι ασαφής.

π.χ. πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή του συστήματος στο παράδειγμα επι $10^4$ παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 10^4 x_2 &= 10^4 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Η απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών δίνει στον υπολογιστή μας πάλι: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

ενώ με εναλλαγή γραμμών δίνει: $\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}\right\}$

Ο πραγματικός λόγος της αποτυχίας στην πρώτη περίπτωση είναι ότι:

$$\left|\frac{a_{11}}{a_{12}}\right| = 10^{-4}$$

ενώ $\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| = 1$

Ολική οδήγηση (ή οδήγηση κατα γραμμές και στήλες):

Στο βήμα $r$ της τριγωνοποίησης θεωρούμε τα στοιχεία $a_{kl}^{(r)}$, $k, l = r, \ldots, n$, επιλέγουμε ένα με μέγιστη απόλυτη τιμή και με εναλλαγές γραμμών και στηλών το φέρνουμε στη θέση του οδηγού.

Επιπλέον κόστος: της τάξης του $n^3$

- Η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss χωρίς οδήγηση θεωρείται ασταθής αλγόριθμος. Για κάποιες κατηγορίες συστημάτων, π.χ. όταν ο πίνακας συντελεστών A είναι θετικά ορισμένος, δηλ.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0: x^T A x > 0$, είναι ευσταθής και μόνο σε τέτοιες περιπτώσεις χρησιμοποιείται στην πράξη.

- Η μέθοδος ολικής οδήγησης θεωρείται ευσταθής αλγόριθμος στην πράξη. Χρησιμοποιείται σπάνια γιατί διπλασιάζει το κόστος.

- Η πιθανότητα να είναι ασταθής η μερική οδήγηση είναι πολύ μικρή. Χρησιμοποιείται πολύ στην πράξη γιατί αυξάνει το κόστος πολύ γρήγορα.

Ο αλγόριθμος της απαλοιφής στην πράξη:

1ο στάδιο: Κάνουμε όλες τις πράξεις $\{Ax = b$ της τριγωνοποίησης που αφορούν τον A.
Αποτέλεσμα: $A^{(n)}$ κάτω από τη διαγώνιο έχω τους πολλαπλασιαστές.

Ιδανική υλοποίηση: DECOMP

Κόστος: $\frac{n^3}{3}$

2ο στάδιο: Το αποτέλεσμα ~~της~~ του πρώτου σταδίου και το b. (Δεδομένα). Γίνονται όλες οι πράξεις της τριγωνοποίησης που αφορούν το b και η οπισθοδρόμηση. Κόστος: $n^2$ (SOLVE)

$Ax' = b'$
$Ax'' = b''$

Κοστος: $\frac{n^3}{3} + \underset{\uparrow}{m} \cdot n^2$

το πλήθος των συστημάτων με τον ίδιο πινακα

Παράδειγμα: $Au^i = e^i$, $i = 1, \dots, n$

$A^{-1} = (u^1, u^2, \dots, u^n)$

Κόστος: $n^3$

## Η ανάλυση (διάσπαση) LU:

Εστω A ένας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, αντιστρέψιμος.
Η φάση της τριγωνοποίησης του A κατα την απαλοιφή του Gauss μπορεί να ερμηνευθεί και ως ανάλυση του A σε γινόμενο $A = P^{-1} L U$ με $n \times n$ πινακες P, L, U με τις εξής ιδιότητες:

- O P είναι ένας πινακας μετάθεσης που καταγράφει τις εναλλαγές γραμμών του A κατα την ~~τριγωνοποίηση~~ απαλοιφή. Ενας πινακας μετάθεσης προκύπτει από το μοναδιαίο $I_n$ με μετάθεση των γραμμών του.
- O L είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μονάδες στη διαγώνιο. Κάτω από τη διαγώνιο περιέχει τους πολλαπλασιαστές $m_{ij}$, $i > j$

• Ο $U$ είναι το τελικό προϊόν $A^{(n)}$ της τριγωνοποίησης

Έστω ότι αποδείξαμε την $A = P^{-1}LU$.
→ Πώς μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να επιλύσουμε το σύστημα $Ax = b$;

1η Φάση: Κατασκευή των πινάκων $U (= A^{(n)})$
$L$ (πολλαπλασιαστές) και $P$ (εναλλαγές γραμμών)

2η Φάση: $Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = Pb$

$Ax = b \Leftrightarrow$
$(PA)x = Pb$

$2_1$: $Ly = Pb$
Ο $L$ είναι κάτω τριγωνικός, το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί ως προς $y_1$ (από την πρώτη εξίσωση)
« « $y_2$ (από την δευτερη εξίσωση)
⋮
« « $y_n$ (από την τελευταία « )

δεύτερη φάση

$2_2$: $Ux = y$ ← γνωστό
↑
άνω τριγωνικός

οπισθοδρόμηση

1η Περίπτωση: Δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών ($P = I_n$)
$A = LU$

Ορίζοντας τον πίνακα $M_1$ ως :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ -m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $A^{(2)} = M_1 A$.

Παρόμοια με τους πίνακες $M_r$, $r = 1, \dots, n-1$, τ.ω.

$$(M_r)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ -m_{ir}, & i = r+1, \dots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Διαπιστώνουμε ότι $\boxed{A^{(n)} = M_{n-1} M_{n-2} \cdots M_2 M_1 A}$

Δηλαδή:

$U = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_2 M_1 A$

$\Rightarrow \underbrace{\boxed{M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}}}_{L} \cdot U = A$

πολ/ζω με τον αντίστροφο του α.ν.δ.ο κάνουν $= L$

Οι πίνακες $M_r$ είναι αντιστρέψιμοι έχουν ορίζουσα ίση με 1 και:

$$M_r^{-1} = \begin{cases} 1, & i = j \\ m_{ir}, & i = r+1, \dots, n \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Μάλιστα ισχύει: $M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ m_{21} & 1 & & \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots \; m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} = L$

## $2^{η}$ Περίπτωση: Με εναλλαγές γραμμών

Η γραμμή την οποία στο βήμα $i$ φέρνουμε στη θέση του οδηγού (δηλαδή αυτή που εναλλάσσεται με τη γραμμή $i$) ούτε αλλάζει πλέον θέση, ούτε τα στοιχεία της αλλοιώνονται στη συνέχεια της απαλοιφής. Επομένως υπάρχει μια μετάθεση των γραμμών του πίνακα $A$ που αν την κάναμε πριν από το πρώτο βήμα, θα οδηγούσε σε έναν πίνακα $A'$, η τριγωνοποίηση του οποίου θα μπορούσε να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών. Άρα, σύμφωνα με την $1^{η}$ Περίπτωση, θα έχουμε: $A' = LU$, με $L, U$, πίνακες με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Ο πίνακας μετάθεσης $P$, που αντιστοιχεί στη μετάθεση:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

των πρώτων $n$ φυσικών αριθμών, προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα $I_n$, αν μεταθέσουμε τις γραμμές του μοναδιαίου πίνακα κατά τη μετάθεση $\Pi$, δηλαδή η γραμμή $i_k$ του $P$ είναι η γραμμή $k$ του $I_n$.

### Παράδειγμα:

Μετάθεση: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

αντίστοιχος πίνακας μετάθεσης είναι ο πίνακας $P$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Το PA προκύπτει από τον A με τη μετάθεση των γραμμών του A που από τον $I_n$ οδηγούν στον P.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

10/04/2014

Ανάλυση LU

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

1η Περίπτωση: Δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών

Τότε όπως είδαμε $A = P^{-1} LU$ με L κάτω τριγωνικό πίνακα με μονάδες στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικό $P = I_n$

2η Περίπτωση: Με εναλλαγές γραμμών. Τότε όπως είδαμε, υπάρχει A', που προκύπτει από τον A με κατάλληλες εναλλαγές γραμμών τω: $A' = LU$ με LU όπως παραπάνω. Όμως ο A' γράφεται στη μορφή $A' = PA$ με P πίνακα μετάθεσης

Επομένως: $PA = LU$ ή $A' = P^{-1} LU$

Παρατήρηση : $P^T P = I_n \Rightarrow P^{-1} = P^T$

Παραδείγματα

1ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$m_{21} = \frac{1}{2}$ (απαλοιφή Gauss)

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ , $U = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Επαλήθευση : $LU = \dots = A$

2ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss:
$m_{21} = \frac{1}{2}$ , $m_{31} = \frac{2}{2} = 1$ , $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Απαιτούνται εναλλαγές γραμμών γιατί προέκυψε οδηγός ίσος με μηδέν.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ αλλάζω στον μοναδιαίο πίνακα την 2η και την 3η γραμμή.

, $PA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$

(ο αντίστοιχος $A'$)

## Απαλοιφή Gauss

$m_{21} = \frac{2}{2} = 1$ , $m_{31} = \frac{1}{2}$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P^{-1} L U$

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επαλήθευση: $P^{-1} L U = \dots = A$

- Άμεσες μέθοδοι
- Κατάσταση προβλημάτων
- Επαναληπτικές μέθοδοι

## Κατάσταση συστημάτων

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Απαλοιφή Gauss: (χωρίς οδήγηση, με μερική οδήγηση ή με ολική οδήγηση, αφού συμπίπτουν):

$b = 10$, $t = 3$, αποκοπή

$m_{21} = 0.854$

$a_{22}^{(2)} = 0.01$ , $b_2^{(2)} = 1$

Προσεγγιστική λύση : $\tilde{x}_1 = .443$, $\tilde{x}_2 = 1$ } τελείως λανθασμένο

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0.913 & 0.659 \\ 0.780 & 0.563 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.253 \\ 0.218 \end{pmatrix}$$

(αλλάζω λίγο τα δεδομένα)

$y_1 = 1223$, $y_2 = -1694$

Μικρή μεταβολή στα δεδομένα, τεράστια μεταβολή στη λύση.

---

$\det A = -10^{-6}$

Ερώτημα: Το γεγονός ότι η ορίζουσα του A είναι μικρή αποτελεί λόγο για την κακή κατάσταση του συστήματος;

Απάντηση: Όχι

Διακαιολογία: $\underbrace{10^4 A}_{\tilde{A}} x = 10^4 \begin{pmatrix} 0.254 \\ 0.217 \end{pmatrix}$

Έχει ακριβώς την ίδια κατάσταση με το $Ax = b$

$$\det \tilde{A} = (10^4)^2 \cdot \det A$$
$$= 10^8 \cdot (-10^{-6})$$
$$= -100$$ όχι μικρό

→ Ποιός είναι ο λόγος που το σύστημα έχει κακή κατάσταση;

Προεργασία: Απαιτείται ένα "μέτρο" για τις μεταβολές διανυσμάτων και πινάκων. Ένα βολικό τέτοιο μέτρο αποτελούν οι νόρμες διανυσμάτων και πινάκων που είναι γενίκευση της απόλυτης τιμής αριθμών.

## Νόρμες διανυσμάτων και πινάκων.

### • Νόρμες διανυσμάτων

Ορισμός: (Νόρμα) Έστω $X$ ένας γραμμικός (διανυσματικός) χώρος στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$ που $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ αντίστοιχα. Μια απεικόνιση

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

λέγεται νόρμα (στάθμη, norm), αν ισχύουν:

→ $(N_1)$ $x \in X$ : $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

→ $(N_2)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in X$ : $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

→ $(N_3)$ $\forall x, y \in X$ : $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Τριγωνική ανισότητα

Παρατηρήσεις:

(a) $\forall x \in X$ : $\|x\| \geq 0$

$$0 = \|x - x\| = \|x + (-x)\| \overset{(N_3)}{\le} \|x\| + \|-x\|$$
$$\underset{(N_2)}{=} \|x\| + \|x\| = 2\|x\|$$

$$\Rightarrow 2\|x\| \geq 0$$

(β) $\forall x, y \in X : \|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

(Τριγωνική ανισότητα προς τα κάτω)

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \underset{(N_3)}{\leq} \|x-y\| + \|y\|$

$a \geq b,\ a \geq -b \} \ a \geq |b|$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

Αντίστοιχα: $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

Άρα: $\|x-y\| \geq \big| \|x\| - \|y\| \big|$

## Παραδείγματα

1º $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| = |x|$
$(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ με $\|x\| = |x|$

2º $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ με $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ με $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

($\ell_1$ νόρμα)

Πράγματι:

$(N_1)$: $\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$
$\Leftrightarrow x = 0$

$(N_2)$: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$
$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i|$
$= |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| \cdot \|x\|_1$

(N3) $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i+y_i|}_{\leq |x_i|+|y_i|} \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

3º $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ $\quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

"$\ell_\infty$ νόρμα"

ή

"νόρμα μεγίστου"

(απόδειξη ευκολή)

4º $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ με $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$

"$\ell_2$ νόρμα"

ή

"Ευκλείδεια νόρμα"

$(\cdot,\cdot)_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

εσωτερικό γινόμενο
(ευκλείδειο)

<u>Παρατήρηση:</u> $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)_2}$

(N1), (N2) πολύ εύκολες

~~(N3)~~

$(N_3)$:

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$

(απόδειξη)

1η Περίπτωση: $y = 0$ ✓

2η Περίπτωση: $y \neq 0$

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, έχουμε: $(\lambda = 1)$

$$0 \leq (x+\lambda y, x+\lambda y)_2 = \|x\|_2^2 + (x,\lambda y)_2 + (\lambda y, x)_2 + \lambda^2 \|y\|_2^2$$

$$= \|x\|_2^2 + 2(x,y)_2 \lambda + \|y\|_2^2 \cdot \lambda^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{\|x\|^2 + 2(x,y)_2 \lambda + \|y\|_2^2 \lambda^2}_{\| \atop \varphi(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Συμπέρασμα: $\Rightarrow$ Διακρίνουσα $\Delta \leq 0$

$$\Delta = (2(x,y)_2)^2 - 4\|y\|_2^2 \|x\|_2^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \cancel{4}(x,y)_2^2 \leq \cancel{4}\|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2$$

$$\Rightarrow |(x,y)_2| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

Άρα: $\|x+y\|_2^2 = (x+y, x+y)_2 = \|x\|_2^2 + 2(x,y)_2 + \|y\|_2^2$

$$\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

CS

$$\Rightarrow \|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$$

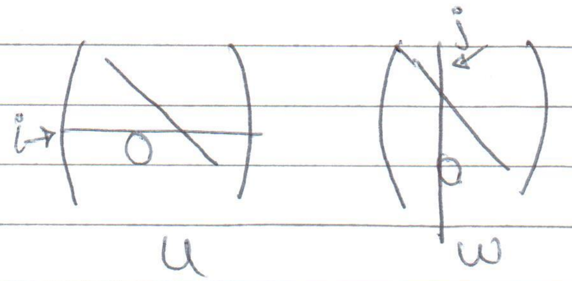
11/04/2014

Απορίες
Τετάρτη 7-5-14
Ώρες: 10:00-12:00

## Άσκηση 3.1

$U, W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ άνω τριγωνικοί

$\Rightarrow UW$ 〃 〃




$(UW)_{ij}$

$$(UW)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} W_{kj}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} U_{ik} W_{kj}$$

U άνω τριγωνικός.

$$= U_{ii} W_{ij} + U_{i,i+1} W_{i+1,j} + \dots + U_{in} W_{nj}$$

Για $i>j$ έχουμε:

$$(UW)_{ij} = U_{ii} \underbrace{W_{ij}}_{0} + \dots + U_{in} \underbrace{W_{nj}}_{0} = 0$$

→ αν $U \in \mathbb{R}^{n,n}$ άνω τριγωνικός + αντιστρέψιμος
⇒ $U^{-1}$ άνω τριγωνικός.

Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $Ux^k = e^k$
Τότε $U^{-1} = (x^1, x^2, \dots, x^n)$

Θα δείξουμε ότι $x^k_{k+1} = x^k_{k+2} = \dots = x^k_n = 0$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{nn} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^k_1 \\ x^k_2 \\ \vdots \\ x^k_n \end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Με οπισθοδρόμηση βλέπουμε ότι:

$x^k_n = x^k_{n-1} = \dots = x^k_{k+1} = 0$

## Άσκηση 3.3

$A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$
$A$ αντίστροφος
$b \in \mathbb{R}^n$
- $A^{-4} b$
- $A^{-1} B A^{-1} b$

### Λύση

$x = A^{-4} b \Rightarrow A^4 x = b$
$\Rightarrow A \cdot \underbrace{(A^3 x)}_{= y} = b$

Λύνουμε τα συστήματα:

$Ay = b \rightsquigarrow y$

$Az = y \rightsquigarrow z$

$A\omega = z \rightsquigarrow \omega$

$Ax = \omega \rightsquigarrow \omega$

$A^3 x = y$

$\Rightarrow A(\underbrace{A^2 x}_{z}) = y$ (1)

Λύνω το $Az = y$

$A^2 x = z$

$\Rightarrow A \underbrace{Ax}_{\omega} = z$

Λύνουμε 4 γραμμικά συστήματα με πίνακα συντελεστών $A$

$\rightarrow A^{-1} B A^{-1} b$

$y = A^{-1} b \Rightarrow Ay = b \rightsquigarrow y$

$\underbrace{A^{-1} B y}_{x}$ $\quad x = A^{-1} B y$

$\Rightarrow Ax = By$

Λύνουμε το σύστημα $Ay = b$, βρίσκουμε το $By$ και λύνουμε το σύστημα $Ax = By$. Τότε το:

$x = A^{-1} B A^{-1} b.$

~~Άσκηση 5.6~~

## Άσκηση 3.6

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & a_{i+1,i} & \ddots & & \\ & & \vdots & & & \\ & & a_{ni} & & \ddots & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

ΝΔΟ:

$$A_i^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -a_{i+1,i} & \ddots & \\ & & \vdots & & \\ & & -a_{ni} & & 1 \end{pmatrix}$$

1ος Τρόπος:

Για $i<j$, ισχύει:

$$A_i \cdot A_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & & a_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & a_{j+1,j} & 1 & \\ & & a_{ni} & \vdots & & \\ & & & a_{nj} & & \end{pmatrix} \quad (*)$$

2ος Τρόπος

$$AB = A + B - I_n + (A - I_n)(B - I_n)$$

Η $i$-γραμμή είναι μηδέν.

Για $\boxed{i \le j}$ ισχύει:

$$(A_i - I_n)(A_j - I_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & a_{i+1,i} & 0 \\ & & a_{ni} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ & & 0 & \\ 0 & & a_{j+1,j} & \\ & & \vdots & \ddots \\ & & a_{nj} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Συμπέρασμα: Για $i \le j$ ισχύει $A_i A_j = A_i + A_j - I_n$.

Εφαρμογή:

$A_i \cdot A_i^{-1} = I_n$

$A_i \cdot A_j = (*)$ (1ος Τρόπος)

Άσκηση 3.7

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος

$A = LU$

$A = \tilde{L}\tilde{U}$

ΝΔΟ: $\tilde{L} = L$ και $\tilde{U} = U$

$$LU = \tilde{L}\tilde{U} \Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot U = \tilde{L}^{-1}\tilde{L} \cdot \tilde{U}$$
$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot U = I_n \cdot \tilde{U}$$
$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot U = \tilde{U}$$
$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot U \cdot U^{-1} = \tilde{U} \cdot U^{-1}$$
$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L \cdot I_n = \tilde{U} \cdot U^{-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{L}^{-1} \cdot L}_{\text{κάτω τριγωνικός}} = \underbrace{\tilde{U} \cdot U^{-1}}_{\text{άνω τριγωνικός}}$$

(⇒ είναι διαγώνιος πίνακας)

$$\Rightarrow \tilde{L}^{-1} \cdot L = \tilde{U} \cdot U^{-1} = D = \mathrm{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \quad (1)$$

(α.ν.δ.ο $D = I_n$)

Επομένως έχουμε:

$\tilde{L}^{-1} L = D \Rightarrow$

$\Rightarrow L = \tilde{L} \cdot D$

$$\Rightarrow L_{ii} = (\tilde{L} D)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{L}_{ik} \cdot d_{ki} = \tilde{L}_{ii} \cdot d_{ii}$$

$$\Rightarrow \underset{1}{\underset{\parallel}{L_{ii}}} = \underset{1}{\underset{\parallel}{\tilde{L}_{ii}}} \cdot d_{ii}$$

$$\Rightarrow d_{ii} = 1 \Rightarrow \boxed{D = I_n}$$

$$(1) \Rightarrow \tilde{L}^{-1} L = I_n \longrightarrow L = \tilde{L} I_n = \tilde{L}$$
$$\tilde{U} U^{-1} = I_n \longrightarrow \tilde{U} = I_n U = U.$$

**29|04|2014**

Παρασκευή 02|05|2014 : 12:00-14:00
 « 09|05|2014 : 12:00-14:00
Δευτέρα 05|05|2014 : 12:00-14:00

Παραδείγματα (συνέχεια)

5º $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_p)$, $p = 1, \infty, 2$

$z \in \mathbb{C}^n$

- $\|z\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|$
- $\|z\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |z_i|$
- $\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)^{1/2}$

Εσωτερικό γινόμενο:

$(x, y)_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ → συζυγής. πάντα με συζυγή.

Τότε: $\|z\|_2 = (z, z)_2^{1/2}$

6º $\left(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\right)$

$$\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)| \quad , \; \text{με } -\infty < a < b < \infty$$

$(N_1)$: $\|f\|_\infty = 0 \iff \max_{a\le x\le b} |f(x)| = 0$

$$\iff f(x)=0 \quad \forall x\in[a,b]$$
$$\iff f=0$$

$(N_2)$: $\lambda\in\mathbb{R}$ και $f\in C[a,b]$

Για μη συνεχή συνάρτηση δεν έχω max

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |\lambda f(x)|$$
$$= \max_{a\le x\le b} (|\lambda|\cdot|f(x)|)$$
$$= |\lambda|\cdot \max_{a\le x\le b}|f(x)|$$
$$= |\lambda|\cdot\|f\|_\infty$$

$(N_3)$: $f,g\in C[a,b]$

για κατάλληλο $\tilde{x}$

$$\|f+g\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)| = |f(\tilde{x})+g(\tilde{x})|$$
$$\le |f(\tilde{x})| + |g(\tilde{x})| \le \max_{a\le x\le b}|f(x)| + \max_{a\le x\le b}|g(x)|$$

$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

## Ορισμός: (Ισοδυναμία νορμών)

Έστω $X$ ένας γραμμικός χώρος. Δύο νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ του $X$ λέγονται ισοδύναμες (ή συγκρίσιμες) αν υπάρχουν θετικές σταθερές $m$ και $M$ τ.ω.:

$$\forall x \in X : \quad m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$$

(οπότε θα ισχύει και: $\frac{1}{M}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{m}\|x\|'$)

## Λήμμα (Ισοδυναμία νόρμας με τη νόρμα μεγίστου.)

Κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$ του $\mathbb{R}^n$

**Απόδειξη** (Μόνο για τη μία κατεύθυνση.)

Έστω $\{e^1, \dots, e^n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ έχουμε:

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$, οπότε:

$$\|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e^i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|x_i e^i\|}_{= |x_i| \cdot \|e^i\|} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|}_{\leq \|x\|_\infty} \cdot \|e^i\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \cdot \|e^i\| = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \|e^i\|\right)}_{= M \text{ (ανεξάρτητο του } x)} \cdot \|x\|_\infty$$

## Πρόταση (Ισοδυναμία νορμών στον $\mathbb{R}^n$)

Όλες οι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμες μεταξύ τους

**Απόδειξη**

Έστω $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ νόρμες στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχουν θετικές σταθερές $m, M$ και $m', M'$ ώστε:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad m\|x\|_\infty \overset{②}{\leq} \|x\| \overset{①}{\leq} M\|x\|_\infty$$

$$\text{«} \quad : \quad m'\|x\|_\infty \underset{②'}{\leq} \|x\|' \underset{①'}{\leq} M'\|x\|_\infty$$

Άρα : $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| \overset{①}{\leq} M\|x\|_\infty \underset{②'}{\leq} \underbrace{\frac{M}{m'}}_{=\tilde{M}} \|x\|' \qquad \left(\|x\|_\infty \leq \frac{1}{m'}\|x\|'\right)$$

και

$$\|x\| \overset{②}{\geq} m\|x\|_\infty \underset{①'}{\geq} m\frac{1}{M'}\|x\|' = \underbrace{\frac{m}{M'}}_{=\tilde{m}} \|x\|'$$

Δηλαδή: $\tilde{m}\|x\|' \leq \|x\| \leq \tilde{M}\|x\|'$

## Ορισμός: (Σύγκλιση ακολουθιών)

Λέμε ότι μια ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $X$, αν υπάρχει $x \in X$ (το όριο της ακολουθίας), ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$), αν:

$$\|x^{(n)} - x\| \to 0 \quad , \text{για } n \to \infty$$

Συμβολισμός:

$x^{(n)} \to x$ , για $n \to \infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} x^{(n)} = x$

(ως προς μια συγκεκριμένη νόρμα)

Στον $\mathbb{R}^n$, λόγω της ισοδυναμίας των νορμών, αν μια ακολουθία $(x^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς κάποια νόρμα τότε συγκλίνει ως προς οποιαδήποτε άλλη νόρμα του $\mathbb{R}^n$. Ιδιαίτερα, συγκλίνει ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, οπότε:

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x \Leftrightarrow \lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = x_i \quad , i = 1, \dots, n$$

ακολουθία Caushy
(βασική ακολουθία)

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ : $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \geq N$ :

$|a_n - a_m| < \varepsilon$ → όριο

$(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ « « « : $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon$

$(X, \|\cdot\|)$

**Ορισμός:** Ενας γραμμικός χώρος $X$ με νόρμα $\|\cdot\|$ λέγεται <u>πλήρης</u>, αν κάθε ακολουθία Cauchy $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ως προς τη $\|\cdot\|$ συγκλίνει, δηλαδή:

$$\left(\forall \varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \ \forall n,m\geq N : \|x^{(n)}-x^{(m)}\|<\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \exists x\in X : \|x^{(n)}-x\| \to 0, \text{ για } n\to\infty$$

**Λήμμα:** Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης

**Πρόταση:** Εστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Τοτε ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης.

## Νόρμες πινάκων

Μια απεικόνιση $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>νόρμα πινάκων</u>, αν ικανοποιεί τις $(N_1)$, $(N_2)$, $(N_3)$ και:

$(N_4)$: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ : $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$

Θα ασχοληθούμε μόνο με τις λεγόμενες <u>φυσικές νόρμες</u> πινάκων.

**Παρατήρηση:** Έστω ότι έχω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $A\in\mathbb{R}^{n,n}$. Τότε, για $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (*)$$

Υπάρχουν σταθερές $m, M$ θετικές τω:

$\forall x \in \mathbb{R}^n : m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty$

(*) $\Rightarrow$ $$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M\|Ax\|_\infty}{m\|x\|_\infty} = \frac{M}{m}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

$$= \frac{M}{m} \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|}{\|x\|_\infty}$$

$$\leq \frac{M}{m} \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|_\infty}}{\|x\|_\infty}$$

$$\leq \frac{M}{m} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ανεξάρτητο του x

Ορισμός (Φυσική νόρμα πινάκων)

Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η απεικόνιση:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n,n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται φυσική νόρμα πινάκων (ή νόρμα παραγόμενη από τη νόρμα του $\mathbb{R}^n$)

Παρατήρηση:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

ο μικρότερος δυνατός για να ισχύει η ανισότητα

## Πρόβλημα: Πως υπολογίζουμε μια φυσική νόρμα ενός πίνακα;

i) Έστω $C_1$ μια σταθερά τω:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\| \leq C_1 \|x\|$$

Τότε $\|A\| \leq C_1$

ii) Έστω $C_2$ το και $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$. Τότε $\|Ay\| \geq C_2 \|y\|$
$\Rightarrow \|A\| \geq C_2$

Γενικά ο υπολογισμός της $\|A\|$ δεν είναι εύκολος.

**Παραδείγματα:**

**1ο** $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

Αντίστοιχη φυσική νόρμα:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(νόρμα του αθροίσματος γραμμών.)

**2ο** $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(νόρμα του αθροίσματος στηλών)

$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$, $\|A\|_\infty = 11$, $\|A\|_1 = 10$

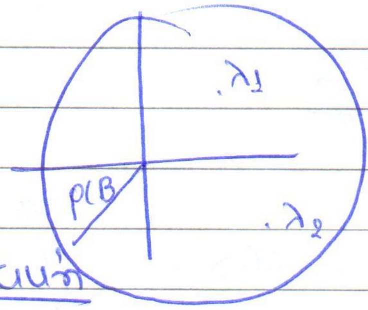
3ο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^T A)\right)^{1/2}$$

Φασματική νόρμα.
Ευκλείδεια.

Έστω $B \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές του

$$\rho(B) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$$




φασματική ακτίνα του B

Για $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ οι $\|A\|_1$ και $\|A\|_\infty$ δίνονται από τους ίδιους τύπους, ενώ

$$\|A\|_2 = \left(\rho(A^* A)^{1/2}\right)$$

με $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ij}}$ (και το συζυγές)

!02/05/2014!

Δευτέρα 05/05/2014
12:00 - 14:00
Αίθουσα Ι2

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = P^{-1} L U$

Ερώτημα: Σε ποιές περιπτώσεις μπορώ να επιλέξω $P = I_n$;

Άσκηση 3.10 (Δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη)

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

$i = 1, \dots, n$.
κυριες ορίζουσες του A

ΝΔΟ: Αν $\delta_i \neq 0$ για $i = 1, \ldots, n-1$, τότε $A = LU$

(Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος, ισχύει και το αντίστροφο.)

Απόδειξη

Το πρώτο βήμα της απαλοιφής Gauss γίνεται χωρίς πρόβλημα (χωρίς εναλλαγές γραμμών) γιατί $a_{11} = \delta_1 \neq 0$ (από υπόθεση)

Έστω ότι γίνονται χωρίς εναλλαγές γραμμών $i-1$ βήματα της απαλοιφής. Τότε έχουμε:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \cdots & \alpha_{1i}^{(1)} \\ & \alpha_{22}^{(2)} & \cdots & \alpha_{2i}^{(2)} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & & \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} \end{pmatrix}$$

$= \delta_i \neq 0$

Επομένως, $\alpha_{11}^{(1)} \alpha_{22}^{(2)} \cdots \alpha_{ii}^{(i)} = \delta_i \neq 0$
$\Rightarrow \alpha_{ii}^{(i)} \neq 0$. Συνεπώς και το βήμα $i$ της απαλοιφής γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Συμπέρασμα: Στην απαλοιφή του Gauss δεν απαιτούνται εναλλαγές γραμμών, οπότε $P = I_n$

## Άσκηση 3.11

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο,

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , i = 1, \ldots, n$$ (είναι ικανή συνθήκη όχι αναγκαία)

- $\Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.
- $A = LU$

### Λύση

- $Ax = 0 \Rightarrow (Ax)_i = 0 \quad , i = 1, \ldots, n.$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$

$$\Rightarrow a_{ii} x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j$$

$$\Rightarrow \boxed{|a_{ii}| \cdot |x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| |x_j| \quad , i = 1, \ldots, n.} \quad (*)$$

Έστω $\ell$ τ.ω.: $|x_\ell| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$

Τότε η $(*)$ για $i = \ell$ δίνει:

$$|a_{\ell\ell}| \cdot |x_\ell| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_\ell|}$$

$$\Rightarrow |a_{\ell\ell}| \cdot |x_\ell| \leq \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \right) \cdot |x_\ell|$$

Εστω $|x_\ell| \neq 0$. Τότε, αντικαθιστώντας στην προηγούμενη εκτίμηση παίρνουμε:

$$|a_{\ell\ell}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| \quad \underline{\text{ΑΤΟΠΟ!!}}$$

<u>Συμπέρασμα</u>: $x_\ell = 0$, οπότε $x=0$

Αποδείξαμε: $Ax=0 \Rightarrow x=0$

Συμπέρασμα: $A$ αντιστρέψιμος.

• Εστω $i \in \{1, \dots, n-1\}$

Τότε, ο πίνακας:
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1i} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2i} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ii} \end{pmatrix}$$

έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, οπότε, όπως είδαμε μόλις είναι αντιστρέψιμος.

<u>Συμπέρασμα</u>: $\delta_i \neq 0$, $i=1,\dots,n-1$,

Επομένως, σύμφωνα με την Άσκηση 3.10 ο $A$ γράφεται στη μορφή $\underline{A=LU}$

# Άσκηση 3.23

(a) $1 < p, q < \infty$ τω: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$a, b \geq 0$

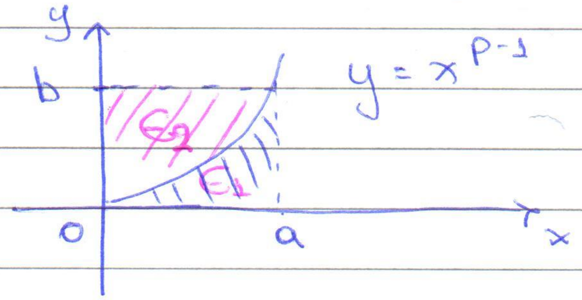
Ανισότητα του Young $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

$p = 2$

$2ab \le a^2 + b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$

## Γεωμετρική Ερμηνεία:




$y = x^{p-1}$ (γιατί αν το ολοκληρώσω θα πάρω $\frac{x^p}{p}$)

$$E_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{a^p}{p}$$

$$E_2 = \int_0^b y^{1/p-1}\,dy$$

$$\Rightarrow E_2 = \int_0^1 y^{q-1}\,dy$$

$$= \frac{b^q}{q}$$

$\frac{1}{p-1} = q - 1$

$\Rightarrow (p-1)(q-1) = 1$

$\Rightarrow p \cdot q - p - q + \cancel{1} = \cancel{1}$

$\Rightarrow p + q = p \cdot q$

$\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(6) $1 \le p < \infty$, $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/2}}$$

Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ <u>ΝΔΟ:</u> $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Για $p=2$ : ανισότητα Caushy-Swarz)

(Γενικά:) <u>Ανισότητα του Hölder.</u>

<u>(απόδειξη)</u>

• $p=1$ : $q=\infty$, $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)\left(\max_{1\le j\le n} |y_j|\right)$

<u>τετριμ.</u>

• αν $x=0$ ή $y=0$ ✓ (τετριμ.)

<u>Υπόθεση:</u> <u>$p \neq 1$, $x, y \neq 0$</u>

<u>1η Περίπτωση:</u> $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$

Σύμφωνα με την ανισότητα του Young έχουμε:

$|x_i y_i| \le \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}$, $i = 1, \dots, n$.

<u>Άρα:</u>

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \frac{1}{p} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{= \|x\|_p^p = 1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}_{= \|y\|_q^q = 1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

## $2^{\eta}$ Περίπτωση: Γενική

Θέτουμε $\tilde{x} = \dfrac{x}{\|x\|_p}$, $\tilde{y} = \dfrac{y}{\|y\|_q}$

Τότε η $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$, οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη περίπτωση,

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_i \tilde{y}_i| \leq 1$$

Επομένως:

$$\frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

---

(+) ΝΔΟ : $\|\cdot\|_p$ νόρμα του $\mathbb{C}^n$

$(N_1)$, $(N_2)$ τετριμ.

$(N_3)$ : $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

ανισότητα του Minkowski

- $p=1$ ✓
- $\boxed{p>1}$

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i + y_i|}_{\leq |x_i| + |y_i|} \cdot |x_i + y_i|^{p-1}$$

→

έχω
Γίνου το $|y_i|$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^p \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{=|z_i|} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \cdot \underbrace{|x_i+y_i|^{p-1}}_{=|z_i|}$$

$$\Rightarrow \ldots \le \|x\|_p \left( \sum_{i=1}^{n} \left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^q \right)^{1/q} + \|y\|_p \left( \ldots \right)^{1/q}$$

Hölder.

$$\Rightarrow \ldots \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^{\underbrace{(p-1)q}_{=p}} \right)^{1/q}$$

Έχω: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow (p-1) \cdot q = p$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^p \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\le (\|x\|_p + \|y\|_p) \left( \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|x+y\|_p} \right)^{p-1}$$

$$= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^{\cancel{p}} \le (\|x\|_p + \|y\|_p) \cancel{\|x+y\|_p^{p-1}}$$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$$

(δ) Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $1 \leq p < q \leq \infty$

ΝΔΟ: $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ (Δηλαδή όσο ~~μικραί~~ ~~νε~~ μεγαλώνει ο δείκτης μικραίνει η νόρμα)

ανισότητα Jensen

1η Περίπτωση: $q = \infty$

Προφανώς: $|x_i| \leq \|x\|_p$, $i = 1, \dots, n$

γιατί:

$\|x\|_p^p = \|x_1\|_p + \dots + \|x_n\|_p \geq |x_i|^p$

$\Rightarrow |x_i| \leq \|x\|_p$, $i = 1, \dots, n$

Επομένως:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \|x\|_p$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$

2η Περίπτωση: $q < \infty$

$$|x_i|^q = |x_i|^p \cdot \underbrace{|x_i|^{\overbrace{q-p}^{>0}}}_{\leq \|x\|_p}$$

$$\Rightarrow |x_i|^q \leq \|x\|_p^{q-p}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q}_{= \|x\|_q^q} \leq \|x\|_p^{q-p} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}_{= \|x\|_p^p}$$

Συμπέρασμα:

$\Rightarrow \|x\|_q^{\cancel{q}} \leq \|x\|_p^{\cancel{q}}$

$\Rightarrow \boxed{\|x\|_q \leq \|x\|_p}$ (αν έχω σταθερό το $x$)

## Άσκηση 3.24

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ στον $\mathbb{R}^n$
Βέλτιστες σταθερές συμμετρίας
(ανα ζεύγη.)

• Σύμφωνα με την ανισότητα του Jensen, έχουμε
$\forall x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Για $x = e^i$ ισχύουν ως ισότητες, άρα οι σταθερές δεν μπορούν να βελτιωθούν

(a) $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty = n \|x\|_\infty$$

Για $x = (1, 1, \dots 1)^T$ ισχύει ως ισότητα

(b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty^2 = n \|x\|_\infty^2$$

$$\Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

Για $x=(1, 1, \dots 1)^T$ ισχύει ως ισότητα.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot |x_i| \underset{\uparrow \, CS}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{n} \cdot \|x\|_2$$

Για $x=(1, 1, \dots, 1)^T$ ισχύει ως ισότητα.

05/05/2014

• Δείκτης κατάστασης γρ. συστημάτων.

$Ax=b$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα: Μελέτη της κατάστασης του γραμμικού συστήματος.

Απλούστερη περίπτωση:

$$\begin{cases} Ax = b, & \Delta b \in \mathbb{R}^n \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases}$$

Ερώτημα: Πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τη σχετική μεταβολή

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

συναρτήσει της: $\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$, $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στου $\mathbb{R}^n$

Συμβολίζουμε με $\|.\|$ και τη νόρμα πινάκων (φυσική) που παράγεται από νόρμα $\|.\|$ στον $\mathbb{R}^n$.

$$A(x+\Delta x) = b + \Delta b$$
$$\Rightarrow \cancel{Ax} + A\Delta x = \cancel{b} + \Delta b \quad (Ax = b)$$
$$\Rightarrow \boxed{A\Delta x = \Delta b}$$

$$\Rightarrow \Delta x = A^{-1}\cdot\Delta b$$
$$\Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1}\cdot\Delta b\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|$$
$$\Rightarrow \boxed{\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}$$

(για να βρω τη σχετική μεταβολή)

Έστω ότι $b \neq 0$ τότε $x \neq 0$

Επομένως: $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \dfrac{\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}{\|x\|}$ (1)

Όμως: $Ax = b$

$$\Rightarrow \|b\| \leq \|A\|\cdot\|x\|$$
$$\Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

(ΠΡΟΣΟΧΗ! ΟΧΙ: $\cancel{\left\|\frac{b}{A}\right\|}$)

$$(1) \Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Συμπέρασμα: $\dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

$k(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

Δείκτης κατάστασης.

$$k(A) = \|A\|\cdot\|A^{-1}\| \geq \|A\cdot A^{-1}\| = \|I_n\| = 1$$

$$\Rightarrow k(A) \geq 1$$

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Όσο μικρότερος είναι ο $\kappa(A)$ τόσο καλύτερη είναι η κατάσταση του $Ax=b$. Για $\kappa(A) \gg 1$ η κατάσταση του $Ax=b$ είναι κακή

**Θεώρημα:** (Εκτίμηση της σχετικής μεταβολής λύσεων γραμμικών συστημάτων)

Έστω $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καθώς και οι αντίστοιχη παραγόμενη νόρμα πινάκων. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε αν $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, έχουμε:

(α) $\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ A(x+\Delta x) = b+\Delta b \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \cdot \dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

(β) $\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \\ \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \text{ (υπόθεση)} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} < \dfrac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

$\downarrow$ κάτι κοντά στη μονάδα το $\kappa(A)$ μας ενδιαφέρει.

(γ) $\left.\begin{array}{l} Ax=b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \\ \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} < \dfrac{\kappa(A)}{1-\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \left[\dfrac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \dfrac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right]$

(Οι ανισότητες αυτές δεν βελτιώνονται.)

**Απόδειξη**

(α) Το αποδείξαμε ήδη

Βοηθητικό αποτέλεσμα για (6) και (7)

Έστω $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ τω:
$\exists\, c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \|Bx\| \geq c\|x\|$

Τότε ο $B$ είναι αντιστρέψιμος και $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Έστω $Bx = 0$. Τότε $0 \geq c\|x\|$
$\Rightarrow \|x\| = 0$
$\Rightarrow x = 0$

ΑΡΑ ο $B$ είναι αντιστρέψιμος.

Για $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$c\|B^{-1}y\| \leq \|B \cdot B^{-1}y\| = \|y\|$$

$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \|B^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$$

$$\Rightarrow \boxed{\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}}$$

Η νόρμα ενός πίνακα είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για να

Εφαρμόζοντας το βοηθητικό αποτέλεσμα έχουμε:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \|(A+\Delta A)y\| = \|Ay + \Delta A \cdot y\|$$
$$\geq \|Ay\| - \|\Delta A \cdot y\|$$
$$\geq \|Ay\| - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$
$$\geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$$

$y = A^{-1}Ay$
$\Rightarrow \|y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ay\|$
$\Rightarrow \|Ay\| \geq \frac{\|y\|}{\|A^{-1}\|}$

$$\Rightarrow \|Ay+\Delta A y\| \geq \frac{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}{\|A^{-1}\|}\cdot\|y\|$$

cτο

άρα: ο $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\boxed{\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}}$$

(β) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$

$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = b - (A+\Delta A)x$$
$$= \cancel{b} - \cancel{Ax} - \Delta A x$$
$$\Rightarrow \Delta x = -(A+\Delta A)^{-1}\cdot\Delta A\cdot x$$
$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|\cdot\|x\|$$
$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\overbrace{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}^{\kappa(A)}}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta A\|}\cdot\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

η)

(γ) $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$

$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = b+\Delta b - (A+\Delta A)x$$
$$= \cancel{b} + \Delta b - \cancel{Ax} - \Delta A x$$
$$\Rightarrow (A+\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A x$$
$$\Rightarrow \Delta x = (A+\Delta A)^{-1}\cdot[\Delta b - \Delta A x]$$

ε)

$$\Rightarrow \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\|\cdot\left(\|\Delta b\| - \|\Delta A\|\cdot\|x\|\right)$$
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\cdot\|A\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|\,\|x\|} - \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

b)

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1-\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)$$

$\uparrow$ $\|b\| \leq \|A\|\,\|x\|$

Επαναληπτικές μέθοδοι:

$Ax=b$ $A\in\mathbb{R}^{n,n}$ αντιστρέψιμος.
$x^{(0)}\in\mathbb{R}^n$ αρχική τιμή

$x^{(m)}\in\mathbb{R}^n$ ακολουθία προσεγγίσεων της $x$

Μέθοδος του Jacobi
Μέθοδος των Gaus-Seidel.

Επιπλέον υπόθεση: όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι διάφορα του μηδενός: $a_{ii}\neq 0$, $i=1\ldots n$.

$Ax=b \Rightarrow (Ax)_i=b_i$, $i=1\ldots n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$$

$$\Rightarrow a_{ii}x_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1\ldots n$$

$$\Rightarrow x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j\right]\quad i=1\ldots n$$

Jacobi: $$x_i^{(m+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left[b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(m)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

$$\begin{pmatrix} x_2^{(m)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix} \xrightarrow{x^{(m+1)}} \begin{pmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

**Gauss-Seidel:** $$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}\right]$$

Οι μέθοδοι είναι ιδιαίτερα κατάλληλες στην περίπτωση αραιών πινάκων

Για την θεωρητική μελέτη είναι καταλληλότερη η εξής μορφή

$D = \mathrm{diag}(a_{11}\ a_{22} \ldots a_{nn})$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\ a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & \vdots \\ 0 & & & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς: $\boxed{A = L + D + U}$

**Jacobi:** $D \cdot x^{(m+1)} = b - (L+U)x^{(m)}$ (μορφή με πίνακες)

$$\Rightarrow \boxed{x^{(m+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1} b}$$

**Gauss-Seidel:** $(L+D)x^{(m+1)} = b - Ux^{(m)}$

$$\Rightarrow \boxed{x^{(m+1)} = -(L+D)^{-1} U x^{(m)} + (L+D)^{-1} \cdot b}$$

Γενική επαναληπτική μέθοδος.

$Ax = b$

$A = M - N$ με $M$ και $N \in \mathbb{R}^{n,n}$ πίνακες
και $M$ αντιστρέψιμος.

$Ax = b \Rightarrow (M-N)x = b$

$\Rightarrow \boxed{Mx = Nx + b}$

$x^{(m)} \longrightarrow x^{(m+1)}$

(+) $\boxed{Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b}$

Jacobi: $M_J = D$, $N_J = -(L+U)$

Gauss-Seidel: $M_{GS} = L + D$, $N_{GS} = -U$

Επιλέγουμε το $M$ έτσι ώστε τα συστήματα της μορφής $My = z$ να λύνονται εύκολα

Τι μπορούμε να πούμε για την σύγκλιση των προσεγγίσεων;

Υπόθεση: $x^{(m)} \to y$ για $m \to \infty$

Ισχυρισμός: $y = x$

$$\begin{array}{ccc} Mx^{(m+1)} & = & Nx^{(m)} + b. \\ \downarrow & & \downarrow \\ My & & Ny \end{array}$$

$\Rightarrow My = Ny + b$

$\Rightarrow (M-N)\,y = b$
$\Rightarrow \boxed{Ay = b} \Rightarrow \boxed{y = x}$

**06/05/2014**

Ερώτημα: Πότε συγκλίνει αυτή η μέθοδος;
Δηλαδή πότε για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x^{(0)}$ ισχύει $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} Mx^{(m+1)} &= Nx^{(m)} + b \\ Mx &= Nx + b \end{aligned}\right\} \ominus \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x^{(m+1)} - x) = N(x^{(m)} - x)$$
$$\Rightarrow \boxed{x^{(m+1)} - x = M^{-1}N\,(x^{(m)} - x)}$$

$G = M^{-1}N$ πίνακας επανάληψης της επαναληπτικής μεθόδου.

$$x^{(m+1)} - x = G\,(x^{(m)} - x)$$
$$\Rightarrow \boxed{x^{(m)} - x = G^{m}\,(x^{(0)} - x)}$$

επαγωγικά

Έστω $\|.\|$ νόρμα στου $\mathbb{R}^n$ και η αντίστοιχη φυσική νόρμα πινάκων, τότε.

$$(*)\quad \|x^{(m)} - x\| \leq \|G^{m}\| \cdot \|x^{(0)} - x\|$$

Για κατάλληλα ~~$x^{(m)}$~~ αρχική τιμή $x^{(0)}$ η $(*)$ ισχύει ως ισότητα

Συμπέρασμα: Η μέθοδος συγκλίνει αν και μόνο αν η νόρμα $\|G^m\| \to 0,\ m \to \infty$

δηλαδή $G^m \to 0,\ m \to \infty$.

↑

πίνακας

(πίνακα)

Φασματική ακτίνα: $P \in \mathbb{C}^{n,n}$

$\lambda_i(P)$ είναι οι ιδιοτιμές του $P$

$$\rho(P) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i(P)|$$

Λήμμα: (Σχέση μεταξύ φασματικής ακτίνας και φυσικής νόρμας πίνακα)

Έστω $\|.\|$ οποιαδήποτε νόρμα στον $\mathbb{C}^n$. Τότε, για κάθε πίνακα $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ ισχύει

$$\rho(P) \le \|P\|$$

Αντίστροφα, για κάθε $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $|||.|||$ νόρμα στον $\mathbb{C}^n$ ώστε:

$$|||P||| \le \rho(P) + \varepsilon$$

Απόδειξη (Μόνο το πρώτο μέρος)

$\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του $P$

Έστω $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, $Pz = \lambda z$ ($z \ne 0$)

Τότε έχουμε:

$$|\lambda| \cdot \|z\| = \|\lambda z\| = \|Pz\| \le \|P\| \cdot \|z\|$$

άρα:

$\Rightarrow |\lambda| \cdot \cancel{\|z\|} \leq \|P\| \, \cancel{\|z\|}$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \|P\|$

Άρα αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε ιδιοτιμή, έχουμε:

$$\rho(P) \leq \|P\|$$

Θεώρημα (Ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων)

Έστω $x$ η λύση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αντιστρέψιμο πίνακα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(α) Η επαναληπτική μέθοδος (+) συγκλίνει, δηλαδή για κάθε αρχική τιμή $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ ισχύει: $x^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} x$

(β) ~~ρ(Χ)~~ $\rho(G) < 1$ όπου $G$ ο πίνακας επανάληψης της μεθόδου. $(G = M^{-1}N)$

(γ) Υπάρχει φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ ώστε η $|||G||| < 1$

(δ) $\lim_{m \to \infty} G^m = 0$

Απόδειξη. (α) ⇒ (β) ⇒ (γ) ⇒ (δ) ⇒ (α)

(α) ⇒ (β): Έστω ότι $x^{(m)} \to x$, $m \to \infty$. Τότε:

$G^m(x^{(0)} - x) \to 0$, $m \to \infty$, για οποιοδήποτε $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$.

Για $y \in \mathbb{C}^n$ επιλέγουμε $x^{(0)} = y + x$ οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή

$G^m y \to 0, \quad m \to \infty$

Έστω $\lambda$ ιδιοτιμή του $G$ και $z$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε $Gz = \lambda z$, οπότε $G^m z = \lambda^m z$
Επομένως:

$$\lambda^m z \to 0, \quad m \to \infty$$

Άρα $\|\lambda^m z\| \to 0$, $m \to \infty$, οπότε:

$$|\lambda^m| \underbrace{\|z\|}_{\neq 0} \to 0, \quad m \to \infty \Rightarrow |\lambda| < 1$$

Συμπέρασμα: $|\lambda_i(G)| < 1$, $i = 1 \dots n$.

οπότε $\rho(G) < 1$

(δ) ⇒ (γ): $\rho(G) < 1 \Rightarrow$ Υπαρχει ε το ω: $\rho(G) + \varepsilon < 0$

Σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει φυσική νόρμα $|||\cdot|||$ τω:

$$|||G||| \leq \underbrace{\rho(G) + \varepsilon}_{<1}$$

(γ) ⇒ (δ) $$|||G^m||| \leq \underbrace{|||G|||\cdot|||G|||\cdot \ldots \cdot |||G|||}_{m \text{ φορές}}$$

$$= |||G|||^m \to 0, \quad m \to \infty$$

γιατί: $|||G||| < 1$

(δ) → (α):

$$x^{(m)} - x = G^m (x^{(0)} - x)$$

$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \le \underbrace{\|G^m\|}_{\to 0,\ m\to\infty} \cdot \|x^{(0)} - x\|$$

$$\Rightarrow \|x^{(m)} - x\| \to 0 \quad m \to \infty$$

$$\Rightarrow x^{(m)} \to x, \quad m \to \infty.$$

Λήμμα: (Ανισότητα Gerschgorin)

Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ πίνακας και $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του. Τότε υπάρχει $s \in \{1, \dots, n\}$

$$|a_{ss} - \lambda| \le \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} |a_{sj}|}_{r_s} \quad (**)$$

Απόδειξη

Έστω $z \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε $Az = \lambda z$. Επομένως,

$$(Az)_i = \lambda z_i \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \lambda z_i$$

$$\Rightarrow (\lambda - a_{ii}) z_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} z_j$$

$$\Rightarrow |a_{ii} - \lambda| \, |z_i| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \, |z_j|$$

Έστω $s$ τω $|z_s| = \|z\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |z_j|$

Τότε για $i=s$:

$$|a_{ss}-\lambda| \cdot |z_s| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}| \underbrace{|z_j|}_{\le |z_s|}$$

$$\Rightarrow |a_{ss}-\lambda| \cdot \cancel{|z_s|} \le \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}| \right) \cancel{|z_s|}$$

$A \in \mathbb{C}^{n,n}$ αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο:
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$$

Ισχυρισμός: αν ο $A$ έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο $\Rightarrow A$ αντιστρέψιμος.

($Az=0 \Rightarrow z=0 \iff A$ αντιστρ. ανν το $\underline{0}$ όχι ιδιοτιμ.

~~(Πρόταση: (Σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel για πίνακες με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο)~~

Έστω ότι το μηδέν είναι ιδιοτιμή του $A$. Τότε, σύμφωνα με την (**)

$$|a_{ss} - 0| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne s}}^{n} |a_{sj}| \quad \text{άτοπο}$$

$\Rightarrow$ άρα το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή άρα $A$ αντιστρέψιμος.

Πρόταση: (Σύγκλιση των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel για πίνακες με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο.)

Έστω A πίνακας με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο. Τότε:

(α) Οι πίνακες επανάληψης $G_J = -D^{-1}(L+U)$ και $G_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ των Jacobi και ~~…~~ Gaus-Seidel αντίστοιχα, ικανοποιούν τις ανισότητες:

$\|G_J\|_\infty < 1$ , $\|G_{GS}\|_\infty < 1$

(β) Οι μέθοδοι του Jacobi και των Gaus-Seidel συγκλίνουν για τέτοια συστήματα με πίνακα συντελεστών A.

Απόδειξη:

(α) Θέτουμε

$$C = \max_{1 \le i \le n} \left[ \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right]$$

Προφανώς: $\boxed{C < 1}$

Ισχυρισμός: $\|G_J\|_\infty = C \quad (<1)$

$G_J = -D^{-1}(L+U)$

$$(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 0 & & \vdots \\ \alpha_{31} & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\alpha_{nn}} \end{pmatrix}$$

$$G_J = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} \\ \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} & 0 & \cdots & \frac{\alpha_{2n}}{\alpha_{22}} \\ & & \ddots & \\ \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{nn}} & \cdots & \frac{\alpha_{n\,n-1}}{\alpha_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|G_J\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ii}}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\left(\frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}|\right) = G' < 1$$

---

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε ~~u~~ να είναι $u = G_{GS}\cdot y$,

ή $u = -(L+D)^{-1}\cdot U\cdot y$

$\Rightarrow (L+D)u = -Uy$

$$\Rightarrow \sum_{j=1} a_{ij} u_j = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$\Rightarrow a_{ii} u_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j$$

$$\Rightarrow u_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right], \quad i=1,\dots,n.$$

Ισχυρισμός: (++) $|u_i| \le G' \|y\|_\infty$, $i=1,\dots,n$.

$\big($ (++) $\Rightarrow \|u\|_\infty \le G' \|y\|_\infty \Rightarrow \|G_{GS}\,y\| \le G' \|y\|_\infty$

$\Rightarrow \|G_{GS}\|_\infty \le G' \big)$

Επαγωγή:

$i=1$: $u_1 = -\frac{1}{a_{11}} \sum_{j=2}^{n} a_{1j} y_j \Rightarrow$

$$\Rightarrow |u_1| \le \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| \underbrace{|y_j|}_{\le \|y\|_\infty}$$

$$\Rightarrow |u_1| \le \underbrace{\left(\frac{1}{|a_{11}|} \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|\right)}_{\le c'} \|y\|_\infty$$

Έστω ότι η (++) ισχύει για $1, \dots, i-1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $i$. Έχουμε:

$$|u_i| \le \frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \left( \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \underbrace{|x_j|}_{\le c' \|y\|_\infty} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \underbrace{|y_j|}_{\le \|y\|_\infty} \right)$$

$\le \|y\|_\infty$

επαγωγική υπόθεση.

$$\Rightarrow |u_i| \le \underbrace{\frac{1}{|a_{ii}|} \cdot \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \right)}_{\le c'} \|y\|_\infty$$

07/05/2014

Άσκηση 3.31

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \|A\| = 2,5 \,;$$

Λύση

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$

$$= \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2 - 4$$

$$= (\lambda+1)^2 - 4$$

$p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2 = 4$

$\Rightarrow \lambda + 1 = \pm 2$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

Άρα:

$\rho(A) = 3$

Παρατηρούμε ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A) > \|A\|$
οπότε τέτοια φυσική νόρμα δεν υπάρχει.

Άσκηση 3.32

(a) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\|A\|_{max} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$

$\|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\|A\|_{max} = 2$

$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4$

$p(\lambda)=0$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2=4$

$\Rightarrow \lambda-1=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=-1 \end{cases}$

$\rho(A)=3$

$\rho(A) > \|A\|_{max}$

$\Rightarrow \|\cdot\|_{max}$ δεν είναι φυσική νόρμα.

$\|I_n\|_E = \sqrt{n} \neq 1$ για $n \geq 2$

$\Rightarrow \|\cdot\|_E$ δεν είναι φυσική νόρμα.

(6) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \cdot \|x\|_2$.

(δηλαδή: $\|A\| \leq \|A\|_E$)

(6)
$$\|Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\left((Ax)_i\right)^2 = \cancel{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)^2}_{\leq \sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2 \sum_{j=1}^{n}(x_j)^2}$$

$\uparrow$ C-S

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^2}_{=\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij})^2} \cdot \|x\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \leq \|A\|_E \|x\|_2$$

## Άσκηση 3.36

$\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$

$\quad\quad\quad\quad$ // $\quad\quad\quad\quad$ $\mathbb{R}^{n,n}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ : $\boxed{\|A\| < 1}$

→ΝΔΟ: $I_n - A$ αντιστρέψιμος.

$$(I_n - A)x = 0$$
$$\Rightarrow \cancel{I} \; x = Ax$$
$$\Rightarrow \|x\| = \|Ax\|$$
$$\leq \|A\| \cdot \|x\|$$

Έστω $x \neq 0$ Τότε: $1 \leq \|A\|$ άτοπο. ↯

Συμπέρασμα: $x = 0$

άρα $I_n - A$ αντιστρέψιμος.

→ $$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1} \cdot (I_n - A)\|$$
$$\leq \|(I_n - A)^{-1}\| \cdot \underbrace{\|I_n - A\|}$$
$$\leq \overbrace{\|I_n\|}^{=1} + \|A\|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I_n - A)^{-1}\|$$

$$1 = \|(I_n - A)^{-1}(I_n - A)\| = \|(I_n-A)^{-1} - (I_n-A)^{-1}\cdot A\|$$

$$\geq \|(I_n-A)^{-1}\| - \underbrace{\|(I_n-A)^{-1}A\|}_{\leq \|(I_n-A)^{-1}\|\cdot\|A\|}$$

$$\geq \|(I_n-A)^{-1}\| - \|(I_n-A)^{-1}\|\cdot\|A\|$$

$$\geq \|(I_n-A)^{-1}\|\,(1-\|A\|)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\|A\|} \geq \|(I_n-A)^{-1}\|$$

<u>Ασκηση 3.64</u>

$Ax=b$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ΝΔΟ</u>: Jacobi συγκλίνει.
Gauss-Seidel γενικά αποκλίνει.

<u>Λυση</u>:

<u>Jacobi</u>: $G_J = -\underset{I_3}{\underset{\parallel}{D^{-1}}}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3)$$
$$= \dots\dots = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Ιδιοτιμές: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\rho(G_J) = \frac{1}{2} < 1.$$

$\Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει.

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 21/4 \\ 0 & 0 & 7/4 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$$\lambda_3 = \frac{7}{4}$$

$$\rho(G_{GS}) = \frac{7}{4} > 1 \quad \text{απόκλιση.}$$

Άσκηση 3.65

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi: $G_J = -D^{-1}(L+U)$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det(G_J - \lambda I_3) = \dots = -\lambda^3 + \frac{11}{6}\lambda - \frac{7}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} p(-1) = 1 - \frac{11}{6} - \frac{7}{6} = -2 < 0 \\ \lim_{\lambda \to -\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{υπάρχει ρίζα του } p \text{ στο } (-\infty, -1)$$

Συμπέρασμα: $\rho(G_J) > 1$
$\Rightarrow$ η μέθοδος γενικά αποκλίνει.

Gauss-Seidel:

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1}U = \dots = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \ \lambda_3 = \frac{1}{3}$

$\rho(G_{GS}) = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ η μέθοδος συγκλίνει!